

# Маятник с модулируемой длиной. II.

## Области параметрического возбуждения

Е. И. Бутиков

Санкт-Петербургский государственный университет

### Аннотация

В первой части этой статьи [1] были рассмотрены основные особенности параметрического возбуждения простого жесткого маятника путем периодической модуляции его длины. Был найден порог возбуждения и установлена роль нелинейных эффектов в ограничении размаха резонансных колебаний. Во второй части статьи исследуется зависимость частотных границ интервалов параметрической неустойчивости от глубины модуляции длины и от добротности маятника. Исследованы стационарные колебания, происходящие на границах интервалов неустойчивости.

Ключевые слова: параметрический резонанс, интервалы неустойчивости, фазовая синхронизация, компьютерное моделирование.

## 1 Введение. Исследуемая физическая система

В данной статье рассматривается хорошо известный способ параметрического возбуждения маятника путем периодического изменения его длины. Во многих учебниках и статьях (см., например, [2] – [6]) такая физическая система используется в качестве простой модели детских качелей. Действительно, качели можно рассматривать как физический маятник, приведенная длина которого периодически изменяется из-за того, что стоящий на них ребенок сгибает ноги в коленях в положениях наибольшего отклонения и распрямляется каждый раз когда качели проходят через положение равновесия.

В статье предполагается, что периодическая модуляция приведенной длины маятника происходит по прямоугольному (кусочно постоянному) закону. Такой (несколько идеализированный) способ модуляции дает возможность сравнительно простого физического объяснения явления параметрического резонанса, вплоть до количественного анализа (см. [1]). Приближение прямоугольной модуляции применимо к реальному маятнику при условии, что изменения длины происходят в течение промежутков времени, составляющих малую долю периода собственных колебаний. Будем считать, что резкие, почти мгновенные уменьшения и увеличения длины маятника происходят последовательно через промежутки времени, равные  $T/2$ , так что  $T$  есть полный период изменения длины маятника (период модуляции). Разработанная автором статьи специальная компьютерная программа [7] моделирует поведение этой системы. Компьютерное моделирование существенно помогает в исследовании изучаемого явления.

Легко понять, что изменения длины не могут вывести покоящийся маятник из положения равновесия: в противоположность прямому силовому возбуждению, параметрический резонанс возможен только если маятник совершает хотя бы небольшие собственные колебания. Будем считать, что изменения длины  $l$  маятника происходят между значениями  $l_1 = l_0(1 + m_l)$

и  $l_2 = l_0(1 - m_l)$ , где  $m_l$  — безразмерная глубина модуляции. Параметрический резонанс происходит при следующих значениях частоты  $\omega$  (или периода  $T$ ) модуляции параметра:

$$\omega = \omega_n = \frac{2\omega_0}{n}, \quad T = T_n = \frac{nT_0}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Но параметрический резонанс возможен не только при частотах  $\omega_n$ , удовлетворяющих уравнению (1), но также в некоторых интервалах частот  $\omega$ , лежащих по обе стороны от значений  $\omega_n$  (в интервалах параметрической неустойчивости). Эти интервалы тем шире, чем больше глубина модуляции параметра. Далее будут получены аналитические выражения для частотных границ интервалов параметрической неустойчивости на основе математически более строгого описания параметрического резонанса при прямоугольной кусочно-постоянной модуляции параметра.

## 2 Дифференциальное уравнение параметрических колебаний и средний собственный период при большой глубине модуляции

В течение интервалов  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$  длина маятника неизменна, и его движение можно рассматривать как собственное колебание, подчиняющееся соответствующему дифференциальному уравнению. Однако коэффициенты этого уравнения для соседних интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$  различаются:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_1^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+m}} \quad \text{для } 0 < t < T/2, \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_2^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m}} \quad \text{для } -T/2 < t < 0. \quad (3)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$  — собственная частота малых колебаний маятника со средней длиной  $l_0$ , а  $\gamma$  — постоянная затухания, обусловленного вязким трением. При медленном движении маятника в воздухе зависимость силы сопротивления от скорости с хорошей точностью можно считать линейной. Когда сила сопротивления приложена к грузу на конце стержня маятника, и эта сила пропорциональна линейной скорости груза  $\dot{\varphi}l$ , момент силы сопротивления относительно оси вращения пропорционален  $\dot{\varphi}l^2$ . Поскольку момент инерции в нашей модели (легкий стержень с грузом на конце) также пропорционален  $l^2$ , постоянная затухания не изменяется при изменении длины маятника (при смещении груза вдоль стержня). Это значит, что ее значения в уравнениях (2) и (3) одинаковы.

Каждый раз в моменты  $t_n = nT/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), когда длина маятника резко изменяется, нужно совершить переход от одного из уравнений (2)–(3) к другому. На протяжении каждого полупериода  $T/2$  график движения маятника представляет собой отрезок некоторого собственного колебания. Аналитическое исследование параметрического возбуждения можно выполнить должным «сшиванием» известных решений уравнений (2)–(3) для примыкающих интервалов времени.

Начальные условия для каждого интервала, в соответствии с принятой моделью, выбираются следующим образом. Начальное значение угла отклонения  $\varphi$  берется равным значению угла  $\varphi(t)$ , которого маятник достигает к концу предыдущего интервала. Начальное значение угловой скорости  $\dot{\varphi}$  связано с угловой скоростью в конце предыдущего интервала законом сохранения момента импульса:

$$(1 + m_l)^2 \dot{\varphi}_1 = (1 - m_l)^2 \dot{\varphi}_2. \quad (4)$$

В уравнении (4)  $\dot{\varphi}_1$  — угловая скорость в конце предшествующего интервала, на протяжении которого момент инерции маятника был равен  $J_1 = J_0(1 + m_l)^2$ , а  $\dot{\varphi}_2$  — начальное значение для следующего интервала, на протяжении которого момент инерции равен  $J_2 = J_0(1 - m_l)^2$ . Скачкообразное изменение угловой скорости при резком изменении момента инерции от значения  $J_2$  до  $J_1$  находится аналогично. Здесь допустимо использовать закон сохранения момента импульса в виде (4), потому что за короткое время перемещения груза вдоль стержня влиянием силы тяжести можно пренебречь. Иными словами, можно считать, что маятник свободно вращается вокруг своей оси. Это предположение справедливо, если сдвиг груза вдоль стержня происходит за время, составляющее малую часть периода собственных колебаний.

Определяя условия, при которых уравнения (2)–(3) дают решения с нарастающей амплитудой, можно найти интервалы частоты  $\omega$  вблизи резонансных значений  $\omega_n = 2\omega_0/n$ , в пределах которых состояние покоя маятника неустойчиво при данной глубине модуляции  $m_l$ . В таких интервалах параметрической неустойчивости сколь угодно малого отклонения маятника из положения равновесия достаточно для прогрессивного роста первоначально малых колебаний.

В первой части статьи [1] был найден порог параметрического возбуждения маятника в условиях резонанса, когда два цикла модуляции параметра происходили на протяжении одного периода или трех периодов собственных колебаний. Полученная оценка справедлива при малых значениях глубины модуляции  $m_l$  длины маятника. Для больших значений глубины модуляции  $m_l$  само понятие собственного периода требует уточнения. Пусть  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l_0/g}$  — период собственных колебаний маятника, когда массивный груз закреплен в среднем положении, т.е. эффективная длина равна  $l_0$ . Когда груз смещен вниз, период становится несколько больше:  $T_1 = T_0\sqrt{1 + m_l} \approx T_0(1 + m_l/2)$ . Напротив, период укорачивается, когда груз смещен вверх к оси:  $T_2 = T_0\sqrt{1 - m_l} \approx T_0(1 - m_l/2)$ .

