

Бутиков Евгений Иванович

НЕОБЫЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАЯТНИКА ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в 16 веке и вплоть до наших дней маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но еще и потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя соответствующие системы описываются сходными дифференциальными уравнениями.

Традиционно в вузовских и школьных курсах имеется значительный переко-

сторону изучения линейных систем, для которых возможны аналитические решения, а вопросам поведения нелинейных систем уделяется недостаточное внимание. В значительной мере такое положение объясняется тем, что существующие аналитические методы исследования нелинейных колебательных систем слишком сложны, и при этом не в состоянии описать наблюдаемое в эксперименте разнообразие их поведения. Использование компьютерного моделирования в учебном процессе позволяет до некоторой степени устранить существующий перекокс в преподавании физики колебаний. Иногда моделирование может рассказать нам об изучаемой системе больше, чем математика. На прилагаемом к журналу диске помещена моделирующая программа, позволяющая наблюдать поведение маятника под действием внешней силы, синусоидально изменяющейся со временем.

Может показаться, что обычный маятник под действием синусоидальной силы должен демонстрировать вполне понятное поведение, хорошо согласующееся с нашей интуицией. Но несмотря на кажущуюся простоту этот всем нам знакомый маятник, будучи нелинейной системой, обнаруживает большое число весьма необычных видов движения, многие из которых еще до конца не изучены.

Реакция нелинейных систем на гармоническое воздействие не является синусоидальной, и относительно этой реакции

в общем случае невозможно сформулировать какие-либо универсальные утверждения. Отклик нелинейной системы зачастую неоднозначен – установившееся движение может иметь разный характер в зависимости от начального состояния. Спектр вынужденных колебаний может содержать субгармонические частоты, выражаемые рациональной дробью частоты вынуждающего воздействия. В некоторых случаях отклик нелинейной системы на регулярное воздействие может быть хаотическим, а малое изменение частоты или амплитуды воздействия может привести к качественному изменению отклика системы. Контраст с поведением линейных систем поистине поразителен.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЯТНИКА

Будем изучать возможные движения так называемого математического маятника в виде точечной массы, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси в однородном поле тяготения. Мы рассматриваем именно стержень, а не гибкую нить, чтобы можно было изучать полные перевороты и колебания с амплитудой, приближающейся к 180° . Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, то есть закрепленного на горизонтальной оси произвольного твердого тела (а не только стержня с точечной массой), так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением.

В положении устойчивого равновесия центр масс маятника расположен ниже точки подвеса на одной вертикали с ней. При отклонении маятника из этого положения на угол φ сила тяжести создает возвращающий момент, пропорциональный $\sin \varphi$. При малых углах отклонения φ (то есть при малых колебаниях маятника) значения синуса угла и самого угла практически совпадают ($\sin \varphi \approx \varphi$) и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В частности, под действием слабой

синусоидальной внешней силы установившееся движение маятника представляет собой простое гармоническое колебание. При больших амплитудах маятник совершает периодические колебания, которые, однако, уже не будут гармоническими. Как мы увидим далее, графики таких колебаний заметно отличаются от синусоиды.

Механическое состояние маятника в любой момент времени определяется углом его отклонения от положения равновесия φ и угловой скоростью $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ (точка над символом обозначает производную по времени). Угловая скорость $\dot{\varphi}$ в моделирующей программе измеряется в единицах ω_0 угловой частоты малых собственных колебаний маятника ($\omega_0 = 2\pi/T_0$, где T_0 – период малых собственных колебаний). На маятник действует внешний вынуждающий момент сил, синусоидально зависящий от времени с частотой ω и некоторой постоянной амплитудой.

Дифференциальное уравнение движения математического или физического маятника можно получить, основываясь на уравнении динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Согласно этому уравнению, угловое ускорение $\ddot{\varphi}(t)$ определяется возвращающим моментом силы тяжести, который в случае маятника пропорционален синусу угла отклонения, а также тормозящим моментом силы трения, который в принятой модели пропорционален угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$, и, наконец, синусоидальным внешним моментом:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь ω – частота внешнего воздействия, γ – постоянная затухания. Вместо постоянной затухания удобно использовать эквивалентный безразмерный параметр – *добротность* $Q = \omega_0/(2\gamma)$.

Величина $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ в правой части уравнения (1) пропорциональна внешнему моменту. Физический смысл θ можно пояснить следующим образом. Представим себе, что к маятнику приложен не-большой постоянный (не зависящий от

времени) момент силы, так что правая часть (1) равна θ (вместо $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$). Этот момент вызывает статическое отклонение маятника от вертикали на угол φ . Синус этого угла отклонения пропорционален приложенному моменту силы. В самом деле, когда маятник неподвижен, производные угла отклонения φ по времени равны нулю ($\ddot{\varphi} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$), и из уравнения (1) следует, что при действии статического момента θ выполняется соотношение $\sin \varphi = \theta$. Поэтому значение $\theta = 1$ соответствует внешнему моменту, который необходим для отклонения маятника до горизонтального положения $\varphi = \pi/2$, где возвращающий момент силы тяжести максимален.

Когда внешний момент невелик ($\theta \ll 1$), вызываемое им отклонение маятника также невелико ($\varphi \ll 1$), и можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. Это значит, что статический угол φ отклонения маятника под действием малого постоянного момента как раз равен величине θ . Поэтому θ может служить удобной угловой мерой внешнего момента действующей на маятник внешней силы. В пределе очень низкой частоты внешнего момента (когда $\omega \rightarrow 0$) маятник квазистатически следует за изменениями внешнего момента, то есть при низкой частоте и малой амплитуде вынуждающей силы установившиеся вынужденные колебания маятника происходят как раз с амплитудой θ_0 внешнего момента, измеренной в таких угловых единицах.

3. РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Установившиеся вынужденные колебания маятника происходят с малой амплитудой, если внешний момент невелик ($\theta \ll 1$) и его частота ω достаточно далека от резонансной частоты ω_0 . В таких случаях во все моменты времени $\varphi(t) \ll 1$ и можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$ – возвращающий момент силы тяжести практически пропорционален углу отклонения. Это значит, что для малых колебаний уравнение (1) становится линейным: искомая функция $\varphi(t)$ и ее производные входят в него в первой степени. Описываемая таким уравнением физическая система называется *линейным осциллятором*. Установившееся движение линейного осциллятора под действием синусоидальной внешней силы представляет собой гармоническое колебание с частотой внешнего воздействия и амплитудой, резонансным образом зависящей от частоты этого воздействия (см., например [1]). Поэтому при $\theta_0 \ll 1$ и не слишком слабом трении реакция маятника на синусоидальное воздействие достаточно хорошо описывается резонансной кривой линейного осциллятора. При неизменной амплитуде внешней силы отклик осциллятора максимален, если ее частота совпадает с собственной частотой осциллятора.

Когда же амплитуда внешнего момента не мала и/или трение достаточно слабое, резонансная кривая маятника изги-

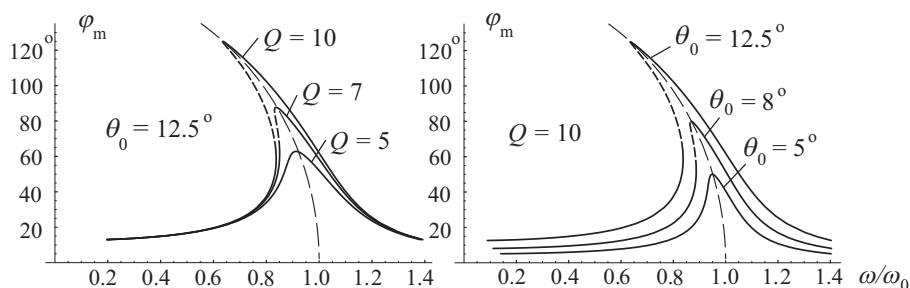


Рис.1. Приближенные теоретические резонансные кривые для маятника при постоянной угловой амплитуде внешнего воздействия $\theta_0 = 12,5^\circ$ и при постоянной добротности $Q = 10$

баются в сторону меньших частот, как показано на рис. 1.

Приближенную теоретическую резонансную кривую для маятника можно получить на основе следующего эвристического подхода [2]: берется выражение для резонансной кривой линейного осциллятора, и в него в качестве ω_0 подставляется зависящая от амплитуды φ_m частота собственных колебаний маятника $\omega_{\text{res}}(\varphi_m)$. В таком подходе принимается, что вынужденные колебания большой амплитуды по-прежнему, как и для малых амплитуд, остаются почти гармоническими (синусоидальными), но их частота, в отличие от изохронного линейного осциллятора, уменьшается с ростом амплитуды. Для зависимости частоты собственных колебаний маятника от амплитуды $\omega_{\text{res}}(\varphi_m)$ можно воспользоваться известным приближенным выражением $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0(1 - \varphi_m^2/16)$ (см., например [3]). Это так называемая «скелетная» кривая, показанная тонкой штриховой линией на рис. 1. Пик резонансной кривой смещается в сторону низких частот и принимает вид, характерный для нелинейных систем с так называемой «мягкой» возвращающей силой. Когда амплитуда внешнего момента превышает некоторое критическое значение (при данной добротности Q), левый склон резонансного пика становится «нависающим». Это значит, что в определенном интервале частот имеется три решения для амплитуды установившихся колебаний. Как мы увидим ниже, такой перегиб резонансной кривой ведет к бистабильности, то есть к существованию двух режимов установившихся колебаний с разными амплитудами при одной и той же частоте и амплитуде внешнего воздействия (третье, промежуточное значение амплитуды соответствует неустойчивому режиму).

Традиционный способ изучения резонансных явлений заключается в медленном изменении частоты внешнего воздействия (как говорят, «сканировании» частоты) без прерывания процесса вынужденных колебаний. При этом амплитуда внешнего воздействия поддерживается

неизменной, в то время как частота проходит через пик резонансной кривой с одного его склона на другой. В отличие от линейного осциллятора, для которого каждому значению частоты возбуждения соответствует определенная амплитуда, маятник демонстрирует гистерезисное поведение: когда при сканировании частота проходит через область сосуществования нескольких режимов, амплитуда установившихся колебаний изменяется скачкообразно, причем эти скачки («срывы» амплитуды) происходят при разных значениях частоты в зависимости от направления сканирования.

На рис. 2 показана резонансная кривая маятника, полученная в результате моделирования. Моделирование начинается со стороны низких частот внешнего воздействия при так называемых нулевых начальных условиях – маятник покоится в положении равновесия. Через некоторое время устанавливаются колебания малой амплитуды, происходящие практически в одинаковой фазе с синусоидальным внешним моментом. Затем производится медленное сканирование по следующему алгоритму: частота увеличивается скачком на малую величину, и программа ждет, пока не закончится переходный процесс и не установятся колебания неизменной

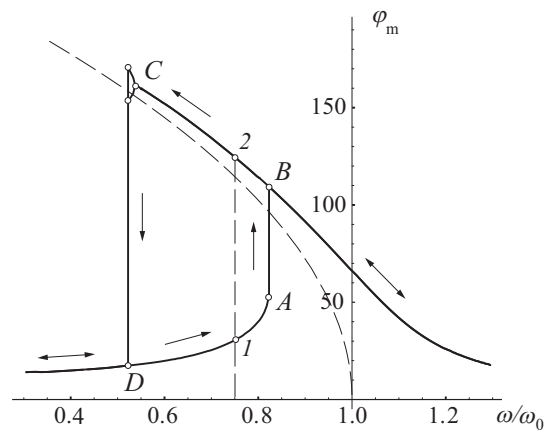


Рис. 2. Гистерезисное поведение амплитуды установившихся вынужденных колебаний маятника при медленном сканировании частоты внешнего воздействия слева направо и затем справа налево ($\theta_0 = 12,5^\circ$, $Q = 10$)

амплитуды. Только после установления амплитуды вынужденных колебаний соответствующие значения амплитуды и фазы регистрируются, и производится очередное малое увеличение частоты внешнего момента. Сначала амплитуда ведет себя в полном соответствии с теоретическими предсказаниями: установившиеся колебания маятника происходят в фазе с изменениями вынуждающей силы, а их амплитуда постепенно растет, пока частота приближается к точке *A*, в которой касательная к теоретической кривой становится вертикальной. Здесь режим вынужденных колебаний теряет устойчивость и происходит резкий скачок в точку *B*, лежащую на правом склоне резонансного пика.