Для дальнейшего удобно ввести средний собственный период не как арифметическое среднее  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ , а как период, соответствующий среднему арифметическому значению частоты  $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ , где  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  и  $\omega_2 = 2\pi/T_2$ . Таким образом, средний период  $T_{av}$  определим следующим соотношением:

$$T_{av} = \frac{2\pi}{\omega_{av}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}. \quad (5)$$

Действительно, период  $T$  модуляции параметра, соответствующий точной настройке на один из резонансов, зависит не только от порядкового номера  $n$  резонанса, но также и от глубины модуляции  $m_l$ . Для выполнения резонансных условий приращение фазы собственных колебаний за один цикл модуляции должно быть равно  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$ . На протяжении первого полупериода фаза возрастает на  $\omega_1 T/2$ , а на протяжении второго полупериода — на  $\omega_2 T/2$ . Поэтому вместо приближенного условия (1) получаем:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} T = n\pi, \quad \text{или} \quad T = T_n = n \frac{\pi}{\omega_{av}} = n \frac{T_{av}}{2}. \quad (6)$$

Таким образом, для параметрического резонанса некоторого порядка  $n$  условие точной настройки можно выразить через значения двух собственных периодов  $T_1$  и  $T_2$ . Это условие имеет вид  $T = nT_{av}/2$ , где  $T_{av}$  определяется соотношением (5). Для малых и умеренных значений глубины модуляции  $m_l$  можно использовать следующие приближенные выражения для средних значений частоты и периода:

$$\omega_{av} = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + m_l}} + \frac{1}{\sqrt{1 - m_l}} \right) \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{8}m_l^2 \right), \quad T_{av} \approx T_0 \left( 1 - \frac{3}{8}m_l^2 \right). \quad (7)$$

Различие между  $T_{av}$  и  $T_0$  проявляется в членах, квадратичных по глубине модуляции.

### 3 Частотные интервалы параметрических резонансов нечетных порядков

Для нахождения границ интервалов параметрической неустойчивости, содержащих резонансные значения  $T = T_{av}/2, T = T_{av}, T = 3T_{av}/2, \dots$ , нужно рассмотреть стационарные колебания бесконечно малой амплитуды, происходящие при совпадении периода модуляции с одной из этих границ. Такие стационарные периодические колебания можно представить как чередование собственных колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ .

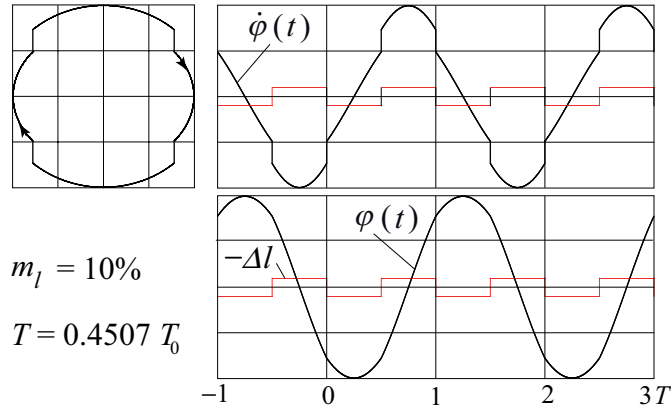


Рис. 1: Фазовая траектория и графики стационарных параметрических колебаний на нижней границе основного интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av}/2$ ).

#### 3.1 Основной интервал параметрической неустойчивости

Рассмотрим сначала окрестность основного резонанса, происходящего при  $T = T_{av}/2$ . Предположим, что период модуляции  $T$  соответствует левой границе интервала неустойчивости, т.е. что он немного меньше резонансного значения. В таком случае между последовательными резкими увеличениями и уменьшениями длины маятника проходит чуть меньше четверти среднего собственного периода  $T_{av}$ . Стационарный режим колебаний постоянной амплитуды в отсутствие трения может реализоваться только при условии, что резкие увеличения и уменьшения угловой скорости равны по величине. Графики угла отклонения  $\varphi(t)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  для такого периодического процесса имеют характерный вид, показанный на рис. 1. Сегменты графиков собственных колебаний (происходящих на интервалах, соответствующих неизменной длине маятника) представляют собой чередующиеся отрезки синусоид и косинусоид с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . Эти сегменты симметрично обрезаны с двух сторон.

Примем момент, когда груз смещается вниз, за начало отсчета времени  $t = 0$ . В этот момент величина угловой скорости резко уменьшается (см. рис. 1). Затем на протяжении промежутка времени  $(0, T/2)$  график описывает отрезок собственного колебания с частотой  $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1+m}$ . Поскольку график симметричен относительно момента времени  $T/4$ , соответствующие зависимости от времени для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  можно записать в виде:

$$\varphi_1(t) = -A_1 \cos \omega_1(t - T/4), \quad \dot{\varphi}_1(t) = A_1 \omega_1 \sin \omega_1(t - T/4), \quad 0 < t < T/2. \quad (8)$$

Аналогично на интервале  $(-T/2, 0)$  график представляет собой отрезок собственного колебания с частотой  $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{1-m}$ :

$$\varphi_2(t) = -A_2 \sin \omega_2(t + T/4), \quad \dot{\varphi}_2(t) = -A_2 \omega_2 \cos \omega_2(t + T/4), \quad -T/2 < t < 0. \quad (9)$$

Для определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  воспользуемся условиями, которые должны выполняться при «сшивании» отрезков графика, и учтем периодичность стационарного процесса колебаний. При  $t = 0$  угол отклонения одинаков для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то есть  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . Угловая скорость при  $t = 0$  претерпевает скачок, величина которого следует из закона сохранения момента импульса:  $(1 + m_l)^2 \dot{\varphi}_1(0) = (1 - m_l)^2 \dot{\varphi}_2(0)$ , см. (4). Из этих условий получаем следующие уравнения для  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1 \cos(\omega_1 T/4) = A_2 \sin(\omega_2 T/4). \quad (10)$$

$$A_1(1 + m_l)^2 \omega_1 \sin(\omega_1 T/4) = A_2(1 - m_l)^2 \omega_2 \cos(\omega_2 T/4). \quad (11)$$

Однородные уравнения (10)–(11) для  $A_1$  и  $A_2$  совместны только при равенстве нулю определителя, т.е. при выполнении следующего условия:

$$(1 + m_l)^2 \omega_1 \sin(\omega_1 T/4) \sin(\omega_2 T/4) = (1 - m_l)^2 \omega_2 \cos(\omega_1 T/4) \cos(\omega_2 T/4). \quad (12)$$

Это уравнение определяет период модуляции  $T$  (при заданном значении глубины модуляции  $m_l$ ), который соответствует левой границе интервала параметрической неустойчивости. Преобразуем уравнение (12) к форме, удобной для получения численного решения относительно неизвестной величины  $T$ :

$$(q + 1) \cos(\omega_{av} T/2) = (q - 1) \cos(\Delta\omega T/4), \quad (13)$$

где  $\omega_{av} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ , и  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . В уравнении (13) введена безразмерная величина  $q$ , зависящая от глубины модуляции  $m_l$ :

$$q = \left( \frac{1 + m_l}{1 - m_l} \right)^{3/2}. \quad (14)$$

Чтобы найти левую границу  $T_-$  интервала неустойчивости, содержащего основной параметрический резонанс, нужно искать решение  $T$  уравнения (13) в окрестности  $T = T_0/2$ . Заменим  $T$  в аргументе косинуса в левой части (13) на  $T_{av}/2 + \Delta T$ . Поскольку  $\omega_{av} T_{av} = 2\pi$ , косинус можно представить в виде  $-\sin(\omega_{av} \Delta T/2)$ . Тогда уравнение (13) принимает вид:

$$\sin(\omega_{av} \Delta T/2) = -\frac{q - 1}{q + 1} \cos \frac{\Delta\omega(T_{av}/2 + \Delta T)}{4}. \quad (15)$$

Это уравнение для неизвестной величины  $\Delta T$  можно решать методом итераций. В качестве приближения нулевого порядка можно взять значение  $\Delta T = 0$  и подставить его в правую часть уравнения (15). Тогда левая часть (15) дает значение  $\Delta T$  первого порядка. Подставляя  $\Delta T$  первого порядка в правую часть (15), в левой части получаем значение  $\Delta T$  во втором порядке. Эту процедуру итераций можно повторять до тех пор пока не будет получено самосогласованное значение  $\Delta T$ . Выполняя такие вычисления для разных значений глубины модуляции  $m_l$ , можно найти всю левую границу  $T_-(m_l)$  первого интервала параметрической неустойчивости. Далее будет показано, как можно получить правую границу этого интервала, а также границы других интервалов неустойчивости.