«Скачкообразный» переходный процесс из *A* в *B* («срыв» амплитуды) фактически представляет собой весьма длительные затухающие биения, при которых амплитуда поочередно возрастает и убывает, пока не установится ее значение, достаточно точно совпадающее с теоретическим, соответствующим данной частоте на правом склоне резонансной кривой. После такого скачка амплитуда и фаза ведут себя снова в полном согласии с предсказаниями теории: при дальнейшем росте частоты амплитуда установившихся колебаний постепенно уменьшается, а маятник совершает колебания почти в противофазе по отношению к изменениям внешней

силы. Рисунок на третьей странице обложки журнала дает представление о том, как моделирующая программа демонстрирует поведение маятника при сканировании частоты внешнего воздействия.

После обращения направления сканирования частоты отклик маятника на обратном пути следует той же самой теоретической кривой вплоть до точки *B*. Но теперь вместо скачка вниз амплитуда продолжает расти вдоль правого склона теоретического резонансного пика и после прохождения точки *B*, то есть пропадает однозначное соответствие между внешним воздействием и реакцией маятника на него. На рис. 3 показан пример такой *бистабильности*. При сканировании частоты слева направо установившиеся колебания в точке 1 имеют почти синусоидальную форму (кривые $\varphi_1(t)$ и $\dot{\varphi}_1(t)$ на рис. 3) и происходят в одинаковой фазе с внешним моментом $N(t)$, но на обратном пути в точке 2, при той же самой частоте и амплитуде внешнего момента, что и в точке 1, амплитуда колебаний гораздо больше, и они отстают от $N(t)$ по фазе более чем на четверть периода. Эти колебания по форме сильно отличаются от гармонических: график $\dot{\varphi}_2(t)$ имеет пилообразную форму, а график $\varphi_2(t)$, хотя и напоминает синусоиду, в действительности образован чередующимися сегментами почти параболической формы.

Установившимся периодическим колебаниям соответствует замкнутая траектория на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, называемая *предельным циклом*. Точки фазовой траектории, соответствующие состоянию маятника в начале каждого цикла возбуждения, называются *сечениями Пуанкаре*. Если период установившихся колебаний равен одному циклу внешнего воз-

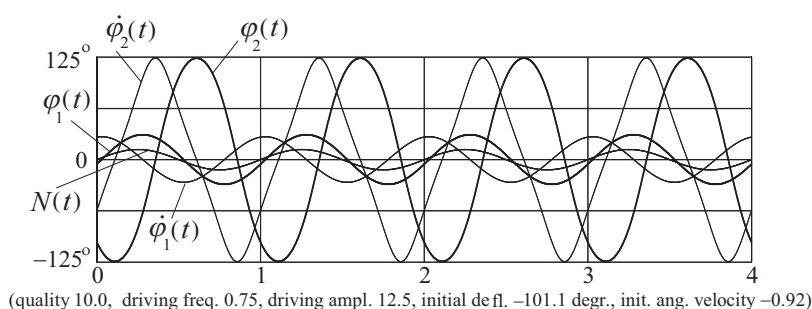


Рис. 3. Графики угла отклонения и угловой скорости для установившихся вынужденных колебаний малой амплитуды (30°) и большой амплитуды (125°) при одних и тех же параметрах маятника и внешнего момента ($\omega = 0,75\omega_0$, $\theta_0 = 12,5^\circ$, $Q = 10$).

Начальные условия указаны для колебаний большой амплитуды.

Графики соответствуют точкам 1 и 2 на рис. 2

буждения, фазовая траектория замыкается после каждого витка, и все сечения Пуанкаре в точности ложатся друг на друга, то есть сливаются в одну точку на фазовой плоскости.

Предельный цикл представляет собой *аттрактор* данного режима – к нему стягиваются разные фазовые траектории. Область начальных состояний на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, приводящих к определенному режиму, называется *бассейном притяжения* соответствующего аттрактора. Все фазовые траектории, начинающиеся в любой точке бассейна притяжения некоторого периодического аттрактора, асимптотически приближаются к этой замкнутой кривой.

Каждый из установившихся режимов 1 и 2 характеризуется определенным бассейном притяжения. Колебания большой амплитуды, соответствующие точке 2 на рис. 2, можно получить не только в результате сканирования частоты справа налево, как описано выше, но также и выбором начальных условий $\varphi(0)$ и $\dot{\varphi}(0)$ в пределах бассейна притяжения данного режима. Легко понять (и проверить экспериментально), что у режима 2 больших колебаний бассейн притяжения гораздо меньше, чем у режима 1 колебаний малой амплитуды.

3.1. РЕЗОНАНС В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ И «РЕЖИМ ЗВОНАря»

По мере обратного сканирования в сторону низких частот, как видно из рис. 2, амплитуда возрастает почти вдоль скелетной кривой и может достигать значений, значительно превышающих теоретический максимум (см. рис. 1). В случае слабого трения амплитуда установившихся колебаний на низкой частоте может стать очень большой (приближающейся к 180°) при умеренных и даже малых амплитудах вынуждающего внешнего момента.

Графики на рис. 4 дают пример таких колебаний необычайно большого размаха. Американский физик Петерс [4] дал им образное название «режим звонаря в колокол»: маятник сравнительно быстро проходит через нижнее положение равновесия, но надолго «застревает» вблизи максимальных отклонений в окрестности верхнего (перевернутого) положения неустойчивого равновесия (вблизи седловых точек в фазовой плоскости).