Интервалы неустойчивости в плоскости  $T - m_l$  для первых шести параметрических резонансов, рассчитанные численно с помощью вышеописанной процедуры, показаны на рис. 2. Здесь можно увидеть аналогию с известной диаграммой Айнса–Стрэтта для интервалов параметрической неустойчивости системы, описываемой уравнением Матье, в частности, для маятника с вертикальными осцилляциями точки подвеса.

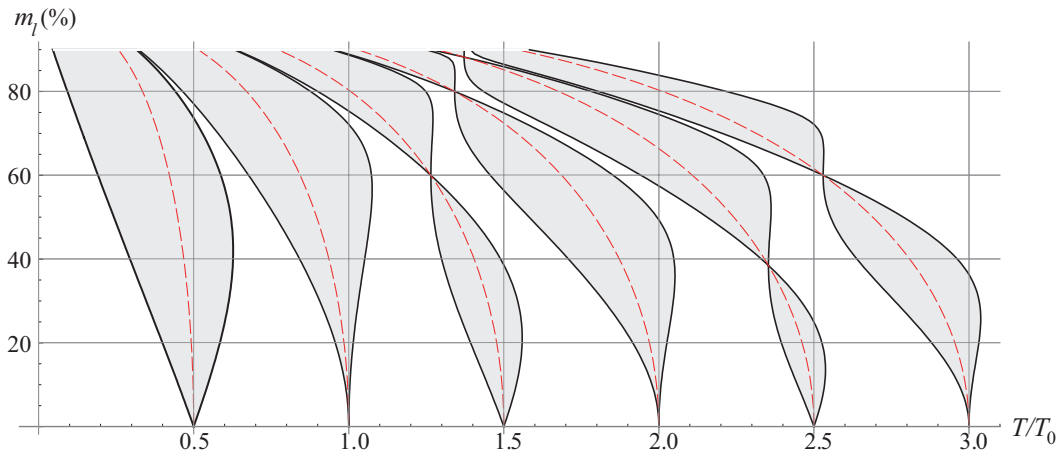


Рис. 2: Интервалы параметрической неустойчивости при прямоугольной кусочно-постоянной модуляции длины маятника в отсутствие трения.

Чтобы наблюдать стационарные колебания, соответствующие левой границе интервала неустойчивости (см. рис. 1) в моделирующем эксперименте, недостаточно выбрать в качестве периода модуляции  $T$  самосогласованное решение уравнения (15) для заданного значения глубины модуляции  $m_l$ : необходимо также должным образом задать начальные условия. Это можно сделать на основе выражения (8), согласно которому при произвольном (но малом) начальном отклонении  $\varphi_1(0)$  начальная угловая скорость должна быть равна  $\dot{\varphi}_1(0) = \omega_1 \tan(\omega_1 T/4) \varphi_1(0)$ .

Для правой границы основного интервала параметрической неустойчивости период модуляции  $T$  немного больше резонансного значения  $T = T_{av}/2$ . В этом случае между последовательными увеличениями и уменьшениями длины маятника происходит чуть больше четверти среднего собственного периода  $T_{av}$ . Графики угла отклонения и угловой скорости для такого периодического процесса показаны на рис. 3. Соответствующие зависимости от времени  $\varphi(t)$

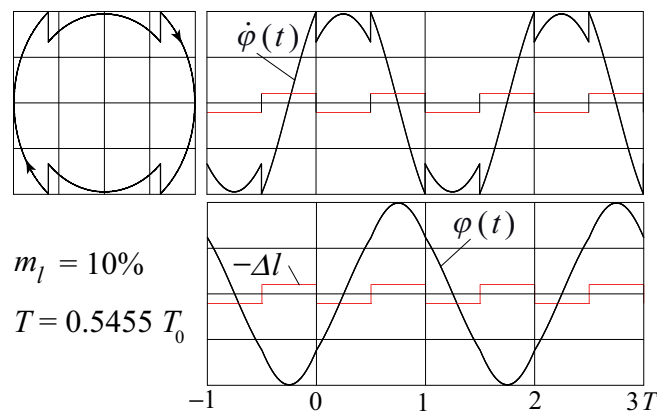


Рис. 3: Стационарные параметрические колебания на верхней границе основного интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av}/2$ ).

и  $\dot{\varphi}(t)$  на интервале  $(0, T/2)$  можно записать в следующем виде:

$$\varphi_1(t) = B_1 \sin \omega_1(t - T/4), \quad \dot{\varphi}_1(t) = B_1 \omega_1 \cos \omega_1(t - T/4), \quad 0 < t < T/2. \quad (16)$$

На интервале  $(-T/2, 0)$  график (см. рис. 3) представляет собой отрезок собственного колебания с частотой  $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{1-m}$ :

$$\varphi_2(t) = -B_2 \cos \omega_2(t + T/4), \quad \dot{\varphi}_2(t) = B_2 \omega_2 \sin \omega_2(t + T/4), \quad -T/2 < t < 0. \quad (17)$$

Дальнейшие вычисления аналогичны тем, что описаны после уравнений (8)–(9) для левой границы. Оказывается, что  $\Delta T$  для правой границы интервала находится решением уравнения, которое отличается от (15) противоположным знаком в правой части. Решая его численно методом итераций для разных значений  $m_l$ , получаем правую границу основного интервала параметрической неустойчивости (см. рис. 2).

Для получения приближенных аналитических решений уравнения (15), справедливых при малой глубине модуляции  $m_l$ , можно упростить его правую часть, учитывая, что  $q \approx 1 + 3m_l$ ,  $q - 1 \approx 3m_l$ . Значение косинуса можно приближенно положить равным 1. В левой части (15) синус можно заменить его малым аргументом, в котором  $\omega_{av} = 2\pi/T_{av}$ . В результате получаем следующие приближенные выражения для обеих границ основного интервала, справедливые вплоть до квадратичных членов по  $m_l$ :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{3m_l}{\pi} \right) T_{av} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{3m_l}{\pi} - \frac{3m_l^2}{8} \right) T_0. \quad (18)$$

### 3.2 Интервал третьего порядка

Границы интервалов неустойчивости вокруг параметрических резонансов высших порядков можно найти аналогично. При резонансе третьего порядка ( $n = 3$ ) два цикла изменения длины маятника происходят на протяжении приблизительно трех периодов собственных колебаний ( $T \approx 3T_{av}/2$ ). Фазовые траектории и графики стационарных колебаний на левой и правой границах третьего интервала показаны на рис. 4. Фазовая траектория этих периодических колебаний замыкается после двух циклов модуляции. Она образована двумя концентрическими эллипсами, соответствующими малым колебаниям маятника с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Изображающая точка обходит эту траекторию по часовой стрелке, перескакивая с одного эллипса на другой каждый раз, когда груз смещается вдоль стержня маятника. Цифры на рис. 4 помогают проследить движение изображающей точки: эквивалентные точки фазовой траектории и графика угловой скорости отмечены одинаковыми цифрами.

Рассматривая условия сшивания графиков собственных колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для левой границы, получаем такие же уравнения (10)–(11) для  $A_1$  и  $A_2$  и такое же уравнение (15) для периода модуляции. Так будет для всех интервалов нечетных порядков. Аналогично, для правой границы получаем такие же уравнения для  $B_1$  и  $B_2$  как и в случае  $n = 1$ , а также уравнение (15) с противоположным знаком в правой части для нахождения соответствующего периода модуляции  $T$ . Но для интервала третьего порядка нужно искать решение этих уравнений в окрестности  $T = 3T_{av}/2$ , как и для любого другого интервала нечетного порядка  $n$  — в окрестности  $T = nT_{av}/2$ . Границы интервалов третьего и пятого порядков, полученные путем численного решения методом итераций, также приведены выше на рис. 2.