Эти вынужденные колебания большой амплитуды дают пример резонанса в нелинейной системе: их период T (равный периоду вынуждающей силы $2\pi/\omega$) очень близок к периоду собственных колебаний той же амплитуды. При больших амплитудах период собственных колебаний может составлять несколько периодов T_0 собственных колебаний малой амплитуды ($T_0 = 2\pi/\omega$). Вынужденные колебания в условиях нелинейного резонанса очень похожи на собственные колебания столь же большой амплитуды. Чтобы подчеркнуть это сходство, на рис. 4 показан также график угловой скорости $\dot{\varphi}_{\text{nat}}(t)$ для собственных ($\theta_0 = 0$) незатухающих колебаний такой же амплитуды (около 168°).

Отмеченным сходством «режима звонаря» с собственными незатухающими колебаниями можно воспользоваться для теоретической оценки амплитуды установившихся резонансных вынужденных колебаний при заданной частоте внешней силы. В статье [5] показано, что период несинусоидальных собственных колебаний ма-

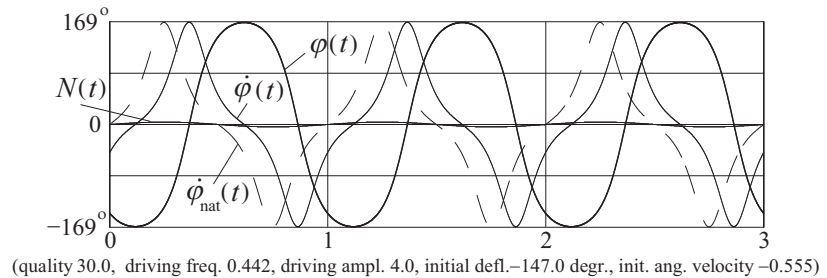


Рис. 4. Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для «режима звонаря».

Для сравнения приведен также график $\dot{\varphi}_{\text{nat}}(t)$ для собственных ($\theta_0 = 0$) колебаний такой же амплитуды (около 168°) в отсутствие трения

маятника с амплитудой φ_m приближающейся к 180° зависит от амплитуды следующим образом:

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m}, \text{ откуда}$$

$$\varphi_m = \pi - 8 \exp\left(-\frac{\pi \omega}{2 \omega_0}\right). \quad (2)$$

В моделировании, представленном на рис. 4 вынуждающая частота $\omega = 0,442\omega_0$. Подставляя это значение в уравнение (2), находим амплитуду соответствующих собственных колебаний: $\varphi_m = 167^\circ$. Эта теоретическая оценка очень близка к амплитуде вынужденных колебаний «режима звонаря» ($\varphi_m \approx 168^\circ$), наблюдаемых в моделирующем эксперименте при вынуждающей частоте $\omega = 0,442\omega_0$.

Природа рассматриваемого необычного режима объясняется явлением так называемого «фазового захвата»: когда период вынуждающей силы почти равен периоду собственных колебаний большой амплитуды, при определенных фазовых соотношениях может произойти полная синхронизация между собственными колебаниями и внешней силой. Благодаря такому «захвату» малый внешний момент $N(t)$ на протяжении почти всего периода совпадает по направлению с угловой скоростью маятника $\dot{\varphi}(t)$ (см. рис. 4) и потому сообщает маятнику энергию, необходимую для преодоления трения и поддержания неизменного размаха больших не-

синусоидальных (практически собственных) колебаний.

Можно предложить альтернативное физическое объяснение «режима звонаря», рассматривая движение частицы в пространственно-периодическом потенциальном рельефе, описывающем зависимость потенциальной энергии маятника $U(t)$ от угла отклонения (кривая 1 на рис. 5). Собственным колебаниям большого размаха соответствует периодическое движение частицы в потенциальной яме между двумя соседними барьерами. Действие на маятник периодического внешнего момента можно рассматривать как периодическое «покачивание» потенциального рельефа около начала координат: левый берег ямы, в которой «заперта» частица, слегка поднимается, а правый опускается, когда внешний момент стремится повернуть маятник вправо, и все наоборот спустя половину периода. Кривые 2 и 3 изображают потенциальный рельеф при максимальных положительном и отрицательном значениях внешнего момента соответственно.

Представим себе, что частица в потенциальной яме при движении слева направо медленно взбирается на пологую вершину правого барьера и поворачивает назад приблизительно в тот момент времени, когда рельеф горизонтален (нулевой внешний момент, кривая 1), затем проходит дно потенциальной ямы в тот момент, когда правый барьер достигает своей максимальной высоты (кривая 3). Продолжительность движения частицы туда-обратно в такой непараболической яме зависит от амплитуды, и если эта длительность совпадает с периодом «покачивания» потенциального рельефа, может произойти «фазовый захват», сопровождающийся установлением периодического режима движения. Энергия, необходимая для преодоления трения, поставляется источником, который «покачивает» потенциальный рельеф, то есть периодическим внешним моментом.

В спектре больших колебаний «режима звонаря», помимо фундаментальной гармоники, период которой равен периоду внешнего момента, содержатся также

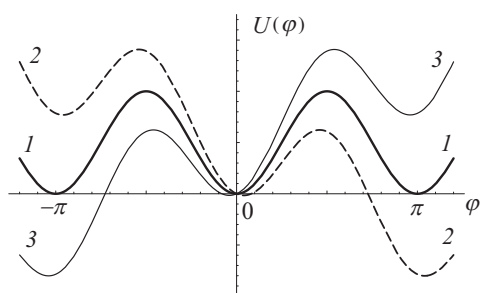


Рис. 5. Графики потенциальной энергии маятника $U(t)$ в отсутствие внешнего момента (кривая 1) и при максимальных положительном и отрицательном значениях внешнего момента (кривые 2 и 3 соответственно)

гармоники высших порядков. Их частоты равны нечетным кратным фундаментальной частоты. На рис. 6 показаны графики угловой скорости $\dot{\phi}(t)$ и ее гармоник.