При малых значениях глубины модуляции  $m_l$  можно найти приближенные аналитические выражения для нижней и верхней границ третьего интервала, справедливые вплоть до квадратичных по  $m_l$  членов:

$$T_{\mp} = \frac{3}{2} \left( 1 \mp \frac{m_l}{\pi} \right) T_{av} = \frac{3}{2} \left( 1 \mp \frac{m_l}{\pi} - \frac{3m_l^2}{8} \right) T_0, \quad m_l \ll 1. \quad (19)$$

В этом приближении третий интервал характеризуется такой же шириной  $(3m_l/\pi)T_0$  что и интервал неустойчивости в окрестности основного резонанса. Однако этот интервал отличается

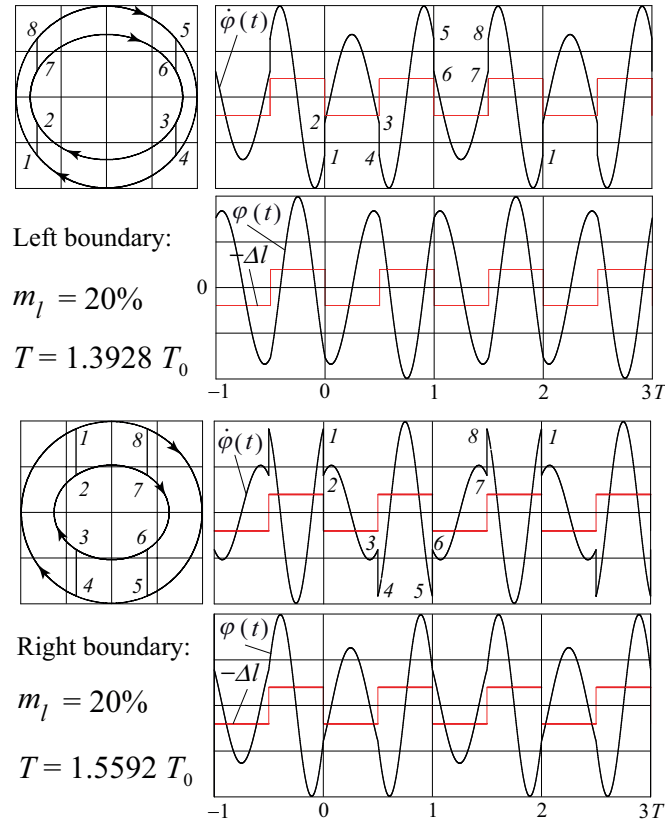


Рис. 4: Фазовые траектории и графики угловой скорости и угла отклонения для стационарных колебаний на левой и правой границах интервала неустойчивости вблизи  $T = 3T_{av}/2$ .

большой асимметрией: его середина смещена влево (в сторону меньших  $T$ ) от резонансного значения  $T = \frac{3}{2}T_0$  на  $\frac{9}{16}m_l^2T_0$ .

## 4 Параметрические резонансы четных порядков

При малой и умеренной глубине прямоугольной модуляции длины маятника параметрический резонанс порядка  $n = 2$  (один цикл модуляции на протяжении одного периода собственных колебаний) оказывается сравнительно слабым по сравнению с рассмотренными выше резонансами  $n = 1$  и  $n = 3$ . В случае  $n = 2$  на протяжении каждого собственного колебания сдвиги груза приводят по одному разу и к увеличению, и к уменьшению энергии маятника. Рост колебаний происходит тогда, когда вложение энергии в момент сдвига груза вверх будет больше, чем уменьшение энергии в момент сдвига вниз. Это возможно лишь при условии, что груз сдвигается вверх тогда, когда угловая скорость маятника больше, чем когда груз смещается вниз. При  $T \approx T_{av}$  такое условие может выполняться только благодаря существованию (малого) различия собственных периодов  $T_1$  и  $T_2$ , где  $T_1 = T_0\sqrt{1 + m_l}$  — период при смещенном вниз грузе, а  $T_2 = T_0\sqrt{1 - m_l}$  — при смещенном вверх грузе маятника. Это различие собственных периодов пропорционально  $m_l$ .

Рост колебаний при параметрическом резонансе второго порядка иллюстрируется рисунком 5. Отметим асимметричный характер этих колебаний: угловое отклонение маятника в одну сторону больше, чем в противоположную. При этом результирующее вложение энергии за период пропорционально квадрату глубины модуляции  $m_l$  в отличие от резонансов  $n = 1$  и



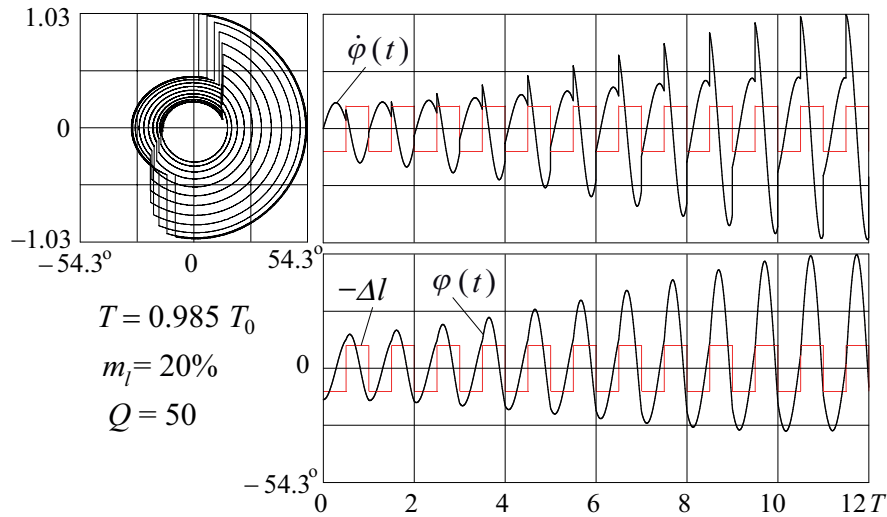


Рис. 5: Фазовая траектория и графики угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  и угла отклонения  $\varphi(t)$  при колебаниях, соответствующих параметрическому резонансу второго порядка  $n = 2$  ( $T \approx T_{av}$ ).

$n = 3$ , для которых вложение энергии пропорционально первой степени  $m_l$ . Поэтому при одной и той же постоянной затухания  $\gamma$  (одной и той же добротности  $Q$ ) для превышения порога параметрического возбуждения при  $n = 2$  необходима значительно бóльшая глубина модуляции. Рост амплитуды здесь также ограничивается нелинейными свойствами маятника.

Интервал неустойчивости в окрестности резонанса  $n = 2$  (для малых значений  $m_l$ ) значительно уже интервалов  $n = 1$  и  $n = 3$ . Его ширина также пропорциональна лишь квадрату глубины модуляции  $m_l$ .

Для нахождения границ этого интервала неустойчивости можно представить стационарные колебания при  $T \approx T_0$  как образованные чередующимися отрезками собственных колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . Фазовая траектория и графики угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  и угла отклонения  $\varphi(t)$  стационарных колебаний на одной из границ показаны на рис. 6. При колебаниях на границе интервала неустойчивости резкие увеличения и уменьшения угловой скорости в отсутствие трения в точности компенсируют друг друга. Для описания таких стационарных

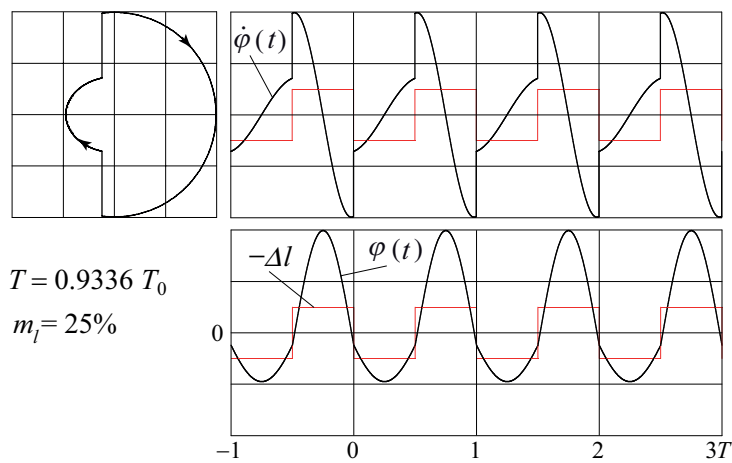


Рис. 6: Стационарные параметрические колебания на левой границе интервала неустойчивости второго порядка  $n = 2$  (вблизи  $T = T_{av} \approx T_0$ ).

колебаний малой амплитуды можно воспользоваться следующими выражениями для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  на интервале  $(0, -T/2)$  (см. рис. 6):

$$\varphi_1(t) = -A_1 \cos \omega_1(t - T/4), \quad \dot{\varphi}_1(t) = A_1 \omega_1 \sin \omega_1(t - T/4), \quad 0 < t < T/2, \quad (20)$$

а на интервале  $(-T/2, 0)$

$$\varphi_2(t) = A_2 \cos \omega_2(t + T/4), \quad \dot{\varphi}_2(t) = -A_2 \omega_2 \sin \omega_2(t + T/4), \quad -T/2 < t < 0. \quad (21)$$

Условия «сшивания» графиков при  $t = 0$  такие же, как и для других резонансов, а именно, при  $t = 0$  должно быть  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ , а угловая скорость изменится скачком в соответствии с законом сохранения момента импульса (см. уравнение (4)). Из этих условий следуют уравнения для  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1 \cos(\omega_1 T/4) = -A_2 \cos(\omega_2 T/4), \quad (22)$$

$$A_1(1 + m_l)^2 \omega_1 \sin(\omega_1 T/4) = A_2(1 - m_l)^2 \omega_2 \cos(\omega_2 T/4). \quad (23)$$

Однородные уравнения (22)–(23) для  $A_1$  и  $A_2$  имеют нетривиальное решение только при выполнении следующего условия:

$$(1 + m_l)^2 \omega_1 \sin(\omega_1 T/4) \cos(\omega_2 T/4) = -(1 - m_l)^2 \omega_2 \sin(\omega_2 T/4) \cos(\omega_1 T/4). \quad (24)$$

Это уравнение определяет период модуляции  $T$  (при заданном значении  $m_l$ ), соответствующий левой границе 2-го интервала параметрической неустойчивости. Уравнение (24) можно преобразовать к следующему виду, удобному для численного решения итерациями:

$$(q + 1) \sin(\omega_{\text{av}} T/2) = (q - 1) \sin(\Delta\omega T/4), \quad (25)$$

где  $q$  зависит от глубины модуляции  $m_l$  в соответствии с (14). Далее можно заменить  $T$  в аргументе синуса в левой стороне (25) на  $T_{\text{av}} + \Delta T$ . Поскольку  $\omega_{\text{av}} T_{\text{av}} = 2\pi$ , синус можно представить как  $-\sin(\omega_{\text{av}} \Delta T/2)$ . Тогда уравнение (25) принимает вид:

$$\sin(\omega_{\text{av}} \Delta T/2) = -\frac{q - 1}{q + 1} \sin \frac{\Delta\omega(T_{\text{av}} + \Delta T)}{4}. \quad (26)$$

Это уравнение относительно  $\Delta T$  можно решать численно с помощью описанной выше процедуры итераций. Самосогласованные решения для разных значений глубины модуляции  $m_l$  дают левую границу интервала  $n = 2$ . Для рассчитанного таким образом периода модуляции  $T$  начальные условия, обеспечивающие стационарные колебания, находятся из уравнения (20), в соответствии с которым при произвольном начальном отклонении  $\varphi_1(0)$  начальная угловая скорость должна быть равна  $\dot{\varphi}_1(0) = \omega_1 \tan(\omega_1 T/4) \varphi_1(0)$ .

Правая граница 2-го интервала дается уравнением, отличающимся от (26) противоположным знаком его правой части. Обе границы показаны на диаграмме 2 вместе с интервалами более высоких четных порядков, полученными путем аналогичных численных расчетов.

Отметим, что интервалы четных порядков ( $n = 2, 4, 6$ ) при малой глубине модуляции  $m_l$  намного уже резонансов нечетных порядков. С ростом  $m_l$  четные интервалы расширяются и становятся сравнимыми с интервалами нечетных порядков.

При малых и умеренных значениях глубины модуляции  $m_l \ll 1$  из решения уравнения (26) (и уравнения с противоположным знаком для другой границы) можно получить приближенные аналитические выражения для обеих границ 2-го интервала:

$$T_{\mp} = \left(1 \mp \frac{3}{4} m_l^2\right) T_{\text{av}} = T_0 + \left(\mp \frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) m_l^2 T_0, \quad (27)$$

т.е.  $T_- = T_0(1 - \frac{9}{8} m_l^2)$ ,  $T_+ = T_0(1 + \frac{3}{8} m_l^2)$ . Как уже отмечалось выше, ширина этого интервала неустойчивости  $T_+ - T_- = \frac{3}{2} m_l^2 T_0$  пропорциональна квадрату глубины модуляции.

## 5 Пересечения границ интервалов при большой глубине модуляции

Как видно из рис. 2, при определенных значениях  $m_l$  обе границы интервалов с  $n > 2$  совпадают (можно считать, что они пересекаются). Это значит, что при таких  $m_l$  данные интервалы параметрической неустойчивости исчезают. Можно показать, что такие значения  $m_l$  соответствуют собственным периодам колебаний  $T_1$  и  $T_2$ , которые относятся как 2 : 1, 3 : 1, и 3 : 2. При первом пересечении (отношение 2 : 1) маятник совершает в точности половину собствен-

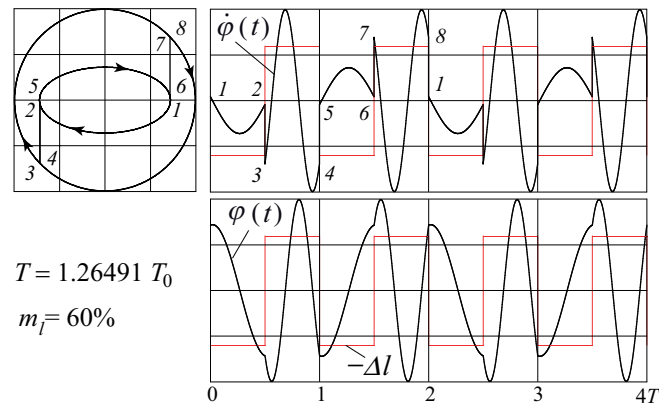


Рис. 7: Фазовая траектория и графики угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  и угла отклонения  $\varphi(t)$  для стационарных колебаний при пересечении границ третьего интервала неустойчивости.

ного колебания с периодом  $T_1$  в течение первой половины цикла модуляции (см. рис. 7). На фазовой диаграмме изображающая точка за это время описывает половину меньшего эллипса (1 — 2), и затем перескакивает вниз на больший эллипс (2 — 3). За вторую половину цикла модуляции маятник совершает полное колебание с периодом  $T_2 = T_1/2$ , так что изображающая точка проходит вдоль всего большего эллипса (3 — 4), и затем перескакивает на меньший эллипс по тому же самому вертикальному отрезку (4 — 5).