«Режим звонаря» можно возбудить с самого начала моделирования правильным выбором начальных условий. Однако для постоянного поддержания таких колебаний большого размаха должны быть очень точно выдержаны фазовые соотношения между внешним моментом и колебаниями маятника. Это значит, что бассейн притяжения для «режима звонаря» на фазовой плоскости начальных состояний имеет очень малые размеры. Поэтому в моделирующем эксперименте намного проще возбудить такие колебания не выбором начальных условий, а путем сканирования частоты справа налево, как описано выше.

3.2. БИФУРКАЦИИ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ И УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

При дальнейшем уменьшении частоты возбуждения амплитуда колебаний маятника растет, и начинают проявляться все более заметные расхождения экспериментальных результатов и предсказаний приближенной теории. Интересные особенности в поведении маятника обнаруживаются, когда амплитуда вынужденных колебаний приближается к 180° . Как и должно быть вблизи резонанса, колебания маятника отстают здесь по фазе от внешнего момента примерно на четверть периода. Первая из таких особенностей *бифуркация нарушения симметрии* (точка С на рис. 2): в установившихся колебаниях маятник отклоняется в одну сторону на больший угол, чем в противоположную, например, на 173° против 165° . Эта пространственная асимметрия колебаний нарастает по мере продвижения к меньшим частотам. В спектре таких колебаний наряду с гармониками нечетных порядков появляются четные гармоники неболь-

шой амплитуды, включая составляющую нулевого порядка, характеризующую смещение средней точки колебаний. Асимметричные режимы колебаний существуют парами, фазовые траектории которых (при одинаковых значениях частоты) зеркально симметричны друг другу. Каждый режим имеет свой бассейн притяжения на фазовой плоскости.

На рис. 2 бифуркация нарушения симметрии проявляется в «раздвоении» экспериментальной амплитудно-частотной характеристики после прохождения через точку С. При дальнейшем сканировании, когда частота возбуждения достигает определенного критического значения, происходит *бифуркация удвоения периода*: максимальное отклонение в одну сторону в каждом цикле слегка отличается от предыдущего, но после двух циклов возбуждения воспроизводится точно, так что одному периоду маятника соответствуют два цикла внешнего воздействия. Удвоение периода нарушает исходную симметрию колебаний по отношению к сдвигу во времени: несмотря на то, что внешняя сила в точности повторяет себя в каждом цикле возбуждения, в чередующихся циклах маятник совершает колебания несколько различающегося размаха. Фазовая траектория колебаний удвоенного периода (см. рис. 7) замыкается после двух витков, а сечения Пуанкаре образованы двумя близкими точками на фазовой плоскости, посещаемыми поочередно.

Если на этом этапе эксперимента уменьшить шаг, с которым производится сканирование частоты, то можно наблю-

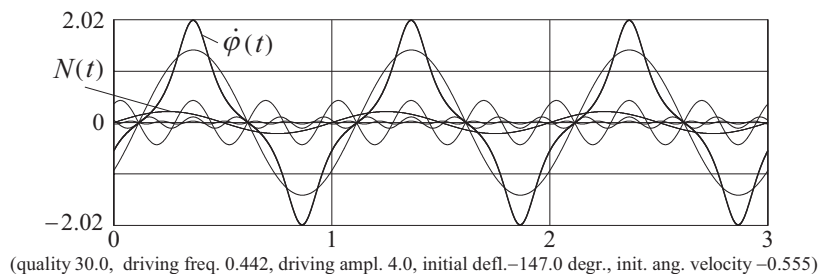


Рис. 6. Графики угловой скорости $\dot{\phi}(t)$ и ее гармоник для вынужденных колебаний маятника в «режиме звонаря»

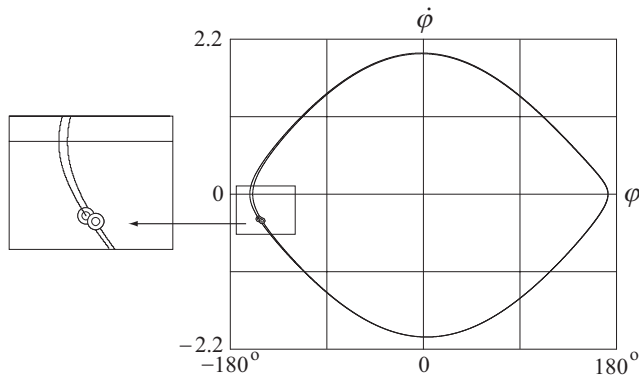


Рис. 7. Фазовая траектория и сечения Пуанкаре для асимметричных колебаний удвоенного периода

дать целый каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаотическому поведению маятника. Хаотичность заключается в том, что в каждом цикле внешнего воздействия максимальное отклонение отличается от некоторого среднего значения на (малую) случайную величину. В отличие от периодических режимов, фазовые траектории которых представляют собой замкнутые кривые (предельные циклы), здесь для каждого периода возбуждения фазовая траектория проходит близко к траекториям предыдущих циклов, но никогда не воспроизводит саму себя. Фазовая траектория режима хаотических колебаний заполняет некоторую область фазовой плоскости, называемую *странным аттрактором*, потому что эта область представляет собой *фрактал* – геометрический объект дробной размерности.

Режим хаотических колебаний с амплитудой около 180° существует в очень узком интервале частот возбуждения. Практически любое малое возмущение (в частности, очередное уменьшение частоты при сканировании) вызывает «кризис», то есть «срыв» маятника в нестационарный режим перехода на нижнюю ветвь резонансной кривой. Такой «срыв» фактически означает полную перестройку режима установившегося вынужденного движения маятника (см. рис. 8). Характер и длительность наблюдаемого в моделировании переходного процесса установления колебаний малой амплитуды, соответствующих нижней ветви, зависит от многих факторов, в частности, от величины шага сканирования частоты.