На протяжении следующего цикла модуляции длины маятника изображающая точка проходит сначала вдоль другой половины меньшего эллипса (5 — 6), а затем снова вдоль всего большего эллипса (7 — 8). Таким образом, на протяжении любых двух последовательных циклов модуляции изображающая точка проходит один раз вдоль всего меньшего эллипса и дважды вдоль большего эллипса, возвращаясь в итоге в начальную точку. Легко видеть, что такое колебание будет периодическим при любых начальных условиях. Это значит, что для соответствующих значений глубины модуляции  $m_l$  и периода модуляции  $T$  рост амплитуды невозможен даже в отсутствие трения (интервал неустойчивости исчезает).

Аналогичные объяснения возможны и для других случаев пересечения границ интервалов неустойчивости на рис. 2.

## 6 Интервалы параметрического возбуждения при наличии трения

Если в системе есть трение, интервалы параметрического возбуждения сужаются, и при достаточно сильном трении (ниже порога) исчезают совсем. Выше порога возбуждения приближенное выражение для границ основного интервала можно получить из соотношения (18),

заменяя в нем  $m_l$  на  $\sqrt{m_l^2 - (m_l)_{\min}^2}$  с пороговым значением  $(m_l)_{\min} = \pi/(6Q)$  (см. [1]). Доказательство приведено в Приложении. Для третьего интервала можно использовать выражение (19), подставляя в него  $\sqrt{m_l^2 - (m_l)_{\min}^2}$  вместо  $m_l$  с  $(m_l)_{\min} = \pi/(2Q)$ . Когда  $m_l$  уменьшается до своего порогового значения  $(m_l)_{\min}$ , соответствующий интервал параметрической неустойчивости исчезает.

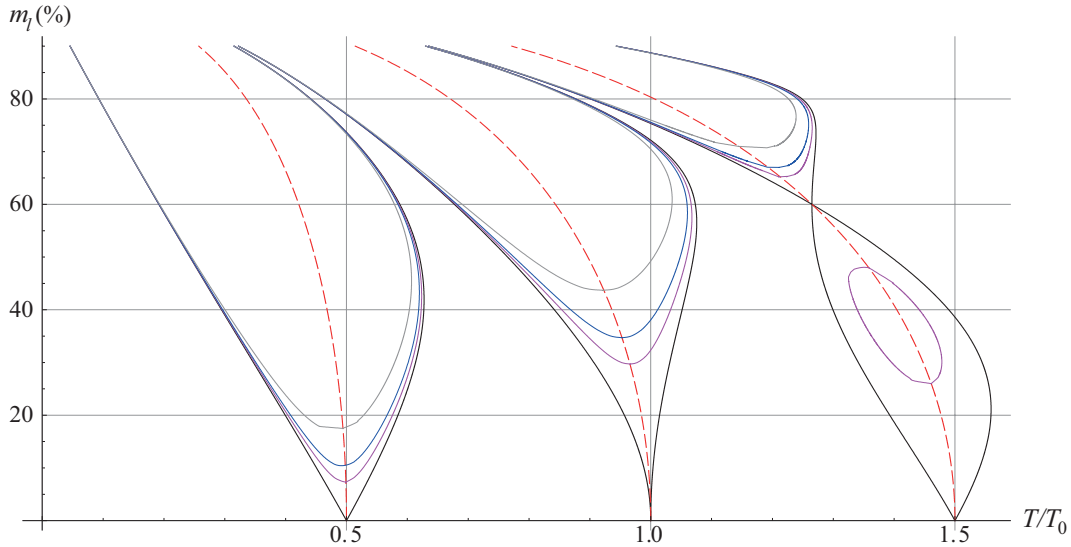


Рис. 8: Интервалы параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции длины маятника в отсутствие трения, при  $Q = 7$ ,  $Q = 5$  и при  $Q = 3$ .

Границы второго интервала параметрического возбуждения при наличии трения приближенно даются выражением (27), если заменить в нем  $m_l^2$  на  $\sqrt{m_l^4 - (m_l)_{\min}^4}$  с пороговым значением  $(m_l)_{\min} = \sqrt{2/(3Q)}$ , соответствующим параметрическому резонансу второго порядка (см. Приложение).

Диаграмма на рис. 8 показывает границы первых трех интервалов параметрического возбуждения для  $Q = 3$ ,  $Q = 5$  и  $Q = 7$  (а также в отсутствие трения). Отметим «островок» параметрического резонанса третьего порядка ( $n = 3$ ) при  $Q = 7$ . Этот резонанс исчезает, когда глубина модуляции становится больше 48%, и появляется снова, когда  $m_l$  превышает приблизительно 66%.

При наличии трения для данного значения глубины модуляции  $m_l$  могут существовать лишь несколько первых интервалов параметрического возбуждения (когда  $m_l$  превышает пороговое значение). Отметим также, что когда положение равновесия маятника неустойчиво из-за модуляции параметра, параметрическая раскачка возможна лишь при условии, что маятник уже совершает колебания хотя бы малой амплитуды. Если же начальные значения  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  в точности равны нулю, маятник будет оставаться в покое несмотря на модуляцию длины. Этим параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса при непосредственном силовом воздействии, когда амплитуда растет даже если первоначально система покоится в положении равновесия.

## 7 Заключительные замечания

В этой статье мы рассмотрели маятник, длина которого подвержена модуляции по прямоугольному кусочно-постоянному закону. Такая модель дает удобный пример, в котором все

особенности явления параметрического резонанса в нелинейной системе допускают ясное физическое истолкование. Рост амплитуды при параметрическом резонансе ограничен нелинейными эффектами, благодаря которым собственный период зависит от амплитуды. Увеличение размаха колебаний маятника при резонансе приводит к удлинению собственного периода. Система выбивается из резонанса, размах колебаний уменьшается, и условия резонанса восстанавливаются. Возникают переходные биения, постепенно затухающие из-за трения, и в конце концов устанавливаются колебания конечного постоянного размаха. Компьютерное моделирование движения системы существенно облегчает понимание физических причин ограничения роста амплитуды из-за нелинейных свойств маятника.

В статье показано, что границы интервалов параметрической неустойчивости маятника при прямоугольной кусочно-постоянной модуляции его длины можно рассчитать с помощью весьма скромных математических средств. Для этого достаточно рассмотреть стационарные периодические колебания бесконечно малой амплитуды, происходящие при совпадении периода модуляции с одной из этих границ. Такие периодические колебания можно представить как чередование собственных колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ , соответствующими длине маятника  $l_1 = l_0(1 + m_l)$  и длине  $l_2 = l_0(1 - m_l)$  соответственно. «Сшивание» известных аналитических выражений для этих собственных колебаний на примыкающих интервалах времени в моменты скачкообразных изменений длины маятника позволяет определить значение периода модуляции  $T(m_l)$  для соответствующего стационарного режима как функцию глубины модуляции.

## Приложение

### Границы интервалов неустойчивости при наличии трения

#### Резонансы нечетных порядков

Стационарные колебания, происходящие на левой границе основного интервала параметрической неустойчивости при наличии трения показаны на рис. 9 (сравните с рис. 1). Дважды на протяжении одного цикла модуляции угловая скорость резко увеличивается, и дважды уменьшается. Увеличения больше уменьшений, так что в целом за счет модуляции длины получаемая маятником энергия превосходит отдаваемую энергию. Этот избыток компенсирует рассеяние энергии из-за трения, которое происходит при собственных колебаниях маятника в промежутках между резкими сдвигами груза вдоль стержня маятника.