Начало переходного процесса может иметь вид *перемежаемости*: маятник довольно долго совершает хаотические асимметричные колебания, размах которых, скажем, в левую сторону в среднем больше, чем в правую, а затем за несколько циклов картина меняется на противоположную – длительные колебания с большим размахом в правую сторону. Такая нерегулярная смена режимов происходит несколько раз перед тем, как маятник круто срывается в режим малых колебаний. Иногда такому «срыву» предшествует полный переворот. Приводимый на рис. 8 график показывает несколько последних больших колебаний маятника пред переворотом и «срывом» в режим малых колебаний. При дальнейшем уменьшении частоты внешнего момента от точки *D* (см. рис. 2) значения амплитуды и фазы установившихся колебаний опять хорошо ложатся на теоретические кривые.

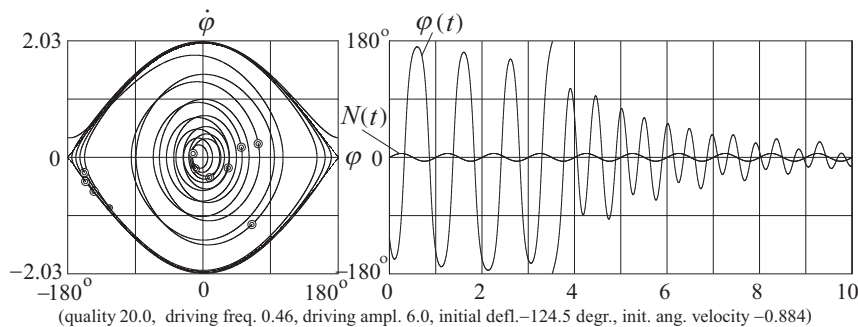


Рис. 8. Фазовая траектория и график $\phi(t)$ для части процесса перехода от нелинейных колебаний большой амплитуды к установившимся вынужденным колебаниям малой амплитуды

шних колебаний маятника пред переворотом и «срывом» в режим малых колебаний. При дальнейшем уменьшении частоты внешнего момента от точки *D* (см. рис. 2) значения амплитуды и фазы установившихся колебаний опять хорошо ложатся на теоретические кривые.

4. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ И СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ

Вынужденные колебания большой амплитуды, напоминающие «режим звонаря», могут происходить также при частоте вынуждающей силы, примерно втрое превышающей частоту собственных колебаний такой же большой амплитуды. Графики на рис. 9 отчетливо показывают, что частота третьей гармоники этих установившихся колебаний совпадает с частотой внешней силы, в то время как частота фундаментальной гармоники втрое меньше. Другими словами, полный цикл колебаний маятника продолжается в течение трех периодов возбуждения. Это пример нелинейного субгармонического резонанса третьего порядка. В линейных системах субгармонические резонансы невозможны.

Как и в «режиме звонаря» (см. рис. 6), поведение маятника при субгармоническом резонансе очень напоминает собственные колебания столь же большой амплитуды. Синусоидальный внешний момент, синхронизированный с третьей гармоникой негармонических собственных колебаний, компенсирует потери энергии из-за трения и поддерживает неизменный размах колебаний. При моделировании такая синхронизация («фазовый захват») может произойти только при условии, что в момент $t = 0$ включения внешней силы собственные колебания большого размаха уже происходят и имеют определенную фазу. Это означает, что при заданной частоте внешнего момента (примерно втрое превышающей частоту собственных колебаний) субгармонический резонанс третьего порядка возбуждается лишь тогда, когда начальные условия выбраны в пределах бассейна притяжения данного предельного цикла. При иных начальных условиях маятник в конце концов приходит в режим противофазных колебаний, период которых равен периоду внешней силы. Эти колебания малой амплитуды соответствуют далекому от

резонанса высокочастотному склону резонансной кривой.

При медленном уменьшении частоты вынуждающей силы в условиях субгармонического резонанса третьего порядка происходит бифуркация нарушения симметрии, в результате которой маятник отклоняется в одну сторону больше, чем в другую. Такие асимметричные режимы существуют парами, фазовые траектории которых зеркально симметричны друг другу. Дальнейшее уменьшение частоты приводит к кризису: после продолжительного переходного процесса маятник приходит в обычный режим почти противофазных колебаний малой амплитуды, соответствующих высокочастотному склону кривой нелинейного резонанса.

При субгармоническом резонансе пятого порядка (см. рис. 10) один цикл колебаний маятника, напоминающих собственные колебания большой амплитуды, покрывает пять периодов возбуждающей силы: внешнее воздействие синхронизировано здесь с пятой гармоникой несинусоидальных собственных колебаний маятника. Благодаря фазовому захвату энергия, передаваемая маятнику, в среднем преобладает над энергией, возвращаемой маятником источнику внешнего возбуждения. Этим обеспечивается компенсация потерь энергии из-за трения и поддерживается неизменный размах колебаний.

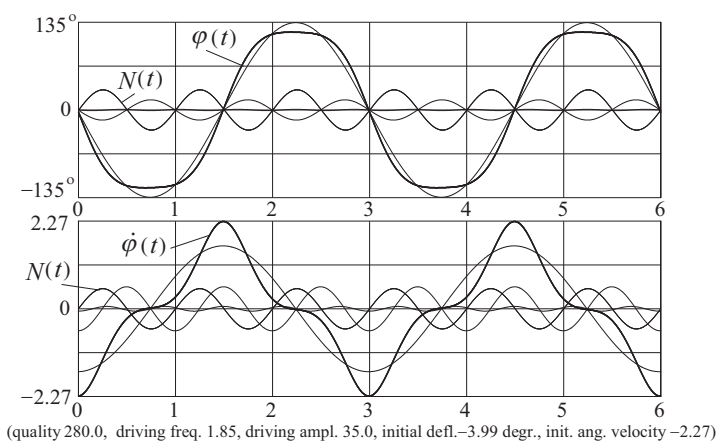


Рис. 9. Графики угла отклонения $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ вместе с графиками гармоник $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ при субгармоническом резонансе третьего порядка