Чтобы найти условия, при которых происходят такие стационарные колебания, запишем выражения  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  для соседних интервалов, на протяжении которых маятник совершает затухающие собственные колебания, и затем произведем «сшивание» этих выражений на границах интервалов. В противоположность случаю отсутствия трения, (см. рис. 1), теперь фазовая траектория не симметрична относительно оси ординат (рис. 9). Выберем начало отсчета времени  $t = 0$  в момент, когда груз сдвигается вниз, и угловая скорость уменьшается. На протяжении интервала  $(0, T/2)$  происходит затухающее собственное колебание с частотой  $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1 + m_l}$ . Его можно представить как суперпозицию колебаний синусоидального и косинусоидального типа с некоторыми константами  $A_1$  и  $B_1$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= (A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) e^{-\gamma t}, \\ \dot{\varphi}_1(t) &\approx (A_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - B_1 \omega_1 \sin \omega_1 t) e^{-\gamma t}.\end{aligned}\tag{28}$$

Выражение для  $\dot{\varphi}(t)$  приближенно справедливо при сравнительно слабом трении ( $\gamma \ll \omega_0$ ), так как оно соответствует дифференцированию  $\varphi_1(t)$  по времени при постоянном экспонен-

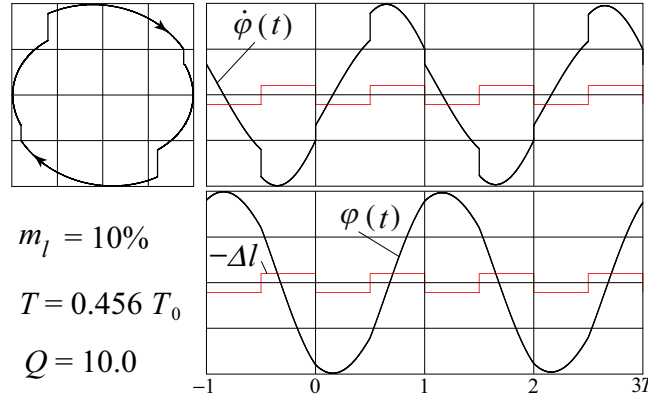


Рис. 9: Стационарные колебания на левой границе интервала неустойчивости при наличии трения.

циальном множителе  $e^{-\gamma t}$ . Действительно, при слабом затухании основной вклад в производную обусловлен быстро осциллирующими множителями  $\sin \omega_1 t$  и  $\cos \omega_1 t$  в  $\varphi_1(t)$ . Аналогично, на протяжении интервала  $(-T/2, 0)$  график на рис. 9 представляет собой сегмент затухающего собственного колебания с частотой  $\omega_2$ :

$$\varphi_2(t) = (A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t) e^{-\gamma t}, \quad (29)$$

$$\dot{\varphi}_2(t) \approx (A_2 \omega_2 \cos \omega_2 t - B_2 \omega_2 \sin \omega_2 t) e^{-\gamma t}. \quad (30)$$

Для определения постоянных  $A_1, A_2$ , и  $B_1, B_2$  воспользуемся условиями сшивания сегментов графиков и примем во внимание периодичность всего процесса. При  $t = 0$  угол отклонения совпадает для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , т.е.  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . Из этого условия следует, что  $B_2 = B_1$ . В дальнейшем эти совпадающие постоянные будем обозначать как  $B$ . Угловая скорость при  $t = 0$  изменяется скачком в соответствии с законом сохранения момента импульса:  $(1 + m_l)^2 \dot{\varphi}_1 = (1 - m_l)^2 \dot{\varphi}_2$ , см. уравнение (4). Это условие дает следующее соотношение между  $A_1$  и  $A_2$ :  $A_2 = q A_1 = q A$  (далее обозначаем  $A_1$  как  $A$ ), где множитель  $q$  зависит от глубины модуляции  $m_l$  в соответствии с (14).

В условиях стационарных колебаний на границе основного резонанса, как и других резонансов нечетных порядков  $n = 1, 3, \dots$  в уравнении (6), условия периодичности имеют вид:

$$\varphi_1(T/2) = -\varphi_2(-T/2), \quad (1 + m)^2 \dot{\varphi}_1(T/2) = -(1 - m)^2 \dot{\varphi}_2(-T/2). \quad (31)$$

Подставляя  $\varphi_1$  и  $\dot{\varphi}_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\dot{\varphi}_2$  в (31), получаем систему однородных уравнений для  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} (p S_1 - q S_2) A + (p C_1 + C_2) B &= 0, \\ q(p C_1 + C_2) A - (p q S_1 - S_2) B &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $p = \exp(-\gamma T)$ . В (32) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos(\omega_1 T/2), & C_2 &= \cos(\omega_2 T/2), \\ S_1 &= \sin(\omega_1 T/2), & S_2 &= \sin(\omega_2 T/2). \end{aligned} \quad (33)$$

Система однородных уравнений (32) для  $A$  и  $B$  имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю ее определителя:

$$2q C_1 C_2 - (1 + q^2) S_1 S_2 + q(p + 1/p) = 0. \quad (34)$$

Это условие существования ненулевого решения системы (32) дает уравнение относительно неизвестного периода модуляции  $T$ , который входит в (34) как аргументы синусов и косинусов в  $S_1, S_2$  и  $C_1, C_2$ , а также как аргумент экспоненты в  $p = e^{-\gamma T}$ . Искомые границы интервалов неустойчивости  $T_-$  и  $T_+$  находятся как корни уравнения (34). Для получения решений этого трансцендентного уравнения, преобразуем его к более удобной форме. Представим сначала произведения  $C_1 C_2$  и  $S_1 S_2$  в (34) следующим образом:

$$C_1 C_2 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\Delta \omega T}{2} + \cos \omega_{\text{av}} T \right), \quad S_1 S_2 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\Delta \omega T}{2} - \cos \omega_{\text{av}} T \right), \quad (35)$$

Затем, используя тождество  $\cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) - 1$ , приводим (34) к следующему виду:

$$(q + 1) \cos(\omega_{\text{av}} T/2) = \pm \sqrt{(q - 1)^2 \cos^2(\Delta \omega T/4) - q(p + 1/p - 2)}. \quad (36)$$

Чтобы найти границы основного интервала параметрической неустойчивости, нужно искать решение уравнения (36) относительно неизвестного периода  $T$  в окрестности  $T = T_0/2 \approx T_{\text{av}}/2$ . Если для заданного значения добротности  $Q$  ( $Q$  входит в  $p = e^{-\gamma T}$ ) глубина модуляции  $m_l$  превышает пороговое значение, уравнение (36) имеет два решения, которые соответствуют искомым границам  $T_-$  и  $T_+$  интервала неустойчивости. Такие решения существуют, если подкоренное выражение в (36) положительно. Равное нулю значение соответствует порогу:

$$\frac{(q - 1)^2}{q} \cos^2(\Delta \omega T/4) = p + \frac{1}{p} - 2. \quad (37)$$

Для оценки порогового значения  $Q$  при малой глубине модуляции  $m_l \ll 1$  можно положить здесь  $q \approx 1 + 3m_l$  (см. уравнение (14)), и  $\cos(\Delta \omega T/4) \approx 1$ . В правой части (37), в  $p = e^{-\gamma T}$ , можно считать  $\gamma T \approx \gamma T_0/2 = \pi/(2Q) \ll 1$ , так что  $p + 1/p - 2 \approx (\gamma T)^2 = (\pi/2Q)^2$ . Таким образом, для порога основного параметрического резонанса получаем:

$$Q_{\min} \approx \frac{\pi}{6m_l} \quad (m_l)_{\min} \approx \frac{\pi}{6Q}. \quad (38)$$

В условиях порога подкоренное выражение в уравнении (36) равно нулю. Оба его корня (границы интервала неустойчивости) совпадают. Так происходит, если косинус в левой части (36) равен нулю, т.е. когда его аргумент равен  $\pi/2$ :

$$\omega_{\text{av}} \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{or} \quad T = \frac{\pi}{\omega_{\text{av}}} = \frac{1}{2} T_{\text{av}},$$

так что пороговые условия (38) соответствуют точной настройке на резонанс:  $T = T_{\text{av}}/2$ .

Для нахождения границ  $T_-$  и  $T_+$  интервала неустойчивости представим  $T$  в аргументе косинуса в левой части (36) как  $T_{\text{av}}/2 + \Delta T$ . Поскольку  $\omega_{\text{av}} T_{\text{av}} = 2\pi$ , этот косинус можно записать в виде  $-\sin(\omega_{\text{av}} \Delta T/2)$ . Тогда уравнение (36) принимает вид:

$$\sin(\omega_{\text{av}} \Delta T/2) = \mp \frac{1}{q + 1} \sqrt{(q - 1)^2 \cos^2 \frac{\Delta \omega (\frac{1}{2} T_{\text{av}} + \Delta T)}{4} - q \frac{(p - 1)^2}{p}}. \quad (39)$$

При нулевом трении  $p = 1$ , и (39) совпадает с (14). Диаграмма на рис. 8 получена путем численного решения уравнения (39) относительно неизвестного  $\Delta T$  методом итераций. Границы интервалов неустойчивости высших нечетных порядков  $n = 3, 5, \dots$  рассчитываются аналогично. Для этого  $T$  в уравнении (36) представляется как  $n T_{\text{av}}/2 + \Delta T$ . Эти интервалы также

показаны на рис. 8 для нескольких значений добротности  $Q$ . При больших значениях глубины модуляции  $m_l$  эти границы почти сливаются с соответствующими границами в отсутствие трения.

Для получения приближенного решения уравнения (39), справедливого при малых значениях глубины модуляции  $m_l \ll 1$  вплоть до квадратичных по  $m_l$  членов, можно упростить подкоренное выражение в правой части (32), полагая  $q \approx 1 + 3m_l$ ,  $(q - 1)^2 \approx 9m_l^2$ , а значение косинуса принять равным 1. Последний член в подкоренном выражении можно представить как  $(\pi/6Q)^2 \approx (m_l)_{\min}^2$ . В левой части синус можно заменить его малым аргументом, где  $\omega_{av} = 2\pi/T_{av}$ . В результате получаем:

$$\frac{\Delta T}{T_{av}} \approx \mp \frac{1}{2\pi} \sqrt{m_l^2 - (m_l)_{\min}^2}, \text{ или } T_{\mp} = \frac{T_{av}}{2} \left( 1 \mp \frac{1}{\pi} \sqrt{m_l^2 - (m_l)_{\min}^2} \right). \quad (40)$$

При отсутствии трения  $(m_l)_{\min} = 0$ , и эти приближенные выражения для границ интервала неустойчивости сводятся к выражению (18). В условиях порога  $m_l = (m_l)_{\min}$ , и обе границы интервала сливаются при  $T = T_{av}/2$ , т.е. интервал неустойчивости исчезает.

При подстановке любого из двух корней  $T_-$  или  $T_+$  уравнения (18) в (32) уравнения для  $A$  и  $B$  становятся эквивалентными, и из них можно найти только отношение  $A/B$ . Тем не менее, соответствующие колебания характеризуются вполне определенной формой, которая определяется отношением амплитуд  $A$  и  $B$  синусоидальных и косинусоидальных функций, сегменты которых образуют рисунок стационарных параметрических колебаний (см. рис. 1 и 3).

## Резонансы четных порядков

Для описания стационарных колебаний, происходящих на границах интервалов неустойчивости четных порядков, можно использовать такие же выражения для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$ , как в (28) и (30). Условия сшивания графиков при  $t = 0$  также не отличаются. Однако условия периодичности для моментов  $-T/2$  и  $T/2$  в случае резонансов четных порядков отличаются от (31) противоположным знаком. В результате вместо уравнения (36) получаются следующие уравнения для границ интервалов неустойчивости:

$$(q + 1) \sin(\omega_{av}T/2) = \pm \sqrt{(q - 1)^2 \sin^2(\Delta\omega T/4) - q(p + 1/p - 2)}. \quad (41)$$

Для интервала 2-го порядка нужно искать решение в окрестности  $T_0 \approx T_{av}$ . Если для заданного значения добротности  $Q$  ( $Q$  входит в  $p = e^{-\gamma T}$ ) глубина модуляции  $m_l$  превышает пороговое значение, уравнение (41) имеет два корня  $T_-$  и  $T_+$ , которые соответствуют границам интервала неустойчивости. Эти корни существуют, если подкоренное выражение в (41) положительно. Нулевое значение соответствует порогу, т.е. значению  $(m_l)_{\min}$  для заданного  $Q$  или  $Q_{\min}$  для заданного  $m_l$ :

$$\frac{(q - 1)^2}{q} \sin^2(\Delta\omega T_{av}/4) = \frac{(p - 1)^2}{p}. \quad (42)$$

Пороговые условия выполняются при точной настройке на второй резонанс, т.е. при  $T = T_{av}$ . Чтобы оценить пороговое значение  $Q$  при малой глубине модуляции  $m_l$ , можно положить здесь  $q \approx 1 + 3m_l$ ,  $\sin(\Delta\omega T/4) \approx \Delta\omega T_0/4$ , и  $\Delta\omega \approx m_l\omega_0$ . В правой части уравнения (42) в  $p = e^{-\gamma T}$  можно положить  $\gamma T \approx \gamma T_0 = \pi/Q \ll 1$ , так что  $p + 1/p - 2 = (p - 1)^2/p \approx (\gamma T)^2 = (\pi/Q)^2$ . В результате для порога 2-го резонанса получаем:

$$Q_{\min} \approx \frac{2}{3m_l^2}, \quad (m_l)_{\min} \approx \sqrt{\frac{2}{3Q}}. \quad (43)$$



Чтобы найти границы  $T_-$  и  $T_+$  2-го интервала неустойчивости, можно представить  $T$  в аргументе синуса в левой части уравнения (41) как  $T_{av} + \Delta T$ . Поскольку  $\omega_{av}T_{av} = 2\pi$ , этот синус записывается как  $-\sin(\omega_{av}\Delta T/2)$ . В результате уравнение (41) принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av}\Delta T}{2} = \mp \frac{1}{q+1} \sqrt{(q-1)^2 \sin^2 \frac{\Delta\omega(T_{av} + \Delta T)}{4} - q \frac{(p-1)^2}{p}}. \quad (44)$$

Такая форма уравнения удобна для численного решения итерациями. Она использовалась для получения соответствующих кривых диаграммы на рис. 8. В случае нулевого трения  $p = 1$ , и уравнение (44) совпадает с (26). Для получения приближенного решения уравнения (44) при малой глубине модуляции  $m_l$  можно упростить подкоренное выражение в правой части (44), полагая  $q \approx 1 + 3m_l$ ,  $(q-1)^2 \approx (3m_l)^2$ , и  $\sin[\Delta\omega(T_{av} + \Delta T)/4] \approx \Delta\omega T_{av}/4 = \pi m_l/2$ . Последний член подкоренного выражения можно представить как  $(2/3Q)^2 \approx (m_l)_{\min}^4$ . В левой части синус можно заменить его малым аргументом, где  $\omega_{av} = 2\pi/T_{av}$ . В результате для границ 2-го интервала неустойчивости получаем следующие приближенные выражения:

$$\frac{\Delta T}{T_{av}} \approx \mp \frac{3}{4} \sqrt{m_l^4 - (m_l)_{\min}^4}, \quad \text{или} \quad T_{\mp} = \left( 1 \mp \frac{3}{4} \sqrt{m_l^4 - (m_l)_{\min}^4} \right) T_{av}. \quad (45)$$

## Список литературы

- [1] Е. И. Бутиков, Маятник с модулируемой длиной. I. Параметрический резонанс. *Компьютерные инструменты в образовании*, № 0 (2013), стр. 00–00.
- [2] S. M. Curry, How children swing, *Am. J. Phys.* **44** (1976) 924–926.
- [3] P.L. Tea Jr., H.Falk, Pumping on a swing, *Am. J. Phys.* **36** (1968) 1165–1166.
- [4] W. Case, The pumping of a swing from the standing position, *Am. J. Phys.* **64** (1996) 215–220.
- [5] M. A. Pinsky, A. A. Zevin, Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing, *Int. J. Non-Linear Mech.* **34** (1999) 105–109.
- [6] D. Stilling, W. Szyskowski, Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: a variable length pendulum case, *Int. J. Non-Linear Mech.* **37** (2002) 89–99.
- [7] E. I. Butikov, Pendulum with a square-wave modulated length (simulation program), <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/PendParSquare.html>