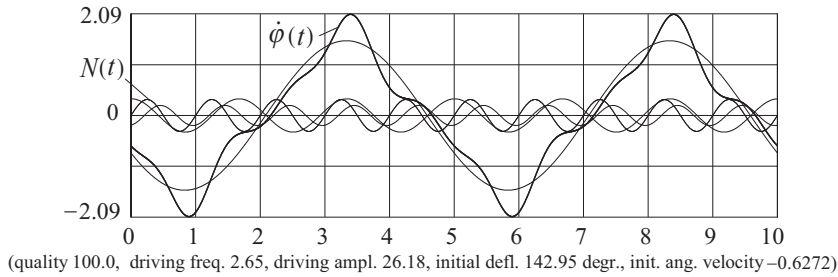


Рис. 10. Графики угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ и ее гармоник при субгармоническом резонансе пятого порядка

При постепенном уменьшении частоты возбуждения непосредственно в процессе колебаний, соответствующих субгармоническому резонансу пятого порядка, можно наблюдать бифуркации нарушения симметрии и утроения периода, в результате которых период установившихся вынужденных колебаний становится равным 15 циклам возбуждения. Сечения Пуанкаре для такого режима образуют пять групп по три близких точки в каждой группе, посещаемые поочередно.

Субгармонические резонансы можно наблюдать при сравнительно высоких частотах возбуждения, в нечетное число раз превышающих частоту собственных колебаний большой амплитуды. *Супергармонические резонансы*, напротив, можно возбудить при сравнительно низких частотах внешней силы: для таких резонансов синхронизация колебаний маятника с возбуждающей силой (фазовый захват) происходит, когда один период возбуждения равен нечетному целому числу периодов соб-

ственных колебаний. На рис. 11 для супергармонического резонанса 3-го порядка показаны фазовая траектория (слева) и графики временной зависимости угла отклонения маятника $\varphi(t)$ и его гармоник вместе с графиком внешнего момента $N(t)$. В целом движение маятника в условиях супергармонического резонанса напоминает собственные колебания около среднего положения, которое медленно смещается поочередно вправо и влево вслед за изменениями внешнего момента. Это особенно хорошо видно при моделировании движения маятника на компьютере. Рис. 11 ясно показывает, что в случае супергармонического резонанса третьего порядка устанавливается вынужденное несинусоидальное колебание, полный период которого равен периоду возбуждения, но на протяжении этого периода совершаются три собственных колебания. Неудивительно, что в спектре супергармонических колебаний третьего порядка значителен вклад третьей гармоники, частота которой близка к собственной частоте маятника.

Возникновение супергармонических резонансов можно пояснить, основываясь на аналогии между колебаниями маятника и движением частицы в потенциальной яме (см. рис. 5), которая медленно перемеща-

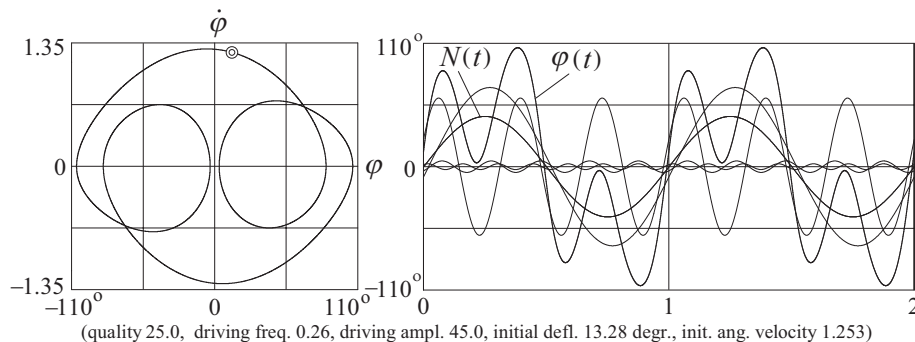


Рис. 11. Фазовая траектория, графики угла отклонения $\varphi(t)$ и его гармоник в установившихся колебаниях при супергармоническом резонансе 3-го порядка, возбуждаемом синусоидальным внешним моментом $N(t)$

ется вправо-влево («покачивается») благодаря внешнему моменту, синусоидально изменяющемуся во времени со сравнительно низкой частотой возбуждения ω . Период движения частицы от одного берега до другого и обратно в непараболической яме зависит от размаха этих колебаний (возрастает с увеличением размаха). При определенной амплитуде частица совершает целое число колебаний в яме на протяжении одного цикла движения потенциальной ямы. В таких условиях возможно установление стационарного режима с полной синхронизацией вынужденного периодического движения потенциальной ямы и собственных колебаний частицы в яме. Благодаря этой синхронизации внешний момент постоянно «подпитывает» маятник энергией, которая необходима для компенсации потерь на трение, то есть для предотвращения затухания короткопериодических собственных колебаний в медленно движущейся туда-обратно потенциальной яме.

Супергармонические резонансы также сопровождаются бифуркациями нарушения симметрии и хаотическими режимами. Примеры странных аттракторов, существующих вблизи супергармонических резонансов третьего и пятого порядков, показаны на рис. 12 *a* и 12 *b* соответственно. Сечения Пуанкаре на фазовых траекториях соответствуют состояниям маятника в начале каждого цикла возбуждения.

Режимы хаотических колебаний и характеризующие их странные аттракторы имеют свои бассейны притяжения на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. Если начальные условия $(\varphi, \dot{\varphi})$ выбраны за пределами этих бассейнов, маятник после переход-

ного процесса приходит в режим периодических ангармонических колебаний с периодом внешней силы. Фазовые диаграммы (предельные циклы) периодических колебаний, существующих при тех же параметрах маятника и внешней силы, что и хаотические режимы вблизи супергармонических резонансов третьего и пятого порядков, показаны в нижней части рис. 12. Сечения Пуанкаре на фазовых траекториях в начале каждого цикла возбуждения ложатся в одну и ту же точку фазовой плоскости, так как в этих режимах состояние маятника воспроизводится после каждого периода вынуждающей силы.

Наблюдение за колебаниями маятника в условиях супергармонических резонансов с помощью моделирующей программы позволяет сформировать интуитивное представление о том, как в нелинейной системе происходит генерация высших гармоник, то есть *умножение частоты* подаваемого на вход чисто синусои-

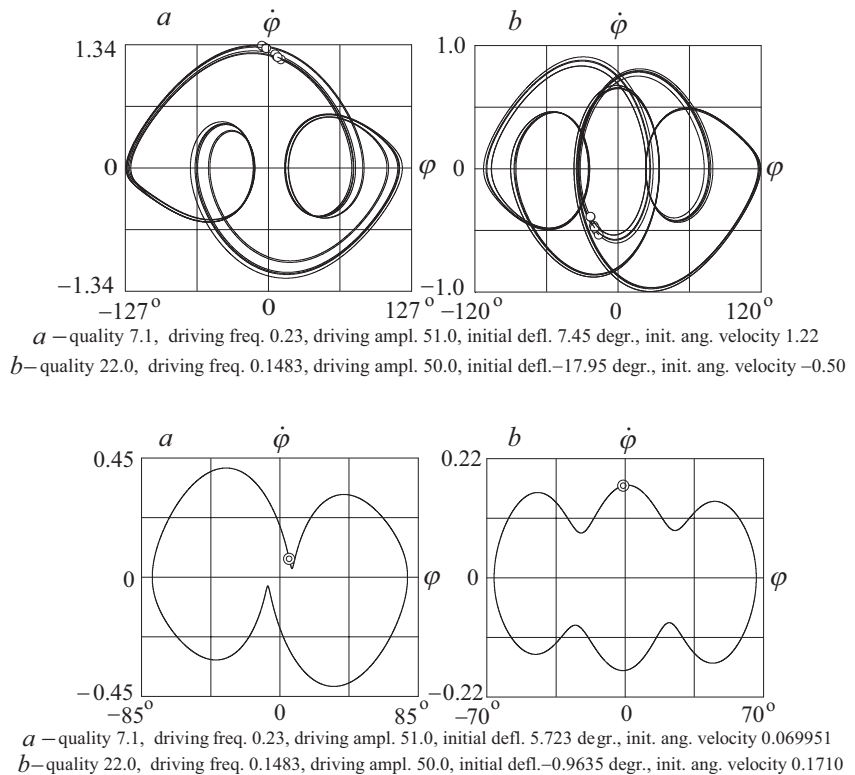


Рис. 12. Фазовые диаграммы с сечениями Пуанкаре для хаотических колебаний в окрестностях супергармонических резонансов третьего (*a*) и пятого (*b*) порядков и для сосуществующих с ними периодических колебаний

дального колебания. Моделирование может рассказать нам об этом явлении намного нагляднее, нежели описывающие его математические уравнения.

Во второй части статьи будет рассказано о других не менее экзотических видах движения обычного маятника, возбуждаемых действием периодической внешней силы с синусоидальной зависимостью от времени.

Рис. 13 дает представление о том, как моделирующая программа демонстрирует поведение маятника при сканировании частоты внешнего воздействия.

В верхнем и нижнем окнах в левой части экрана программа сначала строит аналитическую зависимость амплитуды и фазы установившихся колебаний на ос-

нове приближенной теории, учитывающей ангармонические члены в дифференциальном уравнении маятника. Резонансный пик искривляется в соответствии с характером скелетной кривой, показывающей зависимость частоты собственных колебаний маятника от амплитуды. Когда амплитуда внешнего воздействия превосходит некоторое критическое значение, появляется область, в которой каждому значению частоты соответствуют три значения амплитуды. При постепенном увеличении частоты, когда касательная к резонансной кривой становится вертикальной, наступает кризис, то есть «срыв» амплитуды (скачкообразное возрастание амплитуды с переходом на правый склон резонансной кривой). При сканировании частоты в обратном направлении «срыв»

на нижнюю ветвь происходит при меньшей частоте и при большем значении амплитуды (вблизи максимума резонансной кривой). Скачки на амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиках означают длительную перестройку режима установившегося вынужденного движения маятника. Моделирование колебаний с одновременным построением фазовой траектории (под изображением маятника) позволяет наблюдать перестройку режима колебаний во всех деталях и дает представление о сложном характере переходного процесса, сопровождающего скачки амплитуды и фазы.

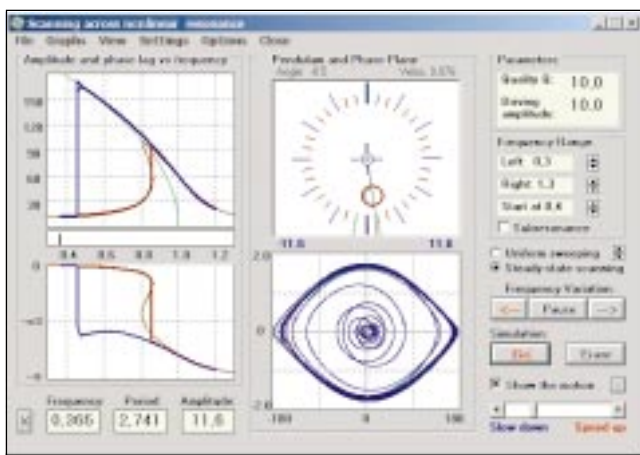


Рис. 13. Гистерезисное поведение амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний маятника при медленном сканировании частоты возбуждения

Литература

1. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика для углубленного изучения. Т. 1. Механика. М.–СПб.: «Физматлит», 2000.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика (Курс теоретической физики. Т. 1). М.: «Наука», 1988.
3. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (Берклиевский курс физики. Т. 1). М.: «Наука», 1971.
4. Randall D. Peters. Resonance response of a moderately driven rigid planar pendulum. Am. Journ. of Physics, 1996. С. 170–173.
5. Butikov E.I. The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model. Eur. J. Phys, 1999. С. 429–441.



Наши авторы, 2008.
Our authors, 2008.

Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ.