

---

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

**Е. И. Бутиков**

**Комментарии к лекциям по физике**  
**Механика (1 семестр)**

Для студентов физического факультета

Санкт-Петербург

2008

---

---

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение. Принципы классической механики</b>	<b>6</b>
1.1	Введение. Задачи курса общей физики . . . . .	6
1.2	Эксперимент и теория в физике. Эвристическая сила физической теории . . . . .	7
1.3	Границы применимости физических теорий . . . . .	8
1.4	Границы применимости классической механики и принцип соответствия . . . . .	9
1.5	Абстракции классической физики . . . . .	10
1.6	Физика и математика. Физические модели . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Пространство и время. Кинематика материальной точки</b>	<b>14</b>
2.1	Механическое движение. Пространство и время . . . . .	14
2.2	Основные понятия кинематики материальной точки . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Основы классической динамики</b>	<b>19</b>
3.1	Законы динамики и принцип относительности . . . . .	19
3.2	Второй закон Ньютона и инертная масса . . . . .	20
3.3	Третий закон Ньютона и взаимодействие тел . . . . .	22
3.4	Прямая и обратная задачи динамики . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Физические величины и системы единиц</b>	<b>26</b>
4.1	Физические величины и физические законы . . . . .	26
4.2	Системы единиц . . . . .	27
4.3	Метод анализа размерностей . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Предпосылки и постулаты частной теории относительности</b>	<b>34</b>
5.1	Постулаты теории относительности . . . . .	34
5.2	Преобразования Галилея . . . . .	35
5.3	Принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Релятивистская кинематика</b>	<b>38</b>
6.1	Одновременность событий . . . . .	38
6.2	Измерение расстояний . . . . .	39
6.3	Относительность одновременности . . . . .	40
6.4	Преобразование промежутков времени . . . . .	41
6.5	Преобразование пространственных расстояний . . . . .	42
6.6	Релятивистский эффект Доплера . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Преобразования Лоренца и следствия из них</b>	<b>46</b>
7.1	Преобразования Лоренца . . . . .	46
7.2	Следствия преобразований Лоренца . . . . .	48
7.3	Относительная скорость разлетающихся частиц . . . . .	50

<b>8</b>	<b>Пространственно-временной интервал между событиями. Пространство-время Минковского</b>	<b>53</b>
8.1	Пространственно-временной интервал между событиями . . . . .	53
8.2	Классификация интервалов . . . . .	54
8.3	Пространство-время и геометрия Минковского . . . . .	55
8.4	Диаграммы Минковского и системы отсчета . . . . .	57
8.5	Преобразование масштабов на диаграммах Минковского . . . . .	59
8.6	Четырехмерные векторы . . . . .	61
<b>9</b>	<b>Основы релятивистской динамики</b>	<b>64</b>
9.1	Принцип соответствия и релятивистский импульс . . . . .	64
9.2	Релятивистская энергия . . . . .	67
9.3	Пропорциональность массы и энергии . . . . .	68
9.4	Преобразование энергии-импульса . . . . .	71
9.5	Простые задачи релятивистской динамики . . . . .	72
<b>10</b>	<b>Движение в полях тяготения. Космическая динамика</b>	<b>74</b>
10.1	Введение . . . . .	74
10.2	Круговая скорость и скорость освобождения . . . . .	75
10.3	Свойства кеплеровых орбит . . . . .	76
10.4	Момент импульса и секториальная скорость . . . . .	79
10.5	Годограф вектора скорости при кеплеровом движении . . . . .	80
10.6	Дополнение: Аналитический вывод 1-го закона Кеплера . . . . .	81
<b>11</b>	<b>Свободное вращение симметричного волчка</b>	<b>87</b>
11.1	Главные оси инерции тела . . . . .	87
11.2	Векторы момента импульса и угловой скорости свободного вращения симметричного волчка . . . . .	89
11.3	Геометрическая интерпретация свободной прецессии . . . . .	90
11.4	Угловая скорость прецессии . . . . .	92
<b>12</b>	<b>Прецессия и нутация гироскопа</b>	<b>96</b>
12.1	Вынужденная прецессия волчка в поле тяжести . . . . .	96
12.2	Нутация оси гироскопа . . . . .	100
12.3	Прецессия вместе с нутацией . . . . .	102
12.4	Прецессия земной оси . . . . .	105
<b>13</b>	<b>Силы инерции и тяготение. Принцип эквивалентности</b>	<b>107</b>
13.1	Неинерциальные системы отсчета и силы инерции . . . . .	107
13.2	Силы инерции и силы тяготения . . . . .	108
13.3	Пропорциональность инертной и гравитационной масс . . . . .	109
13.4	Принцип эквивалентности . . . . .	109
13.5	Принцип эквивалентности и невесомость . . . . .	110
13.6	Релятивистская теория тяготения . . . . .	111
13.7	Эйнштейновская и ньютоновская теории тяготения . . . . .	112

<b>14 Собственные колебания осциллятора. Затухание колебаний при вязком и сухом трении</b>	<b>114</b>
14.1 Модель линейного осциллятора . . . . .	114
14.2 Неколебательное движение системы . . . . .	118
14.3 Превращения энергии при колебаниях . . . . .	121
14.4 Осциллятор с сухим трением . . . . .	123
<b>15 Вынужденные колебания осциллятора при синусоидальном внешнем воздействии</b>	<b>128</b>
15.1 Введение . . . . .	128
15.2 Модель физической системы . . . . .	129
15.3 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний . . . . .	130
15.4 Установившиеся вынужденные колебания . . . . .	131
15.5 Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур . . . . .	135
15.6 Переходные процессы . . . . .	136
15.7 Переходные процессы вблизи резонанса . . . . .	140
15.8 Переходные процессы вдали от резонанса . . . . .	142
<b>16 Собственные колебания нелинейных систем (на примере маятника)</b>	<b>144</b>
16.1 Введение. Физическая система . . . . .	144
16.2 Фазовый портрет маятника . . . . .	146
16.3 Лимитационное движение маятника . . . . .	152
16.4 Средние значения потенциальной и кинетической энергий . . . . .	156
16.5 Влияние трения на фазовый портрет маятника . . . . .	157
<b>17 Параметрическое возбуждение колебаний</b>	<b>158</b>
17.1 О классификации колебаний . . . . .	158
17.2 Особенности параметрического резонанса . . . . .	159
17.3 Порог параметрического возбуждения . . . . .	161
17.4 Дифференциальное уравнение параметрических колебаний . . . . .	163
17.5 Частотные интервалы параметрической неустойчивости . . . . .	165
17.6 Параметрические колебания при плавной модуляции . . . . .	167
<b>Приложение. Программа курса общей физики (Механика, 1 семестр)</b>	<b>171</b>

# 1 Введение. Принципы классической механики

## Содержание темы

Введение. Место физики среди естественных наук. Соотношение эксперимента и теории в физике. Опыт как источник знаний и критерий истины. Эвристическая сила физических теорий. Границы применимости физических теорий. Принцип соответствия. Абстракции классической механики. Абсолютизация физического процесса (независимость от средств наблюдения) и возможность неограниченной детализации его описания. Соотношения неопределенностей и границы применимости классического описания. Роль математики в физике. Физические модели и абстракции.

## 1.1 Введение. Задачи курса общей физики

Основные задачи курса общей физики — дать представление о физике в целом и заложить основы будущей профессии, т. е. обеспечить студенту необходимую подготовку для сознательного выбора своей узкой специализации и последующего ее изучения. Но в первую очередь курс физики должен способствовать формированию естественнонаучного мировоззрения, т. е. создать целостную *физическую картину мира*. Место физики в общечеловеческой культуре лучше всего можно выразить словами выдающегося физика современности, лауреата Нобелевской премии Р. Фейнмана: «Физическое представление о мире составляет сейчас главную часть истинной культуры нашей эпохи.»

Естественнонаучное мировоззрение необходимо исследователю. Но во всей истории естествознания еще не было примеров, чтобы одного лишь правильного мировоззрения было бы достаточно для построения правильной теории. Истина всегда конкретна и не может быть угадана из общих рассуждений. Поэтому прогресс научного мировоззрения следует за прогрессом самой науки.

Физика занимает особое место среди естественных наук, т. е. наук о природе. Ведущая роль физики в современном естествознании определяется несколькими факторами. Во-первых, физика составляет фундамент всех других естественных наук. Действительно, в основе всех явлений — химических, биологических, геологических, астрономических и т. п. — лежит в конечном счете взаимодействие частиц и полей, изучаемых в физике. Во вторых, бесконечность процесса постижения истины в физике диалектически сочетается с установлением окончательных, неизменных законов природы, действующих в определенных областях. В физике это общее положение формулируется как *принцип соответствия*: ньютоновская механика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика — все они, каждая в своей области, окончательны. Каждая физическая теория, прошедшая достаточно серьезную проверку экспериментом, адекватно описывает определенный круг явлений. Любая новая теория, приходящая ей на смену, должна приводить к тем же самым результатам в пределах границ применимости старой теории.

## 1.2 Эксперимент и теория в физике. Эвристическая сила физической теории

Как и все другие естественные науки, т. е. науки о природе, физика основывается на экспериментально установленных фактах. Опыт, эксперимент составляет *источник знаний* — в нем таятся намеки на физические законы. По словам Пуанкаре, «наука состоит из фактов подобно тому, как здание состоит из кирпичей. Но простое нагромождение фактов похоже на науку не более, чем груда кирпичей на дом. Ученый должен систематизировать факты.» Как только ставится вопрос о взаимосвязи явлений, мы вступаем в область теории. Теория должна объединить, объяснить разрозненные экспериментальные факты с единой точки зрения, основываясь на более или менее непосредственно проверяемых гипотезах. Сделанные теорией предсказания должны допускать опытную проверку. На этом этапе опыт выступает как *критерий истины*, критерий правильности физической теории.

Очень важно ясно представлять себе соотношение эксперимента и теории в физике. При изучении теоретической физики у студента может сложиться впечатление, что все известные физические законы могут быть чисто логически «выведены» или доказаны на основе некоторых общих принципов. Но сколь бы абстрактными ни казались эти принципы и гипотезы, теория берет их в конечном счете только из опыта. Лежащие в основе любой теории принципы по сути дела представляют собой сформулированное в концентрированной форме обобщение большого числа экспериментальных фактов. Основой общих физических законов не могут служить абстрактные логические рассуждения — такой основой могут быть только опытные факты.

Как уже было отмечено, теория дает для огромного экспериментального материала логическое упорядочение. Но, помимо соединения разрозненных экспериментальных фактов в единую картину, хорошая теория должна обладать способностью делать определенные новые утверждения, предсказывать новые факты, допускающие последующую проверку путем эксперимента. Это требование к теории можно сформулировать так: хорошая физическая теория должна обладать *эвристической силой*.

В качестве иллюстрации высказанных положений можно привести пример из истории физики. К середине 19 века трудами Эрстеда, Ампера и особенно Фарадея был накоплен обширный экспериментальный материал о связи электрических и магнитных явлений. Опираясь на него, Максвелл сформулировал свои знаменитые уравнения, лежащие в основе электродинамики. Все известные до Максвелла законы электричества и магнетизма могут быть «выведены» из этих уравнений. Однако с полной уверенностью можно сказать, что сформулировать эти уравнения было возможно, только опираясь на экспериментально открытые Кулоном, Эрстедом, Ампером и Фарадеем законы. Но теория Максвелла не ограничилась приведением этих законов в стройную систему. На основе своих уравнений Максвелл предсказал новое явление — электромагнитные волны. В этом предсказании проявилась эвристическая сила электродинамики. Впоследствии электромагнитные волны были экспериментально получены Герцем. Открытием электромагнитных волн мы, безусловно, обязаны теории Максвелла, но сама эта теория была бы невозможна без предшествовавших ей экспериментальных открытий. Правда, в реальной жизни часто все происходит далеко не так гладко, как в хрестоматийных

примерах. Чтобы развивать теорию, нужны новые эксперименты, но чтобы знать, какие для этого требуются эксперименты, необходима теория.

### 1.3 Границы применимости физических теорий

Когда теория выдерживает одну проверку, перед ней возникает очередная задача — сделать следующее предсказание, так что открываются все новые способы проверки теории. В случае противоречия между следствиями теории и опытом теория должна быть отвергнута, но в случае совпадения следствий теории с опытом теорию нельзя считать доказанной. Окончательно «доказанных» теорий не существует — их существование означало бы конец прогресса в науке. Как это ни парадоксально, именно экспериментальное опровержение существующей теории означает, что мы находимся на пороге нового открытия — обнаруженное противоречие оказывается существенным фактором научного прогресса.

Но как быть с теорией, которая многократно проверялась и перепроверялась на опыте, а в один прекрасный день оказалась опровергнутой? Во что превращается такая теория? Если теория прошла достаточно серьезную проверку экспериментом, можно с уверенностью утверждать, что существует некоторая область явлений, которая вполне адекватно описывается существующей теорией. Любая новая теория, приходящая на смену старой, в этой области должна приводить к тем же результатам. По сути дела, это вопрос о *границах применимости* теории. Все физические теории в этом смысле являются ограниченными. Принцип соответствия требует, чтобы новая теория с более широкой областью применимости сводилась к старой теории в пределах границ ее применимости.

В качестве примера можно привести с этой точки зрения ньютоновскую теорию тяготения. За два с лишним века ее существования эта теория, как никакая другая, подвергалась бесчисленным испытаниям, проверкам и перепроверкам, и каждый раз подтверждалась с почти непостижимой степенью точности. Подлинным триумфом теории тяготения было открытие планеты Нептун. В первой половине 19 века было установлено, что планета Уран движется не в полном соответствии с законом тяготения. Странным образом она то ускоряла, то замедляла свое движение на малую, но вполне заметную величину, что не могло быть объяснено на основе известных тогда свойств солнечной системы. В 1846 году Леверрье во Франции и Адамс в Англии независимо друг от друга пришли к выводу, что аномалии в наблюдаемом движении Урана можно объяснить, предположив существование новой планеты, обладающей определенной массой и определенной орбитой, внешней по отношению к орбите Урана. Берлинский астроном Галле обнаружил новую планету (ее назвали Нептун) после всего лишь получасового поиска. Положение этой планеты отличалось от расчетного менее чем на один угловой градус.

Но все многочисленные проверки не смогли уберечь теорию от того, что она в конце концов оказалась опровергнутой. На смену ей пришла эйнштейновская теория тяготения, основанная на экспериментально установленном факте пропорциональности инертной и гравитационной масс. Эта теория предсказала новые эффекты — движение перигелия Меркурия и отклонение луча света в поле тяготения Солнца — которые были проверены в чрезвычайно тонких и точных экспериментах. Реально несостоятельность ньютоновской теории тяготения означает лишь то, что мы не вправе ожидать от нее исчерпывающего объяснения во всех слу-

чаях. Но в тех пределах, где ньютоновская теория выдержала грандиозную серию проверок, эйнштейновская теория тяготения (гораздо более сложная) сводится к ньютоновской, и в этих пределах нет никакого смысла использовать какую-либо более сложную теорию, чем ньютоновская. Основанные на ней расчеты предсказывают положение планет, согласующиеся с результатами наблюдений в пределах нескольких угловых секунд даже в тех случаях, когда производится экстраполяция на многие годы. Но в то же время ясное понимание границ применимости теории Ньютона приводит к необходимости отказаться от нее не только в тех случаях, когда есть возможность выполнить очень точные измерения, но и тогда, когда необходимо достичь более глубокого понимания явления тяготения в целом. Релятивистская теория тяготения не только имеет более широкую область применимости, но и построена на принципиально иных концептуальных основах. Включение в теорию новых концепций создает важные предпосылки для дальнейшего развития.

#### 1.4 Границы применимости классической механики и принцип соответствия

Коротко о границах применимости классической ньютоновской механики можно сказать так: классическая (нерелятивистская) механика адекватно описывает *сравнительно медленные движения макроскопических тел*. Однако здесь требуются дополнительные разъяснения.

Заложенная Ньютоном основа физической картины мира в почти неприкосновенном виде просуществовала вплоть до начала XX столетия. Существенные изменения в мировоззрении физиков произошли лишь после создания Эйнштейном современной физической теории пространства и времени (частная теории относительности, 1905), а затем релятивистской теории тяготения (общая теория относительности, около 1916). Другие ограничения классического способа описания движения материальных тел, связанные с двойственной корпускулярно-волновой природой материи, были установлены в первой четверти XX столетия после появления старой квантовой теории и пришедшей ей на смену квантовой механики. Впрочем, все эти новые физические теории, углубив наше понимание основ мироздания, отнюдь не опровергли классическую динамику, а лишь позволили ясно определить ее *границы применимости*.

Первая из упомянутых выше границ применимости связана с ограничением на скорости тел, описание движений которых возможно на языке классической физики: эти скорости должны быть малы по сравнению со скоростью света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. В нашем непосредственном окружении наибольшая из встречающихся скоростей макроскопических тел — это скорость орбитального движения Земли вокруг Солнца  $v \approx 30$  км/с =  $3 \cdot 10^4$  м/с. Для такого движения указанное ограничение выполняется с большим запасом:  $v/c \approx 10^{-4} \ll 1$ . Поэтому в вопросах, связанных с движением небесных тел, можно найти лишь несколько очень слабых эффектов, лежащих почти на пределе наших экспериментальных возможностей, для объяснения которых требуется выход за рамки классической динамики (прецессия перигелия орбиты Меркурия, составляющая 43 угловых секунды в столетие, и недавно открытое уменьшение периода обращения компонент двойной звездной системы из-за излучения гравитационных волн).



Здесь можно увидеть яркую иллюстрацию общефизического *принципа соответствия*, согласно которому любая новая физическая теория (в данном случае частная теория относительности и эйнштейновская теория тяготения), приходящая на смену старой теории (классической динамике и ньютоновской теории тяготения), должна приводить к тем же результатам в той области, где прежняя теория выдержала экспериментальную проверку.

Действительно, уравнения релятивистской теории тяготения переходят в уравнения классической динамики и ньютоновской теории тяготения, пока скорости, приобретаемые телами под влиянием тяготения, малы по сравнению с скоростью света, т. е. пока гравитационная энергия тела составляет малую часть полной энергии (включающей энергию покоя). В таком случае говорят о слабых гравитационных полях. В Солнечной системе мы имеем дело только со слабым тяготением. Поэтому и в наши дни все расчеты в небесной механике и космической динамике выполняются на основе ньютоновской теории тяготения.

Вторая граница применимости классического способа описания движения, связанная с корпускулярно-волновой природой материи, математически выражается *соотношениями неопределенностей*, впервые сформулированными Гейзенбергом и лежащими в основе современной квантовой теории. В соответствии с соотношениями неопределенностей, частица не может одновременно иметь точные значения координаты и соответствующей проекции импульса: произведение неопределенностей  $\Delta x \cdot \Delta p_x$  не может быть меньше постоянной Планка  $\hbar \approx 10^{-34}$  Дж·с. Для макроскопических тел (т. е. тел, состоящих из большого — порядка постоянной Авогадро  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$  1/моль — числа атомов или молекул) существующие возможности измерения координат и импульсов таковы, что соотношения неопределенностей фактически не накладывают ограничений на применимость классического способа описания движения, в котором состояние частицы задается указанием ее координат и импульсов. Эта возможность связана с малой (в масштабах макроскопического мира) величиной постоянной Планка.

Более того, и при описании движения микрочастиц во многих случаях можно применять классическую механику. Например, при движении электронов в макроскопических вакуумных электронных приборах (таких как ускорители, электронно-оптические преобразователи, электронные микроскопы) неопределенности в координатах и импульсах электронов, определяемые условиями эксперимента, намного больше предельных значений, устанавливаемых соотношениями неопределенностей. Но для движения электрона в атоме классический способ описания совершенно непригоден: если принять в качестве неопределенности координаты величину порядка размера атома, то соответствующая неопределенность в значении скорости электрона, вычисленная из соотношения неопределенностей, оказывается больше, чем сама скорость.

## 1.5 Абстракции классической физики

Описание физического процесса или явления в классической физике основано на использовании ряда абстракций. Прежде всего допускается полная независимость явления от условий и средств его наблюдения. В классической физике предполагается, что всегда можно «подсмотреть» явление, не вмешиваясь в него и не влияя на него. Физический процесс рассматривается как нечто происходящее само по

себе, не зависящее от средств наблюдения за процессом. Квантовая механика показала, что для процессов с микрообъектами (электронами, протонами, атомами и молекулами) в общем случае это не так: возможность наблюдения и выполнения измерений предполагает наличие определенных физических условий, которые могут повлиять на само явление. Пренебрежение таким влиянием средств наблюдения представляет собой абстракцию, которую можно назвать *абсолютизацией физического процесса*.

Использование этой абстракции вполне допустимо при изучении явлений макроскопического масштаба, по отношению к которым воздействие, связанное с наблюдением, практически не играет роли. Абсолютизация таких явлений настолько естественна, что до возникновения квантовой механики никогда явно не оговаривалась. Считалось, что любой физический процесс происходит «сам по себе», что чрезвычайно упрощает его описание.

Другой абстракцией классической физики, тесно связанной с абсолютизацией явлений, является допущение о возможности *неограниченной детализации* их описания. Эта абстракция проявляется, в частности, в используемых классической механикой математических средствах описания движения: протекающая во времени смена состояний характеризуется непрерывными функциями времени. Использование непрерывных функций, например, для координат и импульсов движущейся частицы предполагает существование в каждый момент времени определенных, сколь угодно точных значений этих величин.

Ограниченную применимость классического способа описания, выявленную в квантовой механике, устанавливают соотношения неопределенностей Гейзенберга, согласно которым координата и соответствующая проекция импульса частицы не могут одновременно иметь абсолютно точные значения. Например, локализация частицы (точное измерение ее координат) требует физических условий, неблагоприятных для точного измерения ее импульса, и наоборот, условия, благоприятные для точного измерения импульса, исключают возможность локализации частицы в малой пространственной области. Эти ограничения связаны с двойственной природой микрообъектов, получившей название «корпускулярно-волновой дуализм».

Неравенства Гейзенберга (см. выше раздел «Границы применимости классической механики») дают количественное выражение ограничений применимости этой абстракции, т. е. допущения о возможности неограниченной детализации описания движения. Как уже отмечалось, для макроскопических тел соотношения неопределенностей фактически не накладывают ограничений на применимость классического способа описания движения.

Подробное и очень ясное изложение затронутых здесь вопросов можно найти в книге акад. В. А. Фока «Начала квантовой механики», М. «Наука», 1976 (3-е издание), стр. 9–17.

## **1.6 Физика и математика. Физические модели**

Физика относится к точным наукам, т. е. ее задача состоит в выражении физических закономерностей в количественной форме. Определения количественных характеристик играют в физике ключевую роль. Физические величины — это такие свойства тела, системы или процесса, которые допускают количественное выражение с помощью измерений, т. е. путем сравнения данной физической величин-

ны с определенной величиной того же рода, принятой в качестве единицы измерения. Физика, вскрывая взаимосвязь явлений, дает количественную математическую формулировку этих связей. Математика — это язык физики, язык, специально созданный и развитый для выражения количественных связей, это набор инструментов физической теории. Наиболее общая математическая формулировка изучаемых закономерностей одновременно является и физически наиболее плодотворной.

Измерить физическую величину — это значит выяснить, сколько раз в ней содержится однородная с ней величина, принятая за единицу. Это есть *числовое значение* физической величины. Между разными физическими величинами удается установить объективно существующие соотношения, т. е. установить *физические законы*. Часто эти законы можно представить в форме математических уравнений. Физику называют точной наукой именно потому, что устанавливаемые в физике соотношения между физическими величинами имеют количественную форму. Но следует помнить, что эти соотношения (физические законы), как правило, приближенны и справедливы в ограниченных областях.

В противоположность «чистой» математике, где величины обладают теми свойствами, которые им произвольно приписаны по определению, в физике необходимо открывать объективно существующие свойства физических величин, а не приписывать им свойства по определению. В этом заключается существенное различие понятий и величин, которыми оперируют чистая математика и физика.

У физика, исследующего какое-либо явление, никогда не бывает (и в принципе не может быть) исчерпывающих данных об изучаемом явлении. Характерная особенность науки состоит как раз в том, что она дает возможность описывать главные черты явления, не зная многих деталей, не имея исчерпывающих данных. Когда Ньютон стал заниматься проблемой притяжения Луны Землей, его оппоненты говорили, что решить такую проблему невозможно, поскольку о внутреннем строении Земли почти ничего не известно. Но теория Ньютона работает, т. е. дает в общем правильное описание движения Луны, несмотря на то, что эта теория не учитывает внутреннего строения Земли. В сложных явлениях для выяснения основных причинных связей необходимо отделить главное от второстепенного. Для этого нужны абстракции и физические модели.

При любом исследовании физических явлений необходим обоснованный выбор *физической модели*, т. е. определенная идеализация, при которой следует сохранить наиболее важные черты явления. Примерами физических моделей могут служить материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный газ и т. п. При замене реальной системы или явления некоторой идеализированной моделью производится идеализация не столько свойств реальных систем, сколько условий их движения. Применимость той или иной модели к реальной физической системе определяется прежде всего тем вопросом, на который теория должна дать ответ, а не свойствами самой системы. Очень важно при этом уметь определять необходимую меру математической строгости: бессмысленно стремиться к получению точного решения в рамках достаточно грубой физической модели.

Точный учет всех возможных влияний и взаимосвязей сделал бы неразрешимыми даже самые простые задачи. По образному выражению Я. И. Френкеля, физик-теоретик рисует не точный портрет явления, а скорее карикатуру на него. В приведенном выше примере теория движения Луны, не учитывающая внутрен-

него строения Земли, не может объяснить некоторых тонких деталей. Например, невозможно понять так называемое «вековое» ускорение Луны, которое обусловлено приливным трением на Земле — для этого требуется знание упругих свойств вещества, образующего Землю. Но самые существенные черты движения Луны можно надежно выявить, не зная строения Земли и используя для нее модель материальной точки или абсолютно твердого тела.

## 2 Пространство и время. Кинематика материальной точки

### Содержание темы

Измерения промежутков времени и пространственных расстояний. Современные эталоны времени и длины. Система отсчета. Системы координат. Свойства пространства и времени. Однородность времени. Однородность и изотропность пространства. Классические (нерелятивистские) представления о пространстве и времени — предположения об абсолютном характере одновременности событий, промежутков времени и пространственных расстояний. Соотношение евклидовой геометрии и геометрии реального физического пространства.

Предмет кинематики. Материальная точка как физическая модель. Механическое движение и его описание. Основные понятия кинематики материальной точки. Радиус-вектор. Перемещение. Траектория. Путь. Средняя скорость. Скорость. Вектор скорости как производная радиус-вектора. Направление вектора скорости и траектория. Годограф вектора скорости. Ускорение. Ускорение при криволинейном движении. Центр кривизны и радиус кривизны траектории. Разложение ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие. Координатная форма описания движения.

Число степеней свободы механической системы. Движение при наличии связей. Определение скорости и ускорения по заданной зависимости координат от времени. Определение координат по заданной зависимости скорости от времени. Одномерное криволинейное движение.

### 2.1 Механическое движение. Пространство и время

Механика изучает простейшую форму движения материи — *механическое движение*. Механическое движение состоит в изменении положения тела относительно других тел. Описание механического движения производится в определенной системе отсчета. *Системой отсчета* называют тело (или совокупность неподвижных друг относительно друга тел) вместе с приборами для измерения расстояний и промежутков времени. Тело, условно принимаемое за неподвижное, называют телом отсчета. С телом отсчета можно связать какую-либо систему координат. В физических задачах наиболее употребительны прямоугольные декартовы координаты, сферические и цилиндрические системы координат.

Для реализации системы отсчета прежде всего необходимо ввести по определению некоторые процедуры для измерения пространственных расстояний и промежутков времени. Измерение времени может быть основано на каком-либо естественном процессе. Долгое время в качестве такого периодического процесса выбиралось суточное вращение Земли, и за единицу времени — *секунду* — принималась определенная часть периода этого процесса (средних солнечных суток). Но в действительности суточное вращение Земли не вполне равномерно: в силу ряда геофизических процессов (перемещений больших масс) происходят случайные изменения момента инерции Земли и угловой скорости ее вращения вокруг оси.

Поэтому принятый в настоящее время эталон времени основывается на периоде колебаний, происходящих в атоме изотопа цезия-133. По определению еди-

ница времени *секунда* содержит 9 192 631 770 периодов этих колебаний. Атомы одного и того же изотопа тождественны, поэтому при указанном выборе эталона времени природа предоставляет в наше распоряжение практически неограниченное число совершенно идентичных «часов».

Постоянство скорости света в вакууме (возведенное в теории относительности в ранг одного из основных постулатов) позволяет измерение пространственных расстояний свести к измерению промежутков времени. Для установления основной единицы длины в настоящее время используется тот же самый эталон, что и для единицы времени: по определению *метр* — это длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299\,792\,458$  секунды.

На основе практического опыта измерений расстояний и промежутков времени и изучения механического движения формируются представления о *физическом пространстве* и *физическом времени*. Эти понятия являются фундаментальными, т. е. их нельзя определить через какие-то более простые понятия. Используемые в физике системы отсчета можно рассматривать как некоторые практические реализации соотношений между событиями в пространстве и времени. Каждому событию, независимо от его физического содержания (короткая вспышка света, столкновение двух частиц, распад или рождение частицы и т.п.) можно сопоставить некоторую точку пространства-времени.

На опыте установлены следующие свойства времени и пространства: время одномерно и однородно, физическое пространство трехмерно, однородно и изотропно. *Однородность времени* проявляется в неизменности физических законов с течением времени: любой опыт, поставленный в одинаковых условиях в разное время, дает одинаковые результаты. С однородностью времени связано сохранение энергии. *Однородность* и *изотропность* пространства проявляются в независимости физических явлений в замкнутой (изолированной) физической системе от ее положения и ориентации как целого. С однородностью пространства связано сохранение импульса, с изотропностью пространства — сохранение момента импульса.

Как показывает опыт, для трехмерного физического пространства справедлива евклидова геометрия. Это значит, что аксиомам евклидовой геометрии удовлетворяют установленные на опыте свойства объектов физического пространства, которым сопоставляются соответствующие объекты евклидовой геометрии (например, световым лучам в вакууме сопоставляются прямые линии геометрии).

Используемые в классической механике представления о пространстве и времени сформировались на основе опыта наблюдений за сравнительно медленными движениями макроскопических тел. Согласно классическим представлениям, промежутки времени между событиями и пространственные расстояния между точками абсолютны, т. е. не зависят от системы отсчета. Теория относительности показала приближенный характер этих представлений. Постулируемое в теории относительности существование предельной скорости распространения взаимодействий несовместимо с классическими представлениями об абсолютном характере одновременности пространственно удаленных событий, абсолютном характере времени и пространственных расстояний. Это означает, что применимость классических представлений ограничена областью движений, происходящих со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Подробнее об этом см. в комментариях к теме «Основы теории относительности».

## 2.2 Основные понятия кинематики материальной точки

Задача *кинематики* — математическое описание движения без выяснения его физических причин. Используемые в кинематике физические модели — материальная точка, твердое тело, сплошная среда.

*Материальная точка* — тело, размеры и форма которого не существенны в рассматриваемом движении. Применимость этой модели зависит не столько от размеров самого тела, сколько от условий его движения. В частности, при поступательном движении любое твердое тело можно считать материальной точкой.

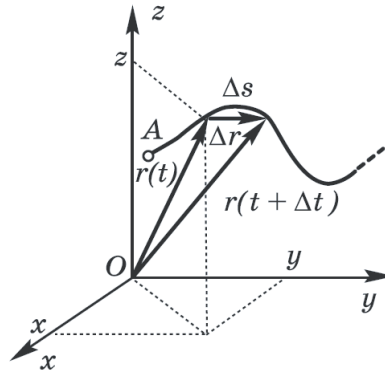


Рис. 1: Радиус-вектор  $\vec{r}$ , координаты  $x, y, z$ , траектория, перемещение  $\Delta\vec{r}$ , путь  $\Delta s$ .

Механическое движение *относительно* — одно и то же движение будет различным в разных системах отсчета. В выбранной системе отсчета пространственное положение материальной точки определяется ее *радиусом-вектором*  $\vec{r}$ , проведенным из начала системы координат. Задание радиуса-вектора  $\vec{r}$  эквивалентно указанию трех чисел, например трех его *проекций*  $x, y, z$  на оси декартовой системы координат (рис. 1).

Число независимых координат, которое необходимо для задания положения механической системы в пространстве, называется *числом степеней свободы* системы. Материальная точка имеет три степени свободы.

При движении радиус-вектор и координаты изменяются с течением времени. Говорят, что задан *закон движения*, если указана определенная непрерывная векторная функция времени  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  или три эквивалентные ей скалярные функции — проекции радиуса-вектора на оси координат  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ .

Линия, описываемая движущейся материальной точкой в пространстве, называется *траекторией*. Движения разделяются на *прямолинейные* и *криволинейные* в зависимости от вида траектории. Представление траектории точки в виде некоторой непрерывной линии связано с абстракцией классической физики о возможности неограниченной детализации описания движения (подробнее об этой абстракции см. в комментарии к теме «Принципы классической механики»).

*Перемещение* точки за промежуток времени  $\Delta t$  — это по определению вектор  $\Delta\vec{r}$ , соединяющий положения точки в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ . Из рис. 1 видно, что  $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$ .

*Путь*  $\Delta s$ , пройденный точкой за тот же промежуток времени  $\Delta t$ , — это длина соответствующего отрезка траектории. При прямолинейном движении в одном

направлении  $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$ , при криволинейном  $\Delta s > |\Delta \vec{r}|$ . Путь  $s(t)$ , пройденный точкой к моменту времени  $t$ , — это длина траектории от некоторого начального положения  $A$ , где точка находилась в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 1), до положения в момент  $t$ . Если точка меняла направление движения по той же траектории, то ее путь  $s$  — это полное пройденное вдоль траектории расстояние.

*Средняя скорость* определяется как вектор, равный отношению перемещения к промежутку времени, в течение которого совершено это перемещение:  $\vec{v}_{\text{cp}} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ . Вектор средней скорости характеризует быстроту, с которой совершается перемещение за определенный промежуток времени  $\Delta t$ .

Для характеристики быстроты движения за конечный промежуток времени наряду с вектором средней скорости  $\vec{v}_{\text{cp}}$  иногда вводят среднюю скорость прохождения пути  $v_s$  (или среднюю скорость движения по траектории) по следующему определению:  $v_s = \Delta s / \Delta t$ . При прямолинейном движении в одном направлении  $|\vec{v}_{\text{cp}}| = v_s$ , при криволинейном движении  $|\vec{v}_{\text{cp}}| < v_s$ , так как длина хорды меньше длины дуги, стягиваемой этой хордой.

*Скорость* (мгновенная скорость) в момент времени  $t$  — предел, к которому стремится средняя скорость при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е. производная от  $\vec{r}(t)$  по  $t$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Мгновенная скорость характеризует быстроту движения точки в данный момент времени или в данной точке траектории. Возможность рассматривать мгновенную скорость материальной точки как производную радиуса-вектора по времени связана с абстракцией классической физики о возможности неограниченной детализации описания движения (подробнее см. в комментарии к теме «Принципы классической механики»). Скорость в каждой точке направлена по касательной к траектории, так как направление касательной — это предельное направление хорды при стремлении к нулю длины хорды. Проекции скорости на оси координат равны производным по времени от соответствующих координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2)$$

*Ускорение* в момент времени  $t$  определяется как производная от  $\vec{v}(t)$  по  $t$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \text{или} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (3)$$

Небольшой участок криволинейной траектории можно аппроксимировать дугой окружности. Чтобы найти положение центра этой окружности и ее радиус, можно построить перпендикуляр к касательной в данной точке траектории, затем еще один перпендикуляр к касательной в некоторой вспомогательной соседней точке траектории. Пересечение этих перпендикуляров приближенно дает положение центра кривизны траектории. Точное положение находится как предельное положение точки пересечения перпендикуляров при неограниченном приближении второй (вспомогательной) точки к данной точке траектории. Положение центра кривизны и радиус кривизны непрерывно изменяются при движении вдоль траектории (лишь в частном случае движения по окружности радиус кривизны и положение центра кривизны остаются неизменными).



Для каждой точки криволинейной траектории можно ввести *единичные векторы*  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$ , направленные соответственно по нормали к траектории (в сторону центра кривизны) и по касательной к траектории. Тогда вектор скорости  $\vec{v}$  в данной точке можно представить в виде  $\vec{v} = v_{\tau}\vec{\tau}$ , где  $v_{\tau}$  — проекция скорости на направление вектора  $\vec{\tau}$ . Эта проекция положительна при совпадении направления движения с направлением вектора  $\vec{\tau}$ , и отрицательна в противном случае. Проекция вектора скорости на направление нормали к траектории равна нулю.

Чтобы найти проекции вектора ускорения на направления касательной и нормали, нужно вычислить производную по времени от вектора скорости  $\vec{v} = v_{\tau}\vec{\tau}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_{\tau}\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt}\vec{\tau} + v_{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (4)$$

Здесь первое слагаемое в правой части — вектор, направленный по касательной к траектории (*тангенциальное ускорение*), второе слагаемое — вектор, направленный по нормали к центру кривизны траектории (*нормальное ускорение*). Можно показать, что  $v_{\tau}(d\vec{\tau}/dt) = (v_{\tau}^2/R)\vec{n}$ , где  $R$  — радиус кривизны траектории в данной точке (рис. 2).

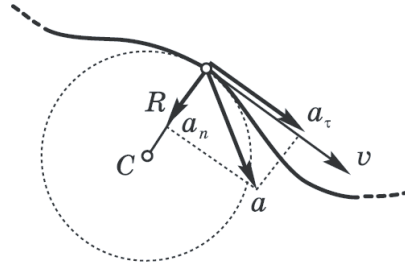


Рис. 2: Разложение ускорения при криволинейном движении на нормальную и тангенциальную составляющие.

Поэтому выражение (4) дает разложение вектора ускорения на две составляющие: тангенциальное ускорение  $\vec{a}_{\tau}$ , направленное по касательной к траектории, и нормальное ускорение  $\vec{a}_n$ , направленное по нормали к центру кривизны траектории (см. рис. 2):

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n = a_{\tau}\vec{\tau} + a_n\vec{n}, \quad a_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt}, \quad a_n = \frac{v_{\tau}^2}{R} = \frac{v^2}{R}. \quad (5)$$

Тангенциальное ускорение  $a_{\tau}$  характеризует быстроту изменения величины скорости (точнее, быстроту изменения проекции скорости на направление касательной), нормальное ускорение  $a_n$  характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.

## 3 Основы классической динамики

### Содержание темы

Основы динамики материальной точки. Первый закон Ньютона и его физическое содержание. Динамическая эквивалентность состояния покоя и движения с постоянной скоростью. Связь закона инерции с принципом относительности. Второй закон Ньютона. Сила и механическое движение. Физическая сущность понятия силы в механике. Силы разной физической природы и фундаментальные взаимодействия в физике. Свойства силы и способы измерения сил. Понятие инертной массы. Способы измерения массы. Физическое содержание второго закона Ньютона. Одновременное действие нескольких сил и принцип суперпозиции. Взаимодействие тел и третий закон Ньютона. Логическая схема законов Ньютона и разные возможности ее построения.

### 3.1 Законы динамики и принцип относительности

Динамика изучает механическое движение тел, используя представление об их взаимодействии. Взаимодействие тел — это причина изменения скорости их движения, т. е. причина ускорения. Ускорение тела, в отличие от его положения и скорости, не может быть задано произвольно: ускорение тела в данный момент не зависит от предшествующего движения тела и определяется положением и движением окружающих тел. Основу динамики составляют три закона Ньютона.

Закон инерции (первый закон Ньютона) связан с постановкой основной задачи динамики — задачи объяснения движения. Движение свободного тела, не подверженного действию других тел (движение «по инерции»), как и покой, рассматривается в динамике как естественное состояние, не требующее причины, не требующее объяснения. В то же время это есть утверждение о том, что в динамике состояние покоя и равномерного движения свободного тела неразличимы, т. е. утверждается *динамическая эквивалентность* состояния покоя и движения с постоянной скоростью.

Свободное движение представляет собой наиболее простую форму движения. Первый закон Ньютона утверждает, что в системе отсчета, связанной со свободным телом, движение любого другого свободного тела будет прямолинейным и равномерным, т. е. будет движением с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , независимо от массы тела, его заряда, магнитного момента и любых других свойств. Это очень общее утверждение, касающееся универсального характера свободного движения, отнюдь не является логической необходимостью (в принципе окружающий нас мир мог бы быть устроен иначе), но оно согласуется со всеми известными наблюдениями за движениями тел в отсутствие сильных гравитационных полей. Фактически это утверждение связывает движение с геометрией физического пространства (прямая — простейшая линия евклидовой геометрии), а также затрагивает геометрические свойства пространства-времени: мировые линии свободных частиц (т. е. геодезические линии в четырехмерном пространстве-времени) представляют собой прямые линии. Подробнее об этом см. в комментариях к теме «Основы теории относительности».

Свободных тел, не подверженных воздействию со стороны других тел, строго

говоря, не существует. Однако благодаря убыванию всех известных взаимодействий с увеличением расстояния между телами такое тело можно реализовать на опыте с любой требуемой точностью.

По современным представлениям, основное содержание первого закона Ньютона заключается в утверждении о существовании особого класса систем отсчета, в которых законы механического движения выглядят наиболее просто — так называемых *инерциальных систем*. Подчеркнем еще раз, что существование таких систем не является логической необходимостью, а представляет собой обобщение опытных фактов. Опыт показывает, что *гелиоцентрическая система отсчета* (система, связанная с Солнцем и «неподвижными» звездами) может рассматриваться как инерциальная в рамках достижимой в настоящее время точности измерений. Любая система отсчета, движущаяся относительно гелиоцентрической без ускорения, также является инерциальной.

Закон инерции теснейшим образом связан с *принципом относительности* — полным равноправием (физической эквивалентностью) всех инерциальных систем отсчета. Эквивалентность инерциальных систем проявляется в том, что физические законы во всех таких системах одинаковы. Такие системы невозможно различить с помощью экспериментов, выполняемых в закрытой лаборатории. Законы Ньютона справедливы сразу во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что никакими механическими опытами в изолированной физической системе нельзя установить, покоится она или движется как целое без ускорения относительно гелиоцентрической системы отсчета. Это утверждение выражает физическое содержание механического принципа относительности или принципа относительности Галилея.

Самое трудное в понимании принципа относительности — осознание опытного факта существования множества эквивалентных инерциальных систем отсчета, каждая из которых ничем не лучше и не хуже остальных, но принципиально отличается от любой из неинерциальных систем. Психологически сравнительно легко осознать независимость явлений от места, где они происходят (в этом проявляется однородность физического пространства), но значительно труднее понять ограниченную независимость явлений от состояния движения (принцип относительности Галилея — Ньютона, согласно которому скорости рассматриваются как относительные, а ускорения как абсолютные).

По современным представлениям равноправие инерциальных систем, вытекающее из основанного на наблюдениях закона инерции (первого закона Ньютона), не может ограничиваться только механическими явлениями («чисто механических» явлений попросту не существует) и потому должно распространяться на всю физику (эйнштейновский принцип относительности).

### 3.2 Второй закон Ньютона и инертная масса

Второй закон Ньютона связывает ускорение тела с действующими силами и его массой: в инерциальной системе отсчета ускорение  $\vec{a}$  тела пропорционально векторной сумме действующих на него сил и обратно пропорционально массе  $m$  тела:

$$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}. \quad (6)$$

Сила — это физическая величина, количественно характеризующая взаимодействие тел. Вводимая по определению процедура измерения сил любой физической природы основывается на свойстве сил вызывать деформацию упругих тел. Действующий на этом принципе прибор для измерения сил называется динамометром. Наиболее чувствительная и точная разновидность динамометра — крутильные весы, сыгравшие заметную роль в истории физики.

Законы Ньютона определяют движение тела независимо от природы сил, вызывающих ускорение. В современной физике все многообразие сил, встречающихся в природе, сводится к небольшому числу *фундаментальных взаимодействий* — гравитационному, электромагнитному, сильному и слабому. Область проявления сильных и слабых взаимодействий ограничивается процессами в атомных ядрах и взаимными превращениями элементарных частиц. Описание таких взаимодействий — задача квантовой теории поля. Существует теория, в которой электромагнитное и слабое взаимодействия рассматриваются как разные проявления единого электрослабого взаимодействия. В пределах границ применимости классической механики можно рассматривать только силы гравитационного взаимодействия и различные макроскопические проявления электромагнитного взаимодействия — силы упругости, силы трения и т. п. В сущности дальнедействующие гравитационное и электромагнитное взаимодействия определяют все макроскопические явления.

Опыт показывает, что сила — векторная физическая величина, т. е. на нее распространяются математические правила действий с векторами. В частности, под действием нескольких сил (даже разной физической природы) движение происходит так же, как под действием одной силы (*равнодействующей силы*), равной векторной сумме всех отдельных сил.

Одна и та же сила разным телам сообщает различные ускорения. Чем меньше ускорение, тем больше *инертность* тела. Физическая величина, количественно характеризующая свойство инертности тела, называется *инертной массой* или (чаще) просто *массой*.

Инертная масса дает количественную характеристику инертных свойств тела, т. е. способности данного тела приобретать ускорение под действием любой приложенной силы, независимо от ее физической природы. В этой независимости проявляется открытый характер классической динамики — в теории уже заготовлено место, куда можно ввести нечто новое. Второй закон утверждает, что ускорение тела пропорционально приложенной силе любой физической природы.

Измерение массы может основываться на сравнении ускорений, сообщаемых данному телу и эталонному телу одной и той же силой: отношение масс равно обратному отношению модулей ускорений. Такое динамическое измерение масс атомов и молекул производится в масс-спектрометрах, принцип действия которых основан на отклонении пучков ионов электрическими и магнитными полями. В этих измерениях используется *атомная единица массы* (а. е. м.), равная 1/12 части массы ядра углерода-12:

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Массы макроскопических тел на практике измеряют *взвешиванием*, т. е. сравнением действующей на тело силы тяготения с силой тяготения, действующей в том же гравитационном поле на эталон (гирю). Измерение массы взвешиванием основано на законе пропорциональности инертной и гравитационной масс. Подробнее об этом см. в комментариях к теме «Инерция и тяготение».

Как показывает опыт, масса представляет собой аддитивную скалярную величину, не зависящую от положения тела и его скорости (при условии, что скорость тела много меньше скорости света).

Отношение массы  $m$  тела к его объему  $V$  называется *плотностью*:

$$\rho = m/V.$$

### 3.3 Третий закон Ньютона и взаимодействие тел

Третий закон Ньютона утверждает, что любая сила как количественная мера действия одного тела на другое всегда характеризует взаимодействие между телами — два взаимодействующих тела выступают как равноправные партнеры независимо от физической природы взаимодействия. Силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (7)$$

В частности, третьему закону Ньютона удовлетворяют силы гравитационного воздействия (закон всемирного тяготения) и силы электростатического взаимодействия (закон Кулона). Силы взаимодействия материальных точек имеют *центральный характер*, т. е. направлены вдоль соединяющей их прямой. Третий закон Ньютона предполагает мгновенное распространение взаимодействий (так называемая концепция дальнего действия), поэтому для находящихся на расстоянии друг от друга движущихся взаимодействующих тел он справедлив лишь при движениях, достаточно медленных по сравнению со скоростью света.

Отметим, что приведенная выше логическая схема законов динамики не является единственно возможной. Дело в том, что такие важные понятия динамики, как сила и масса, невозможно ввести независимо от самих законов динамики, т. е. вне ее рамок. Поэтому возникает некоторый произвол в том, какие положения этих законов рассматривать в качестве определений соответствующих величин, а какие считать утверждениями, проверяемыми на опыте. Например, процедуру измерения массы тела можно вводить по определению на основе третьего закона Ньютона: за отношение масс можно принять обратное отношение модулей ускорений двух тел при их взаимодействии друг с другом:

$$m_1/m_2 = a_2/a_1.$$

При таком измерении массы тела не используется понятие действующей на него силы. Теперь утверждение второго закона Ньютона об обратной пропорциональности ускорения тела его массе становится проверяемым на опыте положением, а не определением массы. Но физическое содержание третьего закона при

этом сводится к иному утверждению: отношение модулей ускорений двух взаимодействующих тел будет всегда одним и тем же независимо от характера их взаимодействия, а векторы ускорений направлены в противоположные стороны.

Еще одна непротиворечивая логическая схема возникает, когда способ измерения сил основывается не на их свойстве вызывать упругую деформацию, а на пропорциональности ускорения вызывающей его силе.

Совокупность законов Ньютона еще не представляет собой физической теории, а дает лишь логическую схему решения любой задачи о движении. Физическая теория получается при добавлении к законам Ньютона закона сил (закона взаимодействия), описывающего круг рассматриваемых явлений. По самой своей сути ньютоновская механика, будучи открытой теорией, требует внесения закона сил извне. В частности, при добавлении к законам Ньютона закона всемирного тяготения мы получаем физический фундамент небесной механики — количественной (математической) теории движений небесных тел. Именно наблюдательная астрономия и небесная механика дают наиболее впечатляющее опытное подтверждение законам классической динамики и ньютоновской теории тяготения.

В другой часто применяемой форме основного закона динамики (второго закона Ньютона) используется понятие импульса. В классической механике *импульс* материальной точки — это произведение ее массы на скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Поскольку  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (8)$$

Отметим, что в такой форме второй закон Ньютона справедлив и в релятивистской динамике, т. е. при движении тел со скоростями, близкими к предельной скорости  $c$  (скорости света).

### 3.4 Прямая и обратная задачи динамики

В динамике различают два вида задач, решаемых с помощью второго закона Ньютона. Задачи первого вида заключаются в определении сил по известному движению тела (прямая задача динамики). Классический пример прямой задачи динамики — установление характера зависимости силы тяготения от расстояния на основе известных из астрономических наблюдений законов движения планет. В частности, третий закон Кеплера утверждает, что для круговых орбит квадраты периодов обращения пропорциональны кубам радиусов орбит:  $T^2 \sim r^3$ . Поскольку при равномерном движении по окружности  $v = 2\pi r/T$ , а ускорение  $\vec{a}$  направлено к центру и равно по модулю  $v^2/r$ , то действующая на планету сила, согласно второму закону Ньютона, равна

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = m \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r}. \quad (9)$$

Учитывая третий закон Кеплера  $T^2 \sim r^3$ , получаем  $F \sim m/r^2$  — сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от планеты до Солнца и прямо пропорциональна массе  $m$  планеты. Так как роль планеты и Солнца в их гравитационном взаимодействии одинакова, то сила тяготения должна быть пропорциональна и массе  $M$  Солнца:

$$F = G \frac{mM}{r^2}.$$

Значение гравитационной постоянной  $G$  в законе всемирного тяготения нельзя получить из астрономических наблюдений — для этого требуется лабораторный эксперимент по прямому измерению сил гравитационного взаимодействия между телами известных масс (опыт Кэвендиша).

Задачи второго вида состоят в определении характера движения, если известны действующие на него силы и начальное *механическое состояние* (обратная задача динамики). Механическое состояние тела (материальной точки) в некоторый момент определяется положением и скоростью тела в этот момент времени.

Простейший пример обратной задачи динамики — расчет движения материальной точки в однородном постоянном (не зависящем от времени) поле. В частности, для движения материальной точки в поле тяготения вблизи поверхности Земли без учета сопротивления воздуха второй закон Ньютона приводится к виду

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}.$$

В результате интегрирования этого уравнения с начальными условиями

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0, \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

получаем следующие зависимости скорости и положения от времени:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{g}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Траектория материальной точки лежит в плоскости, задаваемой векторами  $\vec{v}_0$  и  $\vec{g}$ . Вводя в этой плоскости оси координат  $x, y$ , из (10) получаем проекции скорости и координаты точки как функции времени:

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (11)$$

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}, \quad (12)$$

где  $\alpha$  — угол, образуемый начальной скоростью с осью  $x$ . Исключая время  $t$  из этих уравнений, получаем уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (13)$$

Полученное уравнение описывает семейство параболических траекторий, зависящее от двух параметров:  $\alpha$  и  $v_0$ . Решение многих задач о свободном падении тел без учета сопротивления воздуха сводится к исследованию этого уравнения.

В более сложных случаях (например, в задачах небесной механики о движении небесных тел под действием сил взаимного тяготения) решение обратной задачи динамики приводится к интегрированию систем дифференциальных уравнений.

В динамике встречаются также задачи, которые нельзя отнести ни к одному из указанных видов: некоторые силы заданы, а другие — как правило, силы реакции связей — сами подлежат определению. Для решения таких задач, кроме второго закона Ньютона, необходимо учитывать ограничения, налагаемые связями на рассматриваемое движение. В задачах о движении тел при наложенных связях часть сил, действующих на тело, известна, в то время как другие силы (силы реакции) заранее не известны. В таких задачах обычно переходят к так называемым обобщенным координатам, введение которых позволяет автоматически учитывать наложенные на движение связи. Дифференциальные уравнения, записанные в обобщенных координатах, не содержат неизвестных сил реакции. После того, как интегрированием этих уравнений найдено движение системы, можно по известному движению определить силы реакции. Таким образом, при наличии связей в расчете движения системы сочетаются обратная и прямая задачи динамики.



## 4 Физические величины и системы единиц

### Содержание темы

Измерения в физике. Единицы физических величин. Системы единиц. Принципы построения систем единиц. Требования к эталону физической величины. Размерность физической величины. Метод анализа размерностей.

#### 4.1 Физические величины и физические законы

Характеристикам объектов и явлений природы дают названия, чтобы проводить различия между ними. При этом возникают *понятия*, определения которых отвечают на вопросы, что понимают под тем-то и тем-то. Иногда понятию можно сопоставить *физическую величину*. При этом соответствующая характеристика объекта, явления или процесса должна допускать *количественное выражение*, т. е. для нее можно *определить* (ввести по определению) *процедуру измерения* и установить *единицы*, в которых она измеряется. Например, понятию пространственной протяженности сопоставляется физическая величина, называемая расстоянием. Для измерения расстояний принята по определению некоторая процедура и выбрана определенная единица (метр).

*Измерить* физическую величину — это значит выяснить, сколько раз в ней содержится однородная с ней величина, принятая за единицу. Это есть *числовое значение* физической величины.

Между разными физическими величинами удается установить объективно существующие соотношения, т. е. установить *физические законы*. Иногда эти законы можно представить в форме математических уравнений. Физику называют *точной* наукой, выражая этим то обстоятельство, что устанавливаемые в физике соотношения между физическими величинами имеют *количественную форму*. Но следует помнить, что эти соотношения (физические законы), как правило, приближенны и справедливы в ограниченных областях.

В противоположность «чистой» математике, где величины обладают теми свойствами, которые им произвольно приписаны по определению, в физике необходимо открывать объективно существующие свойства физических величин, а не приписывать их по определению.

Входящие в уравнения физических законов значения физических величин (как и обозначения их символов — буквы) всегда следует рассматривать как произведения числового значения и единицы измерения. Если в уравнении для физических величин участвуют математические функции типа  $\ln$ ,  $\sin$ ,  $\exp$ , то их аргументом может быть только безразмерное число (в частности, отношение величин одинаковой размерности).

При любом исследовании физических явлений необходим обоснованный выбор *физической модели*, т. е. определенная идеализация, при которой следует сохранить наиболее важные черты явления. Примерами физических моделей могут служить материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный газ и т. п. Пригодность той или иной модели зависит не столько от свойства рассматриваемой реальной системы, сколько от характера вопросов, на которые нужно получить ответы. Очень важно при этом уметь определять необходимую меру математической

строгости: бессмысленно стремиться к получению точного решения в рамках достаточно грубой физической модели.

## 4.2 Системы единиц

Любое измерение заключается в сравнении измеряемой величины с другой, однородной с ней, величиной, принятой за единицу. В принципе, единицы для всех величин можно выбрать совершенно независимо друг от друга. Однако это практически неудобно, так как тогда во всех уравнениях, выражающих связь между различными физическими величинами, появятся числовые коэффициенты. Кроме того, пришлось бы для каждой физической величины вводить свой эталон. Поэтому в физике используют системы единиц.

Единицы физических величин делятся на системные (т. е. входящие в какую-либо систему единиц) и внесистемные (например, часто используемые единицы энергии электрон-вольт и киловатт-час). Системные единицы подразделяются на основные, выбираемые произвольно (по соглашению), и производные, которые выражаются через основные.

Основной особенностью современных систем единиц является то, что между единицами различных величин имеются определенные соотношения. Эти соотношения устанавливаются теми физическими законами или определениями, которыми связаны между собой измеряемые величины. Например, единицу скорости выбирают так, что она выражается через единицы длины и времени. При таком выборе единицы скорости используют определение скорости. Единицу силы устанавливают с использованием второго закона Ньютона и выражают через единицы ускорения и массы. Это означает, что для нескольких произвольно выбираемых физических величин единицы устанавливают независимо друг от друга и называют *основными*. Единицы для остальных величин выражают через основные и называют *производными*.

Число основных единиц и сам их выбор в разных системах единиц могут быть различными. Например, в системе единиц Гаусса (СГС) в качестве основных выбраны три единицы: длины ( $L$ ), времени ( $T$ ) и массы ( $M$ ), а в Международной системе единиц СИ в качестве основных выбраны семь единиц: длины ( $L$ ), времени ( $T$ ), массы ( $M$ ), термодинамической температуры ( $\theta$ ), количества вещества ( $N$ ), силы электрического тока ( $I$ ) и силы света ( $J$ ). Определения основных и производных единиц можно найти в любом справочнике.

Кроме произвола в выборе физических величин, единицы которых принимают за основные, и произвола в выборе масштаба (размера) этих единиц, имеется еще произвол в выборе коэффициентов пропорциональности в формулах, которыми вводятся производные единицы. Проиллюстрируем это на примере единицы площади. Выбрав в качестве единицы длины метр, можно в качестве единицы площади выбрать либо квадратный метр — площадь квадрата, сторона которого равна 1 метру, либо «круглый» метр — площадь круга, диаметр которого равен 1 метру. В первом случае площадь квадрата со стороной  $l$  выражается формулой  $S = l^2$ , а площадь круга с диаметром  $l$  — формулой  $S = \pi l^2/4$ . Во втором случае более простая формула получается для площади круга:  $S = l^2$ , в то время как формула для площади квадрата будет содержать  $\pi$ :  $S = 4l^2/\pi$ .

Рассмотренные возможности введения единиц площади, отличающихся число-

вым коэффициентом, основывались на одной и той же геометрической закономерности, связывающей площади подобных фигур с их линейными размерами:  $S \sim l^2$ . Но при введении производной единицы какой-либо величины, кроме упомянутого произвола в выборе числового коэффициента, имеется еще произвол в выборе физического закона, с помощью которого устанавливается связь производных единиц с основными. Например, единица силы обычно устанавливается с помощью второго закона Ньютона  $F = ma$ . В этом случае выражение единицы силы через основные единицы, т. е. *размерность* силы, имеет вид

$$\dim F = MLT^{-2}. \quad (14)$$

Однако при тех же основных единицах ( $L, M, T$ ) для установления единицы силы можно вместо второго закона Ньютона использовать закон всемирного тяготения, полагая в нем коэффициент пропорциональности безразмерным и равным, например, единице:  $F = m_1 m_2 / r^2$ . В этом случае за единицу силы принимается сила, с которой притягиваются друг к другу единичные точечные массы, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Размерность силы при этом имеет вид

$$\dim F = M^2 L^{-2}. \quad (15)$$

При таком выборе единицы силы во втором законе Ньютона, разумеется, появится размерный коэффициент, подобно тому как при обычном выборе (на основе второго закона Ньютона) размерный коэффициент появляется в законе всемирного тяготения (*гравитационная постоянная*).

Разобранный пример показывает, что размерность физической величины зависит от способа построения системы единиц.

Таким образом, при выборе способа построения системы единиц существует большой произвол. Однако на практике приходится считаться с целым рядом требований, которые существенно ограничивают этот произвол. Слишком большое число основных единиц было бы неудобно из-за появления размерных коэффициентов во многих физических формулах и из-за необходимости установления большого числа эталонов. Слишком малое число основных единиц приводит к тому, что построенные на их основе производные единицы оказываются неудобными для использования. Практически используются системы, в которых число основных единиц колеблется от трех до семи.

При установлении основных единиц весьма важной является возможность создания таких эталонов, которые обеспечивали бы постоянство единицы и возможность ее воспроизведения, а также восстановление эталона в случае его утраты. Самый надежный способ решения этой задачи — поручить «хранение» эталонов самой природе. Так, принятый в настоящее время эталон времени основывается на периоде колебаний, происходящих в атоме изотопа цезия-133. По определению единица времени *секунда* содержит 9 192 631 770 периодов этих колебаний. Атомы одного и того же изотопа тождественны, поэтому при указанном выборе эталона времени природа предоставляет в наше распоряжение практически неограниченное число совершенно идентичных «часов». Для установления основной единицы длины в настоящее время используется тот же самый эталон: по определению *метр* — это длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299\,792\,458$

секунды. Для эталона массы пока не удастся использовать массу какой-либо атомной частицы, так как точность определения атомных масс уступает точности измерения масс при взвешивании. Эталоном массы *килограмм* служит платино-иридиевая гиря, хранящаяся в Международном бюро мер и весов.

Сложившаяся в настоящее время ситуация, когда как в учебной, так и в научной литературе наряду с *Международной системой единиц СИ* (от международного символа SI) широко используется *гауссова система* (или *симметричная система* СГС — от первых букв наименований основных единиц Сантиметр, Грамм, Секунда), требует понимания принципов построения каждой из них. Единицы механических величин в этих двух системах отличаются только масштабом, так как основные единицы в них выбраны на основе одних и тех же физических величин — длины, времени и массы. Поэтому все формулы и уравнения, выражающие физические законы и определения, в механике одинаковы в обеих системах. Но в электродинамике формулы одних и тех же физических законов имеют различный вид в зависимости от используемой системы единиц.

### 4.3 Метод анализа размерностей

Физические величины характеризуются определенной размерностью. Физические величины, числовое значение которых не зависит от выбранного масштаба (размера) единиц, называются *безразмерными*. Примеры безразмерных величин — угол (отношение длины дуги к радиусу), показатель преломления света (отношение скорости света в вакууме к скорости света в веществе). Физические величины, числовое значение которых меняется при изменении масштаба единиц, называются *размерными*. Примеры размерных величин — длина, скорость, энергия. Выражение производной единицы физической величины через основные называется ее *размерностью* (или формулой размерности). Например, размерность импульса

$$\dim p = LMT^{-1}.$$

Соображения размерности можно использовать для проверки правильности полученных результатов при решении физических задач: правые и левые части полученных выражений, как и отдельные слагаемые в каждой из частей, должны иметь одинаковую размерность. Анализ размерностей в ряде случаев оказывается плодотворным теоретическим методом исследования физических явлений. Метод размерностей может использоваться и для вывода формул и уравнений, когда нам известно, от каких физических параметров может зависеть искомая величина. Сущность метода легче уяснить на конкретных примерах.

1. Определим скорость  $v$ , с которой упадет на землю свободно падающее с высоты  $h$  тело массы  $m$ . Так как искомая величина может зависеть от ускорения свободного падения  $g$ , высоты  $h$  и массы  $m$ , то выражение для  $v$  можно искать в виде

$$v = Ch^x g^y m^z, \quad (16)$$

где  $C$  — некоторая безразмерная постоянная, а  $x$ ,  $y$  и  $z$  — числа, подлежащие определению. Приравниваем размерности левой и правой частей (16):

$$LT^{-1} = L^x (LT^{-2})^y M^z.$$

Показатели степеней у  $L$ ,  $M$  и  $T$  в левой и правой частях должны быть равны, поэтому

$$\begin{aligned} L & 1 = x + y, \\ T & -1 = -2y, \\ M & 0 = z. \end{aligned}$$

Отсюда  $z = 0$ ,  $y = 1/2$ ,  $x = 1/2$ , и формула (16) принимает вид

$$v = C\sqrt{gh}. \quad (17)$$

Истинное значение скорости  $v = \sqrt{2gh}$ , т. е. анализ размерностей дал возможность определить характер зависимости  $v$  от  $g$ ,  $h$  и  $m$  с точностью до числового множителя  $C$ .

2. Определим дальность  $s$  полета пули, выпущенной с начальной скоростью  $v$  в горизонтальном направлении на высоте  $h$  над земной поверхностью. Ищем  $s$  в виде

$$s = Cv^x g^y h^z m^u. \quad (18)$$

Равенство размерностей:

$$L = (LT^{-1})^x (LT^{-2})^y L^z M^u. \quad (19)$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{aligned} L & 1 = x + y + z, \\ T & 0 = -x - 2y, \\ M & 0 = u. \end{aligned}$$

Отсюда  $x = -2y$ ,  $z = 1 + y$ , и выражение (18) для  $s$  принимает вид

$$s = Cv^{-2y} g^y h^{1+y} = Ch(gh/v^2)^y.$$

Анализ размерностей позволил установить, что дальность полета  $s$  не зависит от массы пули, но зависит от высоты  $h$  и некоторой неизвестной степени  $y$  безразмерной комбинации параметров  $gh/v^2$ . Если нам известна (например, из опыта) зависимость  $s$  хотя бы от одного из параметров, то  $y$  немедленно определяется. Пусть известно, что  $s \sim v$ ; тогда  $y = -1/2$ , и для  $s$  из уравнения (4.3) получаем

$$s = Cv\sqrt{h/g},$$

что с точностью до постоянного множителя  $C$  совпадает с истинным значением  $s = v\sqrt{2h/g}$ . Анализ размерностей не позволил полностью определить характер зависимости потому, что число параметров, от которых могла зависеть дальность полета  $s$  (четыре), оказалось больше числа основных единиц используемой системы единиц.

В этом примере характер зависимости можно определить полностью, если воспользоваться так называемыми векторными единицами длины. А именно, будем измерять длину в горизонтальном и вертикальном направлениях в разных единицах и обозначим их размерности через  $L_{\Gamma}$  и  $L_{\text{В}}$ . Тогда, учитывая, что

$$\dim v = L_{\Gamma}T^{-1}, \quad \dim g = L_{\text{В}}T^{-2}, \quad \dim h = L_{\text{В}},$$

вместо (19) получаем

$$L_\Gamma = (L_\Gamma T^{-1})^x (L_B T^{-1})^y L_B^z M^u.$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{aligned} L_\Gamma & 1 = x, \\ L_B & 0 = y + z, \\ T & 0 = -x - 2y, \\ M & 0 = u. \end{aligned}$$

Отсюда  $y = -1/2$ ,  $z = 1/2$  и для  $s$  получаем

$$s = Cv g^{-1/2} h^{1/2} = Cv \sqrt{h/g}.$$

Увеличение числа основных единиц расширяет возможности метода размерностей.

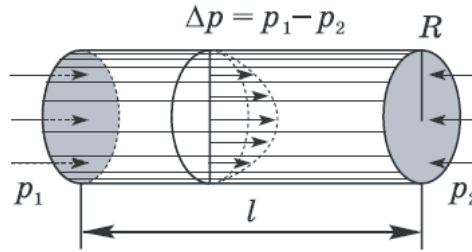


Рис. 3: К расчету объема жидкости, протекающей через трубу.

3. Рассмотрим ламинарное течение вязкой жидкости по трубе (рис. 3). Объем жидкости  $V$ , протекающей через сечение трубы за время  $t$ , пропорционален времени  $t$  и зависит от разности давлений  $\Delta p$  на концах трубы, вязкости жидкости  $\eta$ , длины  $l$  и радиуса  $R$  трубы:

$$V = C(\Delta p)^x \eta^y l^z R^u t.$$

Здесь также удобно измерять длину вдоль и поперек трубы в разных единицах с размерностями  $L_\parallel$  и  $L_\perp$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \dim l &= L_\parallel, & \dim R &= L_\perp, & \dim V &= L_\parallel L_\perp^2, \\ \dim \Delta p &= M L_\parallel L_\perp^{-2} T^{-2}, & \dim \eta &= M L_\parallel^{-1} T^{-1}, \end{aligned}$$

и равенство размерностей принимает вид

$$L_\parallel L_\perp = (M L_\parallel L_\perp^{-2} T^{-2})^x (M L_\parallel^{-1} T^{-1})^y L_\parallel^z L_\perp^u T.$$

Приравнивая показатели степеней,

$$\begin{aligned} M & 0 = x + y, \\ L_\parallel & 1 = x - y + z, \\ L_\perp & 2 = -2x + u, \\ T & 0 = -2x - y + 1, \end{aligned}$$

находим  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z = -1$ ,  $u = 4$  и для  $V$  получаем

$$V = C \frac{\Delta p R^4}{\eta l} t.$$

Таким образом, объем жидкости  $V$ , протекающей через сечение трубы за время  $t$ , пропорционален разности давлений на единицу длины трубы  $\Delta p/l$  и обратно пропорционален вязкости, что достаточно очевидно и без приведенного расчета. Однако не столь тривиален вывод о том, что объем жидкости пропорционален четвертой степени радиуса трубы (т. е. *квадрату* площади ее поперечного сечения). Полученные закономерности справедливы для трубы с постоянным поперечным сечением произвольной формы. В случае круглого сечения динамический расчет дает  $C = \pi/8$  (формула Пуазейля).

4. Определим зависимость скорости звука (т. е. продольных упругих волн, от свойств среды. Можно предположить, что эта скорость зависит от упругих свойств среды, определяемых модулем Юнга  $E$ , от инертных свойств, описываемых плотностью  $\rho$ , и от длины волны  $\lambda$ . Размерности этих величин:

$$\dim E = L^{-1}MT^{-2}, \quad \dim \rho = ML^{-3}, \quad \dim \lambda = L.$$

Записывая выражение для искомой скорости звука  $u$  в виде  $u = CE^x \rho^y \lambda^z$ , приходим к следующему равенству размерностей:

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^x (ML^{-3})^y L^z,$$

откуда

$$\begin{array}{l} L \quad 1 = -x - 3y + z, \\ M \quad 0 = x + y, \\ T \quad -1 = -2x, \end{array}$$

т. е.  $x = 1/2$ ,  $y = -1/2$ ,  $z = 0$ . Итак, получаем

$$u = C \sqrt{E/\rho}. \quad (20)$$

Скорость звука не зависит от длины волны  $\lambda$ . Динамический вывод дает тот же результат с  $C = 1$ .

5. Определим скорость волн на поверхности воды. Скорость капиллярных волн зависит от поверхностного натяжения  $\sigma$ , плотности воды  $\rho$  и длины волны  $\lambda$ . Записывая выражение для  $u_k$  в виде  $u_k = C\sigma^x \rho^y \lambda^z$  и учитывая, что  $\dim \sigma = MT^{-2}$ , получаем

$$LT^{-1} = (MT^{-2})^x (ML^{-3})^y L^z,$$

откуда  $x = 1/2$ ,  $y = z = -1/2$ . Поэтому

$$u_k = C \sqrt{\sigma/\rho\lambda}.$$

Динамическая теория дает  $C = \sqrt{2\pi}$ .

Скорость тяжелых волн на глубокой воде ( $h \gg \lambda$ ) может зависеть только от  $g$  и  $\lambda$ . Составляя равенство размерностей для формулы  $u_{\tau} = Cg^x\lambda^y$ , находим  $x = y = 1/2$ , т. е.

$$u_{\tau} = C\sqrt{g\lambda}. \quad (21)$$

Динамическое рассмотрение дает  $C = 1/\sqrt{2\pi}$ .

Скорость предельно длинных волн ( $\lambda \gg h$ ) и волн на мелкой воде не должна зависеть от длины волны  $\lambda$ , но теперь она может зависеть от глубины водоема  $h$ . Равенство размерностей для формулы  $u_{\tau} = Cg^xh^y$  дает

$$u_{\tau} = C\sqrt{gh}. \quad (22)$$

Как показывает динамический расчет, в данном случае  $C = 1$ .



## 5 Предпосылки и постулаты частной теории относительности

### Содержание темы

Инерциальные системы отсчета. Физическая эквивалентность инерциальных систем отсчета (принцип относительности). Преобразования Галилея и преобразование скорости. Ограниченный характер классических представлений о пространстве и времени. Принцип относительности и электродинамика. Универсальный характер скорости света в вакууме. Постулаты теории относительности и их физическое содержание. Частная теория относительности — физическая теория пространства и времени.

### 5.1 Постулаты теории относительности

Частая теория относительности — современная физическая теория, характеризующая общие свойства пространства и времени в отсутствие полей тяготения и в умеренно слабых гравитационных полях.

Дедуктивное построение частной теории относительности базируется на двух фундаментальных принципах, или постулатах, которые представляют собой обобщение большого числа экспериментальных фактов:

- принцип относительности;
- принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий.

Принцип относительности выражает ограниченную независимость законов физики от состояния движения. Эта независимость заключается в равноправии (эквивалентности) всех инерциальных систем отсчета — законы физики должны быть одинаковы во всех таких системах. Эквивалентность инерциальных систем отсчета означает, что равномерное прямолинейное движение замкнутой системы материальных тел не влияет на ход процессов, происходящих внутри физической системы. Находясь в закрытой лаборатории, никакими опытами невозможно установить, покоится лаборатория относительно выбранной инерциальной системы отсчета или движется относительно нее с постоянной скоростью. Подчеркнем, что движение лаборатории с ускорением (в частности, вращение) сразу обнаруживает себя по влиянию на многие явления.

Утверждение о физической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета составляет содержание *принципа относительности*. Принцип относительности впервые был сформулирован Галилеем для механических явлений. Но равноправие инерциальных систем не может ограничиваться только механическими явлениями («чисто механических» явлений попросту не существует), и потому это равноправие следует распространить на всю физику. Обобщение принципа относительности, сформулированное А. Эйнштейном в 1905 году, заключается в распространении его на любые явления. Эйнштейновский принцип относительности подтверждается всей совокупностью наших знаний о природе.

## 5.2 Преобразования Галилея

Согласно принципу относительности математическая форма законов физики должна быть одинакова во всех инерциальных системах отсчета, т.е. уравнения законов должны сохранять справедливость при переходе от одной инерциальной системе отсчета к другой.

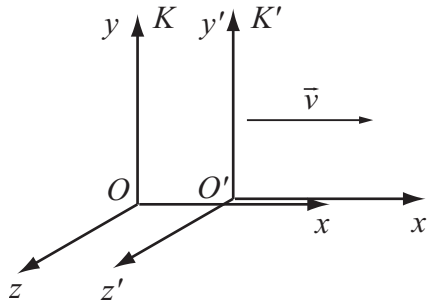


Рис. 4: Система отсчета  $K'$  движется относительно  $K$  с постоянной по величине и направлению скоростью  $\vec{v}$  вдоль оси  $Ox$

На основе классических представлений о пространстве и времени сразу устанавливается вид преобразования, связывающего координаты  $x, y, z$  и время  $t$  некоторого события, зафиксированные в системе отсчета  $K$ , с координатами и временем  $x', y', z', t'$  этого же события, зафиксированными в другой системе отсчета  $K'$ , движущейся относительно  $K$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в направлении оси  $Ox$  (рис. 4):

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (23)$$

Эти простые формулы носят название *преобразований Галилея*. Вводя радиусы-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ , указывающие в каждой из систем  $K$  и  $K'$  положение той точки, в которой произошло рассматриваемое событие, можно записать первые три соотношения преобразований Галилея (23) в векторном виде:  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$ . Уравнения классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея, т.е. удовлетворяют принципу относительности, если переход от одной инерциальной системы отсчета к другой математически производится с помощью преобразований Галилея (23), которые соответствуют классическим представлениям об абсолютном характере времени и пространственных расстояний.

Вся совокупность известных экспериментальных данных говорит о том, что принцип относительности распространяется *на все физические явления*: как механические, так и электромагнитные, и оптические процессы протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Исторически наиболее важные опыты, подтверждающие универсальный характер принципа относительности, — это оптический опыт Майкельсона и Морли с интерферометром специальной конструкции (см., например, [1], [4]) и электродинамический опыт Трутона и Нобля с заряженным конденсатором, подвешенным на упругой нити (конец 19 века). Но уравнения электродинамики не удовлетворяют принципу относительности, если переход от одной системы отсчета к другой производить по формулам преобразований Галилея (23). В самом деле, скорость распространения электромагнитных

волн (света) в вакууме согласно уравнениям Максвелла одинакова по всем направлениям и равна электродинамической постоянной  $c$ . Но, с другой стороны, в соответствии с классическими представлениями, скорость света может быть одинакова по всем направлениям только в одной инерциальной системе отсчета (системе «неподвижного эфира»). Например, если скорость света равна  $c$  в системе отсчета  $K$ , то в системе отсчета  $K'$  свет должен распространяться в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $c - v$ , а в отрицательном — со скоростью  $c + v$ .

Разрешить возникшие противоречия можно только ценой отказа от казавшихся незыблемыми классических представлений о пространстве и времени, сложившихся на основе многолетнего опыта наблюдений за сравнительно медленными движениями. Отказ от преобразований Галилея и введение вместо них новых преобразований — преобразований Лоренца, оставляющих неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой уравнения электродинамики, а не уравнения механики, потребовал пересмотра и уточнения законов классической механики, а главное — потребовал коренной ломки сложившихся представлений о свойствах пространства и времени.

### 5.3 Принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий

Второй релятивистский постулат связан с принципом причинности и с возможными реализациями системы отсчета, т.е. с пространственно-временными измерениями). Коротко его суть можно сформулировать как утверждение, что в пустом пространстве свет никогда не может обогнать свет. В вакууме скорость светового сигнала не зависит от длины волны света, от его интенсивности, поляризации и других характеристик, а также от движения источника. Одно из многочисленных экспериментальных подтверждений этого утверждения — наблюдение света, испускаемого спектрально-двойными звездами.

Второй постулат, логически связанный с принципом относительности, утверждает, что любые взаимодействия между телами распространяются в пустоте с универсальной конечной скоростью, не зависящей от движения тел и равной скорости света в вакууме  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. В соответствии с первым постулатом эта скорость одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Она определяет тот минимальный промежуток времени, по истечении которого до тела может прийти первый сигнал, дающий знать об изменении, которое произошло с другим телом. Существование универсальной предельной скорости распространения взаимодействий означает наличие общего предела для скорости передачи каких-либо действий и сигналов, любых силовых полей независимо от их физической природы. Второй постулат утверждает также, что невозможно движение тел со скоростью, превышающей предельную универсальную скорость  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

На первый взгляд может показаться, что второй постулат противоречит первому постулату о равноправии всех инерциальных систем. Действительно, скорости изменяются при переходе к другой системе отсчета. Поэтому скорость передачи взаимодействий, казалось бы, не может иметь одно и то же значение во всех системах отсчета. Изменение этой скорости при переходе в другую систему отсчета нарушало бы декларируемую первым постулатом эквивалентность всех инерци-

альных систем. Однако дело здесь не в несовместимости первого и второго постулатов друг с другом, а в их несовместимости с классическими представлениями об абсолютном характере времени и пространственных расстояний. Поэтому объединение этих постулатов в теории относительности потребовало коренного пересмотра основных классических понятий, относящихся к пространству и времени.

Отметим, что второй постулат находится в противоречии с принятым в классической механике способом описания взаимодействия материальных частиц, который неявно включает предположение о мгновенности распространения взаимодействий. В самом деле, в классической механике считается, что силы, действующие на каждую частицу со стороны остальных, зависят от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из частиц мгновенно отражается на остальных. Поэтому второй постулат неизбежно требует пересмотра и уточнения законов механики.

Механика теории относительности переходит в классическую механику, основанную на мгновенности распространения взаимодействий, в предельном случае, когда скорости тел малы по сравнению со скоростью света  $c$ . В этом отношении новая — релятивистская — механика удовлетворяет *принципу соответствия*, согласно которому новая теория, приходящая на смену старой, должна сводиться к старой теории в той области явлений, где старая теория выдержала серьезную проверку на опыте. Только большой величиной скорости распространения взаимодействий объясняется тот факт, что для макроскопических тел часто достаточно точной оказывается классическая механика.

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 88–94, стр. 358–360).
2. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 511–514).
3. Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969 (стр. 28–36).
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., «Физматгиз», 1961 (стр. 29–34).
6. Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006 (стр. 4–11).

## 6 Релятивистская кинематика

### Содержание темы

Измерение промежутков времени и пространственных расстояний с точки зрения теории относительности. Понятие события. Относительность одновременности событий. Синхронизация часов. Преобразование промежутков времени между событиями при переходе в другую систему отсчета. Собственное время. Относительность пространственных расстояний между событиями. Собственная длина. Лоренцево сокращение как следствие постулатов теории относительности. Релятивистский эффект Допплера.

### 6.1 Одновременность событий

Постулаты теории относительности требуют внесения радикальных изменений в основные физические понятия, относящиеся к пространству и времени. Прежде всего необходим глубокий *анализ основных измерительных операций*, определяющих пространственно-временные соотношения между событиями. Подробное и очень ясное обсуждение можно найти в книге акад. Л. И. Мандельштама «Лекции по теории относительности», см. [4], стр. 164–195.

Главное изменение, внесенное теорией относительности в постановку вопроса об измерительных операциях, состоит в том, что любое физическое понятие, относящееся к пространству и времени (например, одновременность событий) и любая измерительная операция (например, измерение промежутков времени и расстояний) *нуждается в определении*.

Измерение промежутка времени между событиями означает сравнение между собой показаний выбранных в качестве эталона часов в моменты наступления этих событий. Для этого прежде всего нужно установить *одновременность* рассматриваемого события с другим событием — прохождением стрелки часов через определенное деление.

Понятие одновременности событий, происходящих в одном и том же месте, «рядом», по-видимому не нуждается в определении. Но нужно дать *определение*, что такое одновременность для событий, происходящих в пространственно удаленных точках. Без такого определения невозможно сравнивать по времени события, происходящие в различных точках. Для измерения промежутка времени между удаленными событиями нужно иметь в тех точках, где они происходят, синхронно идущие идентичные часы.

Эйнштейновское определение одновременности удаленных событий (т.е. определение процедуры синхронизации часов) основано на независимости скорости сигнала от направления. Пусть из точки  $A$  в момент времени  $t_1$  по часам в  $A$  отправляется сигнал (рис. 5). Пусть момент прихода сигнала в точку  $B$  и его отражения назад есть  $t'$  по часам в точке  $B$ . Наконец, пусть отраженный сигнал приходит в точку  $A$  в момент  $t_2$  по часам в  $A$ . Тогда *по определению* часы в точках  $A$  и  $B$  идут синхронно, если  $t' = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ .

Подчеркнем, что в нерелятивистской физике принималось как нечто само собой разумеющееся существование единого мирового времени, не зависящего от системы отсчета, и потому неявно допускалось, что понятие одновременности со-

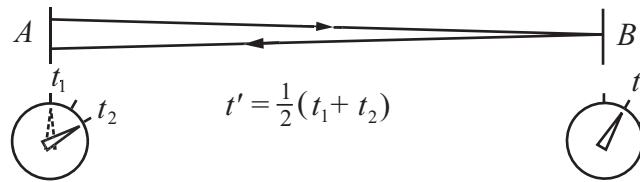


Рис. 5: К определению понятия одновременности событий

бытий, происходящих в разных точках пространства, не нуждается в определении, и любой способ синхронизации часов (путем световых сигналов или путем перевозки хронометров) должен дать одно и то же. На самом деле это не так. Если часы в точках  $A$  и  $B$  синхронизированы путем световых сигналов, как было описано выше, и хронометр, сверенный с часами в  $A$ , перевозится в точку  $B$ , то его показания, вообще говоря, не совпадут с показаниями находящихся там часов, а будут зависеть от скорости перевозки. Совпадение будет лишь при бесконечно малой скорости перевозки хронометра.

## 6.2 Измерение расстояний

С точки зрения релятивистских постулатов операцию измерения расстояний разумно по определению выбрать на основе «радиолокационного» способа: из некоторого пункта посылаются световые или радиосигналы, которые после отражения от наблюдаемого предмета возвращаются в точку отправления. При этом измеряется время прохождения сигнала туда и обратно по часам, связанным с радиолокатором. Расстояние  $l$  до предмета получают, умножая одинаковую по всем направлениям (универсальную) скорость  $c$  на половину времени прохождения сигнала туда и обратно:  $l = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$ .

Если речь идет об измерении расстояния до движущегося относительно радиолокатора объекта, т. е. измеряемое расстояние  $l(t)$  изменяется со временем, то измеренное значения расстояния  $l = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$  относится к моменту времени  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$  по часам радиолокатора, где  $t_1$  есть момент отправления сигнала,  $t_2$  — момент возвращения отраженного сигнала. Это определение также основывается на независимости скорости сигнала от направления.

В принципиальном отношении такой способ важен потому, что в нем измерение расстояний сводится к измерению времени, и отпадает необходимость в отдельном эталоне длины. На этой основе в метрологии в конце 1980-х годов перешли от существовавших ранее независимых эталонов длины и времени к единому эталону. При переходе к единому эталону длины и времени интерференционные методы измерения расстояний, используемые в метрологии, принципиально перестали отличаться от «радиолокационного» метода. Длина волны излучения эталонного источника лежит в основе единицы длины, а его частота (период) — в основе определения единицы времени. Подчеркнем, что при переходе к единому эталону числовое значение скорости света  $c$  получается не как результат измерений (неизбежно содержащий некоторую погрешность), а вводится по определению (т. е. *точно*) на основе международного соглашения. Разумеется, это значение выбрано так, чтобы обеспечивалась преемственность с прежними эталонами длины и времени.

### 6.3 Относительность одновременности

В нерелятивистской физике понятие одновременности событий, в соответствии с классическими представлениями о пространстве и времени, предполагалось абсолютным, не зависящим от системы отсчета: если два события происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они будут одновременными и для любого другого. В релятивистской кинематике понятие одновременности событий принимает относительный характер. Утверждение, что два пространственно удаленных события происходят одновременно, имеет смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

В том, что одновременные в некоторой системе отсчета пространственно удаленные события уже не являются одновременными с точки зрения другой системы отсчета, можно убедиться с помощью следующего мысленного эксперимента.

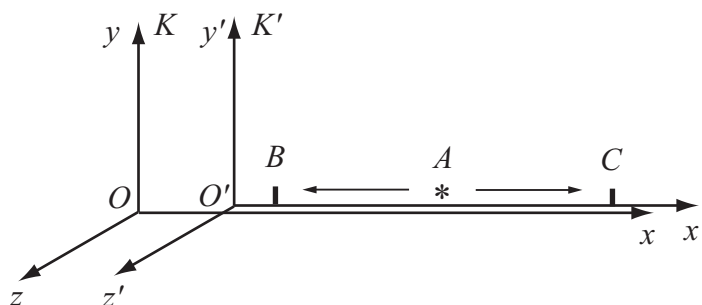


Рис. 6: Относительный характер одновременности событий

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$ , причем  $K'$  движется относительно  $K$  в положительном направлении оси  $Ox$ . Пусть из некоторой точки  $A$  на оси  $Ox'$  одновременно отправляются сигналы во взаимно противоположных направлениях (рис. 6). Рассмотрим с точки зрения системы  $K'$  приход этих сигналов в точки  $B$  и  $C$  системы  $K'$ , равноудаленные от точки  $A$  (можно считать, что в этих точках системы  $K'$  находятся приемники сигналов). Очевидно, что сигналы достигнут точек  $B$  и  $C$  одновременно по часам системы  $K'$ , так как преодолевают на пути к  $B$  и  $C$  одинаковые расстояния. Легко видеть, однако, что эти же два события, а именно достижение сигналами приемников в точках  $B$  и  $C$ , одновременные в  $K'$ , отнюдь не будут одновременными для наблюдателя в системе  $K$ . В самом деле, согласно принципу относительности, скорость сигналов в  $K$  также не зависит от направления, но точка  $B$  движется относительно  $K$  вправо, навстречу посланному в нее сигналу, а точка  $C$  движется по направлению от посланного в нее сигнала. Поэтому с точки зрения наблюдателя в системе  $K$  сигналу, распространяющемуся с одной и той же конечной скоростью, придется на пути в  $B$  преодолевать меньшее расстояние, нежели на пути в  $C$ . Следовательно, в системе  $K$  сигнал в точку  $B$  приходит раньше, чем в  $C$ . Эти события, будучи одновременными в  $K'$ , не одновременны в  $K$ , что свидетельствует об *относительном характере* понятия одновременности событий.

## 6.4 Преобразование промежутков времени

Пусть два события происходят с точки зрения некоторой системы отсчета, скажем, системы  $K'$ , в одном и том же месте, и промежуток времени между ними равен  $\tau_0$  по часам системы отсчета  $K'$ . Этот промежуток времени  $\tau_0$  будет *собственным* временем между данными событиями (собственным временем для некоторой пары событий называется промежуток времени, измеренный в той системе отсчета, где эти события происходят в одном месте). Отметим, что собственный промежуток времени  $\tau_0$  измеряется по одним и тем же часам (в системе  $K'$  оба события происходят в одной и том же месте), но в системе  $K$  эти события происходят в разных местах, и для измерения промежутка времени между ними необходимо пользоваться показаниями разных часов, находящихся в тех точках, где происходят эти события (часы, разумеется, должны быть предварительно синхронизированы).

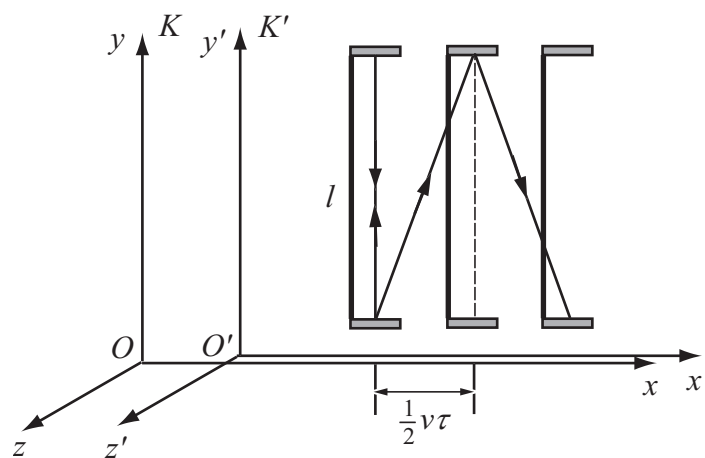


Рис. 7: К выводу преобразования промежутков времени

Формулу преобразования промежутков времени можно получить, исходя непосредственно из постулатов теории относительности, анализируя следующий мысленный опыт со «световыми часами» (рис. 7). На концах стержня длиной  $l$  закреплены два параллельных зеркала. Между зеркалами движется короткий световой импульс, поочередно отражаясь от каждого из зеркал. Пусть этот прибор неподвижен в системе  $K'$ , а его стержень расположен перпендикулярно скорости  $\vec{v}$  системы  $K'$  относительно  $K$ . Рассмотрим один цикл таких часов, т. е. выход светового импульса от нижнего зеркала и его возвращение после отражения от верхнего зеркала, с точки зрения каждой из систем отсчета. В системе  $K'$  оба рассматриваемые события происходят в одной и том же месте, поэтому промежуток времени между ними в  $K'$  равен собственному времени  $\tau_0$ . Так как скорость сигнала равна  $c$ , то  $\tau_0 = 2l/c$ . С точки зрения системы  $K$  часы находятся в движении, и световой импульс движется между зеркалами зигзагообразно (см. рис. 7). Свет при этом проходит больший путь за один цикл, и, следовательно, промежуток времени  $\tau$  между теми же событиями, измеренный в системе  $K$ , больше, чем в  $K'$ :  $\tau > \tau_0$ . В этом рассуждении мы опираемся на то, что, согласно второму постулату, скорость света  $c$  одинакова в системах отсчета  $K'$  и  $K$ .

Найдем количественную связь  $\tau$  и  $\tau_0$ . Как видно из рис. 7, пройденный светом



за половину одного цикла путь равен  $\sqrt{l^2 + (v\tau/2)^2}$ , и для определения  $\tau$  можно написать следующее уравнение:

$$c\tau = 2\sqrt{l^2 + (v\tau/2)^2}, \quad \text{откуда} \quad \tau = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24)$$

Но, как было отмечено выше,  $2l/c = \tau_0$ . Поэтому из (24) получаем искомую связь между  $\tau$  и  $\tau_0$ :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (25)$$

Таким образом, величина промежутка времени между событиями зависит от системы отсчета, в которой она измеряется, т. е. представляет собой величину относительную. Так как  $\tau > \tau_0$  при любой  $v \neq 0$ , то собственное время всегда меньше, чем промежуток времени между этими же событиями, измеренный в любой другой системе отсчета. Этот кинематический релятивистский эффект называют замедлением, или «растяжением», времени. С точки зрения наблюдателя  $K$  идентичные по устройству движущиеся часы (т. е. часы в  $K'$ ) идут медленнее, чем его собственные. Речь здесь идет о сравнении показаний одних и тех же движущихся часов с показаниями идентичных, но разных (находящихся в разных точках) неподвижных часов. Синхронизированные для неподвижного в  $K$  наблюдателя, эти часы уже не будут синхронизированы для движущегося (т. е. находящегося в  $K'$ ) наблюдателя. Это отсутствие синхронизации между часами, находящимися в разных системах отсчета, отражает относительный характер одновременности событий.

Рассмотренный релятивистский эффект замедления времени является *взаимным*, как того требует принцип относительности, т. е. постулат о равноправии инерциальных систем отсчета  $K$  и  $K'$ : с точки зрения наблюдателя в системе  $K'$  медленнее идут часы, связанные с системой  $K$ .

## 6.5 Преобразование пространственных расстояний

Покажем, что длина твердого стержня, расположенного вдоль относительной скорости систем отсчета  $K$  и  $K'$ , будет разной в этих системах отсчета. Рассмотрим следующий мысленный опыт, схема которого показана на рис. 8.

Пусть жесткий стержень покоится в системе отсчета  $K'$ . Его длину, измеренную в этой системе отсчета, называют *собственной длиной*, или длиной покоя. Обозначим ее  $l_0$ , а длину в системе  $K$ , относительно которой стержень движется параллельно самому себе со скоростью  $v$ , обозначим  $l$ . Найдем связь между  $l$  и  $l_0$ . Для этого рассмотрим два события: а) прохождение начала стержня мимо точки  $A$  на оси  $Ox$  системы  $K$ , в которой находятся часы, и б) прохождение конца стержня мимо этой же точки. В системе отсчета  $K$  эти события происходят в одном месте — в точке  $A$ . Поэтому промежуток времени между ними в этой системе отсчета  $K$  является собственным временем  $\tau_0$  и измеряется по одним и тем же часам, находящимся в точке  $A$ . Относительно системы отсчета  $K$  стержень движется со скоростью  $v$ . Умножив эту скорость на промежуток времени  $\tau_0$ , получим длину стержня  $l$  в системе  $K$ :  $l = v\tau_0$ .

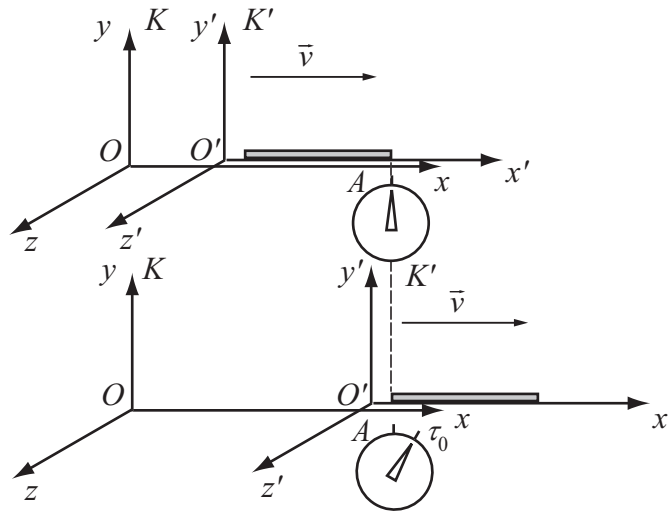


Рис. 8: К выводу преобразования пространственных расстояний

Но с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  точка  $A$  движется вдоль неподвижного стержня влево с такой же по модулю скоростью  $v$ . Поэтому для длины стержня  $l_0$  в системе  $K'$  можно написать соотношение  $l_0 = v\tau$ , где  $\tau$  есть промежуток времени между теми же событиями а) и б), измеренный по часам в системе отсчета  $K'$ . Согласно формуле (25) промежуток времени  $\tau$  связан с собственным временем  $\tau_0$  между теми же событиями соотношением  $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Тогда, разделив почленно соотношение  $l = v\tau_0$  на  $l_0 = v\tau$ , находим

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (26)$$

Мы приходим к выводу, что в общем случае длина стержня, а тем самым и пространственное расстояние между точками, зависит от системы отсчета, в которой производится измерение, т. е. расстояние в релятивистской механике представляет собой величину относительную. Длина стержня будет наибольшей при измерении в той системе отсчета, где стержень покоится (собственная длина). Движущиеся относительно наблюдателя тела сокращаются в направлении своего движения. Этот кинематический релятивистский эффект называют «лоренцевым сокращением» (сокращением Лоренца – Фитцджеральда). Лоренцево сокращение движущихся тел отражает относительный характер расстояния между пространственными точками в теории относительности, т. е. зависимость результатов измерения расстояния от системы отсчета, в которой это измерение производится. Подчеркнем, что лоренцево сокращение представляет собой чисто кинематический эффект зависимости результатов измерений от системы отсчета: оно не связано с какими-либо явлениями или процессами в самом стержне (вроде появления каких-либо внутренних напряжений) при переходе в движущуюся систему отсчета.

В полном соответствии с принципом относительности эффект сокращения длины стержня является взаимным: если такой же стержень покоится в системе отсчета  $K$ , то длина стержня в этой системе равна собственной длине  $l_0$ , а его длина  $l$  с точки зрения движущейся относительно стержня системы отсчета  $K'$  будет меньше в соответствии с формулой (26).

## 6.6 Релятивистский эффект Доплера

Эффект Доплера заключается в зависимости частоты принимаемых периодических сигналов от относительной скорости источника и приемника. Продольный эффект Доплера наблюдается, если относительная скорость источника и приемника направлена вдоль линии, их соединяющей. Пусть, например, источник находится в начале координат системы отсчета  $K'$ , так что его координата  $x' = 0$ . Пусть приемник находится в начале координат системы  $K$ , так что его координата  $x = 0$ . Источник посылает сигналы через одинаковые промежутки времени, которые равны  $\tau_0$  по часам, связанным с источником. Найдем промежутки времени  $T$  между последовательными принимаемыми сигналами по часам, связанным с приемником.

Будем для определенности считать, что первый из сигналов, например кратковременная вспышка света, посылается источником в момент времени  $t = 0$ , когда начала координат систем  $K$  и  $K'$  совпадают. Этот сигнал достигнет находящегося рядом приемника в тот же момент времени  $t = 0$ . Второй сигнал посылается из точки  $x' = 0$  спустя промежуток времени  $\tau_0$  по часам в  $K'$ , связанным с источником, т. е. в момент времени  $\tau = \tau_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  по часам в системе  $K$ . Этот сигнал на пути к приемнику должен преодолеть расстояние  $x$ , где  $x = v\tau$  — координата источника в системе  $K$  в момент отправления второго сигнала. Поэтому он достигнет приемника в момент времени  $T$  (по часам в  $K$ ), равный  $\tau + x/c$ . Таким образом, промежуток времени между двумя последовательными сигналами, приходящими к приемнику, измеренный по часам в системе приемника  $K$ , оказывается равным

$$T = \tau \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \tau_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Отсюда следует, что при относительном движении источника и приемника частота принимаемых сигналов  $\nu = 1/T$  связана с собственной частотой  $\nu_0 = 1/\tau_0$  (т. е. частотой в системе отсчета, в которой приемник покоится относительно источника) соотношением:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \quad (27)$$

В формуле (27) нужно относительную скорость  $v$  источника и приемника считать положительной, если они удаляются друг от друга, и отрицательной, если источник и приемник сближаются.

При малых по сравнению со скоростью света значениях относительной скорости (при  $v/c \ll 1$ ) формулу (27) можно упростить, ограничившись членами первого порядка по  $v/c$ :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{v}{c}, \quad (28)$$

где  $\Delta\nu = \nu - \nu_0$  — сдвиг частоты, т. е. разность частот принимаемых и посылаемых сигналов. Формула (28) соответствует результату нерелятивистской теории эффекта Доплера, в которой время рассматривается как абсолютное.

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 376–383).
2. Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969 (стр. 29–39).
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966 (стр. 12–16).
4. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972 (стр. 164–195).
5. Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006 (стр. 12–24).
6. Сборник задач по общему курсу физики. Механика (под ред. Яковлева И.А.). Изд. 4-е, М., «Наука», 1977.

По материалу лекции рекомендуется решить следующие задачи из [6]: 723, 724, 726, 728, 729, 731, 733, 736.

## 7 Преобразования Лоренца и следствия из них

### Содержание темы

Преобразования Лоренца. Кинематические следствия преобразований Лоренца. Релятивистский закон преобразования скорости. Относительная скорость и скорость сближения. Абберрация света.

### 7.1 Преобразования Лоренца

Релятивистский закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой мы получим здесь из формул преобразования промежутков времени и пространственных расстояний, которые были выведены выше непосредственно из постулатов теории относительности. Релятивистские преобразования координат и времени события должны заменить собой преобразования Галилея, основанные на классических представлениях об абсолютном характере промежутков времени и пространственных расстояний.

Рассмотрим описание некоторого события  $A$  в двух инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , считая, как и прежде, что система  $K'$  движется относительно  $K$  в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $v$ , и что в момент времени  $t = 0$  начала координат систем отсчета  $K$  и  $K'$  совпадают. Пусть координаты и время события  $A$  в системе  $K$  есть  $x, y, z$  и  $t$ , а в системе  $K'$  — соответственно  $x', y', z'$  и  $t'$  (рис. 9).

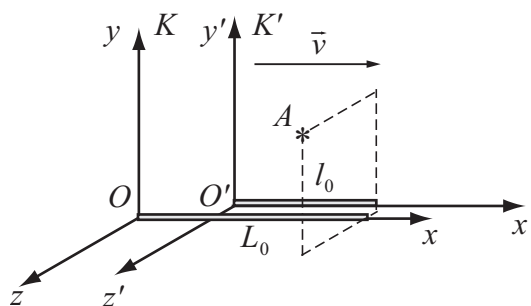


Рис. 9: К выводу преобразований Лоренца

Расстояния в направлениях, перпендикулярных к относительной скорости  $\vec{v}$  систем отсчета одинаковы в  $K$  и в  $K'$ , поэтому  $y = y'$  и  $z = z'$ . Чтобы выразить координату  $x$  события  $A$  через  $x'$  и  $t'$ , расположим мысленно жесткий стержень вдоль оси  $Ox$  от начала координат до точки  $x$ . Очевидно, что координата  $x$  события  $A$  есть просто собственная длина этого стержня. Обозначим ее через  $L_0$ . Длина  $L$  этого же стержня в системе отсчета  $K'$ , относительно которой стержень движется со скоростью  $-v$ , в соответствии с релятивистской формулой преобразования длины (см. лекцию 7), дается выражением  $L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . С точки зрения наблюдателя в  $K'$ , длину стержня  $L$  можно представить как сумму расстояния  $vt'$  между точками  $O$  и  $O'$  в момент времени  $t'$ , когда по его часам происходит событие

$A$ , и координаты  $x'$  события  $A$  (см. рис. 9). Таким образом,  $L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = x' + vt'$ . Учитывая, что  $L_0 = x$ , получаем отсюда следующую формулу, выражающую координату  $x$  события  $A$  в системе  $K$  через координату  $x'$  и время  $t'$  этого же события в системе отсчета  $K'$ :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (29)$$

Чтобы получить недостающую формулу для момента времени  $t$  через  $x'$  и  $t'$ , мысленно расположим теперь жесткий стержень в системе  $K'$  протяженностью от начала координат  $O'$  до точки  $x'$ . Очевидно, что координата  $x'$  события  $A$  есть как раз собственная длина этого стержня. Обозначим ее  $l_0$ . Относительно системы  $K$  этот стержень движется (вместе с системой  $K'$ ) со скоростью  $v$ , и его длина  $l$  в  $K$  равна  $l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , т. е.  $x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Теперь наблюдатель в  $K$  может представить координату  $x$  события  $A$  как сумму расстояния  $OO' = vt$  между точками  $O$  и  $O'$  в момент времени  $t$ , когда по его часам происходит событие  $A$ , и длины стержня  $l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Так как  $l_0 = x'$ , получаем  $x = vt + x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Выразим здесь  $x$  через  $x'$  и  $t'$  с помощью (29). В результате после простых преобразований получаем окончательное выражение для  $t$  через  $x'$  и  $t'$ :

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (30)$$

Формулы (29) и (30) дают искомый закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они носят название *преобразований Лоренца*. Выпишем их еще раз вместе:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (31)$$

Обратные преобразования от системы  $K$  к  $K'$  можно получить, разрешая уравнения (31) относительно  $x'$  и  $t'$ :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (32)$$

Разумеется, обратные преобразования Лоренца (32) отличаются от прямых (31) лишь заменой  $v \rightarrow -v$  в полном соответствии с принципом относительности, утверждающим равноправие систем отсчета  $K$  и  $K'$ .

Если относительная скорость  $v$  систем отсчета  $K$  и  $K'$  много меньше скорости света  $c$ , преобразования Лоренца (31), как легко проверить, переходят в преобразования Галилея (см. лекцию 6). Это означает, что теория относительности не отвергает преобразования Галилея как неправильные, а включает их в правильные преобразования — преобразования Лоренца — как *предельный случай*, справедливый при относительных скоростях систем отсчета  $K$  и  $K'$ , малых по сравнению со скоростью света (при  $v \ll c$ ). Иными словами, теория относительности не отвергает классические представления о пространстве и времени и опирающуюся на эти представления классическую (нерелятивистскую) физику, а устанавливает *границы применимости* нерелятивистских представлений.

## 7.2 Следствия преобразований Лоренца

Покажем, как из формул преобразований Лоренца можно увидеть относительность одновременности событий (т. е. относительный характер синхронизации часов). Рассмотрим совокупность событий, одновременных с точки зрения системы отсчета  $K$ , но происходящих в разных точках оси  $x$ . Пусть, например, эти события заключаются в прохождении через нулевое деление стрелок разных часов, неподвижных и предварительно синхронизированных в системе отсчета  $K$  (рис. 10, а).

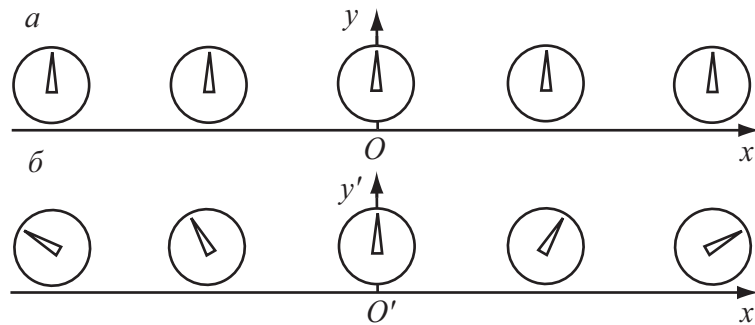


Рис. 10: Относительность синхронизации часов

Поставим вопрос: какими будут показания этих часов с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  в один и тот же момент времени  $t' = 0$ ? Подчеркнем, что речь теперь идет о событиях, одновременных в системе отсчета  $K'$ . Подставляя  $t' = 0$  в последнюю из формул (31) преобразований Лоренца, находим, что одновременным с точки зрения системы  $K'$  событиям, происходящим в разных точках оси  $x'$ , соответствуют не совпадающие моменты времени в системе отсчета  $K$ :

$$t = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x'. \quad (33)$$

С точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  стрелки только тех часов (неподвижных в системе отсчета  $K$ ), что находятся в начале координат (т. е. при  $x' = 0$ ), показывают в момент  $t' = 0$  на нулевое деление  $t = 0$ . Показания всех остальных часов, в соответствии с (33), будут различаться в зависимости от координаты  $x'$ , указывающей их положение на оси  $x'$  в этот момент времени  $t' = 0$  (см. рис. 10, б). В этом проявляется относительный характер одновременности событий и синхронизации часов: неподвижные и синхронизированные в системе отсчета  $K$  часы с точки зрения наблюдателя в другой системе отсчета  $K'$  (относительно которого все эти часы движутся) уже не будут синхронизированными.

Из преобразований Лоренца (31) следует релятивистский закон преобразования скорости частицы. Пусть радиус-вектор  $\vec{r}(t)$  задает положение движущейся частицы в момент времени  $t$  в системе  $K$ , а  $\vec{r}'(t')$  — положение той же частицы в системе  $K'$  в момент времени  $t'$ . Тогда  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$  — скорость этой частицы относительно системы  $K$ , а  $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$  — скорость той же частицы относительно системы отсчета  $K'$ . Рассматривая движение частицы как непрерывную последовательность событий, можно найти связь между проекциями вектора скорости  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$  в двух системах отсчета следующим образом:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'} \frac{1}{(dt/dt')}. \quad (34)$$

Производные  $d\vec{r}/dt'$  и  $dt/dt'$  в правой части (34) найдем с помощью преобразований Лоренца (31). При дифференцировании нужно принимать во внимание то, что  $\vec{r}(t)$  и  $t$  зависят от  $t'$  не только явно, но и через  $\vec{r}'(t')$ . В результате получаем:

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( \frac{dx'}{dt'} + v \right), \quad \frac{dy}{dt'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad \frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'}, \quad (35)$$

и, наконец,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( 1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right). \quad (36)$$

Подставляя выражения (35) и (36) в (34), получаем искомый релятивистский закон преобразования скорости частицы:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \quad (37)$$

В предельном случае медленных движений, когда и скорость частицы, и относительная скорость двух систем отсчета много меньше скорости света (т. е. при  $v \ll c$ ,  $|u'_x| \ll c$ ) выражения (37) переходят в классические формулы преобразования скорости, вытекающие из преобразований Галилея. Отметим, что релятивистский закон преобразования скорости частицы (37) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой отнюдь не сводится к векторному сложению относительной ( $\vec{u}'$ ) и переносной ( $\vec{v}$ ) скоростей. Впрочем, это не означает, что в релятивистской механике скорость частицы вообще нельзя рассматривать как векторную величину: при разложении на составляющие в рамках какой-либо одной системы отсчета скорость ведет себя как обычный вектор, т. е. полная скорость равна векторной сумме скоростей отдельных движений, на которые мы разлагаем движение частицы.

Формулы для обратного преобразования скорости при переходе от системы отсчета  $K$  к  $K'$  можно получить из (37) изменением знака скорости  $v$  одной системы отсчета относительно другой:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \quad (38)$$

Релятивистский закон преобразования скорости согласуется, разумеется, с исходным постулатом об абсолютном характере предельной скорости (скорости света  $c$ ). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, световой импульс, распространяющийся вдоль оси  $Ox'$  со скоростью  $c$  относительно системы отсчета  $K'$ . Чтобы найти его скорость относительно системы отсчета  $K$ , в формулах (37) положим  $u'_x = c$ . При этом первая из формул (37) дает

$$u_x = \frac{c + v}{1 + v/c} = c,$$



т. е. световой импульс и относительно системы отсчета  $K$  распространяется с той же предельной скоростью  $c$ .

Закон преобразования скорости (37) находится также в полном соответствии с тем, что скорость  $c$  ставит предел достижимым скоростям движения материальных тел: никакая материальная частица ни в какой системе отсчета не может иметь скорость, превышающую скорость света  $c$ . Покажем это. Рассмотрим для определенности частицу, движущуюся вдоль оси  $Ox'$ . Ее скорость  $u'$  относительно системы отсчета  $K'$  меньше скорости света:  $u' < c$ . Тогда из формул (37) следует, что и в системе отсчета  $K$ , относительно которой  $K'$  движется со скоростью  $v$ , сколь угодно близкой к скорости света (но, разумеется,  $v < c$ ), скорость частицы всегда будет меньше скорости света:  $u < c$ . В самом деле, в этом случае (37) сводится к выражению

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}, \quad (39)$$

из которого в результате простых преобразований получаем:

$$u - c = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} - c = \frac{(u' - c)(1 - v/c)}{1 + u'v/c^2} < 0.$$

Отсюда следует, что даже при сколь угодно большой относительной скорости  $v$  (но  $v < c$ ) скорость частицы в системе отсчета  $K$  будет меньше скорости света:  $u < c$  (так как  $u' < c$ ). Например, если частица движется относительно системы отсчета  $K'$  со скоростью  $u' = \frac{3}{4}c$ , а система отсчета  $K'$  с такой же скоростью  $v = \frac{3}{4}c$  относительно системы отсчета  $K$ , то, в соответствии с (39), эта частица движется относительно системы отсчета  $K$  со скоростью  $u = \frac{3}{2}c / (1 + \frac{9}{16}) = \frac{24}{25}c$ .

### 7.3 Относительная скорость разлетающихся частиц

Рассмотрим мысленный опыт, в котором покоящаяся радиоактивная частица распадается на два одинаковых осколка, разлетающихся с большими скоростями. Из сохранения импульса следует, что относительно лаборатории скорости осколков одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны (рис. 11). Пусть, например, эти скорости равны  $3/4$  скорости света. С какой скоростью разлетаются осколки?

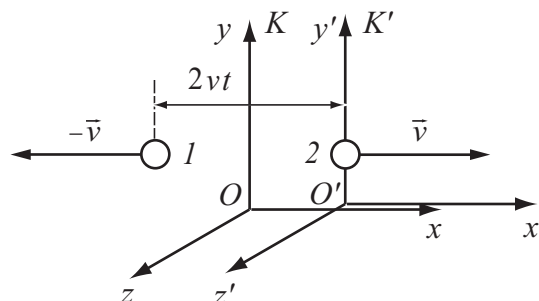


Рис. 11: Движение одинаковых осколков относительно лаборатории.

Если *скоростью разлета* осколков в лабораторной системе отсчета называть величину  $u = dl/dt$ , где  $l(t)$  — расстояние между осколками, измеренное в лабораторной системе отсчета, то при скоростях самих осколков  $v = \frac{3}{4}c$  для скорости разлета получим значение  $u = 2v = \frac{3}{2}c$ , в полтора раза превышающее скорость света. Противоречит ли такое заключение постулату теории относительности о пределе  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с для скоростей любых движений?

В действительности этот постулат теории относительности утверждает лишь невозможность передачи *сигнала*, какого бы то ни было *воздействия*, какой-либо *информации* со скоростью, превышающей скорость света. Ясно, что введенная выше скорость разлета осколков, измеряемая в лабораторной системе отсчета, не имеет отношения к передаче сигналов.

Другое дело, если говорить о скорости, с которой любой из осколков движется относительно другого, т. е. о величине, которую можно назвать *относительной скоростью* разлетающихся осколков. Скорость одной частицы относительно другой должна удовлетворять релятивистским постулатам и поэтому не может превышать скорость света. Чтобы найти относительную скорость, нужно перейти из лабораторной системы отсчета (пусть это будет система  $K$ ), где скорости осколков 1 и 2 равны  $-\vec{v}$  и  $\vec{v}$  соответственно, в систему отсчета, связанную с одним из осколков, например, в систему отсчета  $K'$ , связанную с осколком 2 (см. рис. 11). Относительно  $K'$  скорость второго осколка  $v'_2 = 0$ , а для нахождения скорости осколка 1 (т. е. величины  $v'_1$ ) нужно обратиться к первой из формул (38), подставив в нее  $u_x = -v$  (скорость осколка 1 относительно  $K$ ). В результате получаем  $v'_1 = -2v/(1 + v^2/c^2) = -\frac{24}{25}c$  (при  $v = \frac{3}{4}c$ ) — относительная скорость разлетающихся частиц меньше скорости света, в полном согласии с постулатами теории относительности.

Понятие относительной скорости можно, разумеется, применять не только к частицам, но и к системам отсчета. Введем кроме системы  $K'$ , движущейся относительно  $K$  со скоростью  $v_1$ , еще одну систему отсчета  $K''$ , которая движется относительно  $K'$  со скоростью  $v_2$ . Можно показать (см., например, задачу 737 в [5]), что результат последовательно выполненных преобразований Лоренца (31) для координат и времени некоторого события сначала от  $K$  к  $K'$ , а затем от  $K'$  к  $K''$  эквивалентен одному преобразованию Лоренца непосредственно от системы  $K$  к  $K''$ , причем относительная скорость  $v$  систем  $K''$  и  $K$  выражается через  $v_1$  и  $v_2$  следующим соотношением, соответствующим релятивистскому закону преобразования скорости (37):

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (40)$$

Результат такого сложения относительных скоростей никогда не превышает скорости света  $c$ .

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 366–376).
2. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 519–529).

3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966 (стр. 28–31).
4. Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006 (стр. 26–34).
5. Сборник задач по общему курсу физики. Механика (под ред. Яковлева И.А.). Изд. 4-е, М., «Наука», 1977.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [5]: 730, 733, 734, 737, 739, 740, 741, 742 .

## 8 Пространственно-временной интервал между событиями. Пространство-время Минковского

### Содержание темы

Интервал между событиями. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Четырехмерное пространство-время Минковского. Световой конус. Мировые линии. Причинность и классификация интервалов. Интерпретация относительности одновременности событий, относительности промежутков времени и расстояний с помощью диаграмм Минковского. Четырехвекторы в пространстве Минковского. Четырехмерный радиус-вектор события.

### 8.1 Пространственно-временной интервал между событиями

Из постулатов теории относительности следует, что расстояние между точками и промежутки времени между событиями, считавшиеся в классической физике абсолютными, не зависящими от системы отсчета, в действительности относительны, т. е. изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Задача нахождения абсолютного (т. е. не зависящего от точки зрения наблюдателя) выражения законов природы тесно связана с нахождением абсолютных, инвариантных величин. Одна из таких величин фигурирует уже в основных постулатах теории — это максимальная скорость распространения взаимодействий, равная скорости света в пустоте. Другая инвариантная величина — *пространственно-временной интервал между событиями*, обобщающий понятия расстояния в пространстве и промежутка времени. Интервал для произвольной пары событий определяется следующим образом:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \quad (41)$$

где  $t_{12} = t_2 - t_1$  — промежуток времени между рассматриваемыми событиями, измеренный в некоторой системе отсчета, а

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

— пространственное расстояние между точками, в которых произошли эти события, измеренное в той же системе отсчета. В частности, если одно из событий происходит при  $t = 0$  в начале координат  $x = y = z = 0$ , а второе — в момент времени  $t$  в точке  $x, y, z$ , то, в соответствии с определением (41), интервал между ними выражается через координаты и время второго события следующим образом:

$$s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (42)$$

Пусть, например, первое событие представляет собой вспышку света, происходящую при  $t = t' = 0$  в начале координат (которое в этот момент совпадает для систем отсчета  $K$  и  $K'$ ), а второе событие — приход фронта этой световой волны в некоторую точку. Допустим, что с точки зрения системы отсчета  $K$  второе событие произошло в точке с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . Так как свет

распространяется со скоростью  $c$ , интервал  $s$  для такой пары событий, как следует из определения (42), равен нулю:  $s = 0$ . В системе отсчета  $K'$  координаты и время второго события  $x', y', z'$  и  $t'$  будут иными, но и для них в силу инвариантности скорости света будет выполняться соотношение  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ , т. е. и в системе отсчета  $K'$  интервал между рассматриваемыми событиями равен нулю:  $s' = 0$ . Таким образом, если два события связаны между собой световым сигналом, то интервал между ними равен нулю во всех инерциальных системах отсчета. Этот результат можно рассматривать как математическое выражение абсолютного характера скорости света.

Для любой другой пары событий, не связанных световым сигналом, интервал отличен от нуля, но его величина во всех инерциальных системах отсчета одинакова:

$$\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}. \quad (43)$$

В этом легко убедиться с помощью преобразований Лоренца, выразив в левой части (43)  $x, y, z$  и  $t$  через координаты и время  $x', y', z'$  и  $t'$  этого же события в другой системе отсчета  $K'$ .

Понятие инвариантного пространственно-временного интервала между событиями обобщает понятия промежутка времени и пространственного расстояния, которые инвариантны по классическим представлениям, но не являются таковыми в релятивистской теории.

## 8.2 Классификация интервалов

В зависимости от того, какая составляющая — временная или пространственная — преобладает в интервале между рассматриваемыми событиями, возникает деление интервалов на времениподобные и пространственноподобные. Для *времениподобного интервала*  $c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2$  (или  $c^2 t^2 > x^2 + y^2 + z^2$ , если одно из пары событий происходит в начале координат в начальный момент времени), т. е. квадрат такого интервала положителен:  $s_{12}^2 > 0$ . В случае времениподобного интервала всегда можно найти такую систему отсчета  $K'$ , в которой пространственная составляющая интервала обращается в нуль:  $l'_{12} = 0$ , т. е. в  $K'$  рассматриваемые события происходят в одном месте. Промежуток времени между ними, измеренный в такой системе отсчета  $K'$ , представляет для данной пары событий собственное время:  $t'_{12} = \tau_0$ . Иначе говоря, для событий, разделенных времениподобным интервалом, всегда существует такая система отсчета, в которой интервал представляет собой (с точностью до постоянного множителя  $c$ ) просто промежуток времени  $\tau_0$  между этими событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2} = \sqrt{c^2 t_{12}'^2} = c\tau_0.$$

В случае пары событий, разделенных времениподобным интервалом, понятия «раньше» или «позже» имеют абсолютный характер, не зависящий от системы отсчета. Между такими событиями в принципе может существовать причинно-следственная связь.

Для событий, разделенных пространственноподобным интервалом,  $c^2 t_{12}^2 < l_{12}^2$  (или  $c^2 t^2 < x^2 + y^2 + z^2$ , если одно из пары событий происходит в начале коор-

динат в начальный момент времени), т. е. квадрат такого интервала отрицателен:  $s_{12}^2 < 0$ . Сам интервал в этом случае выражается мнимым числом. В случае пространственноподобного интервала всегда можно найти такую систему отсчета  $K'$ , в которой временная составляющая обращается в нуль:  $t'_{12} = 0$ , т. е. в  $K'$  рассматриваемые события происходят одновременно. Это значит, что абсолютная величина пространственноподобного интервала  $|s_{12}|$  в системе отсчета  $K'$  сводится к пространственному расстоянию между точками, в которых произошли рассматриваемые события:

$$|s_{12}| = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = \sqrt{l_{12}^2} = l'_{12}.$$

Таким образом, модуль пространственноподобного интервала  $|s_{12}|$  равен пространственному расстоянию  $l'_{12} = l_0$  между событиями, измеренному в той системе отсчета, где эти события происходят одновременно («собственное расстояние»).

Для пары событий, разделенных пространственноподобным интервалом, понятия «одновременно», «раньше», «позже» относительно: всегда можно указать такие системы отсчета, в которых первое событие происходит раньше второго, и такие, в которых второе происходит раньше первого. Очевидно, что между событиями, временная последовательность которых зависит от системы отсчета, причинно-следственные связи невозможны. Впрочем, невозможность существования причинной связи между событиями, разделенными пространственноподобным интервалом, когда  $l_{12} > ct_{12}$ , непосредственно видна из того, что никакой сигнал, никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, превышающей  $c$ .

Равный нулю интервал между событиями, связанными световым сигналом, называют *светоподобным*. В этом отношении понятие интервала как инвариантного расстояния между событиями в пространстве-времени существенно отличается от понятия расстояния между точками в евклидовой геометрии: расстояние в геометрии равно нулю только для совпадающих точек, но пространственно-временной интервал может быть равен нулю и для несовпадающих событий.

Подчеркнем, что разделение интервалов на времениподобные, пространственноподобные и светоподобные имеет абсолютный характер, т. е. не зависит от системы отсчета. Абсолютный характер рассмотренной классификации интервалов непосредственно следует из инвариантности интервала.

### 8.3 Пространство-время и геометрия Минковского

Преобразования Лоренца для координат и времени события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой можно рассматривать как геометрические преобразования в четырехмерном пространстве-времени, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время события. Перемещение пространственных координат и времени при преобразованиях Лоренца и существование инвариантной комбинации (т. е. интервала) позволяет рассматривать пространство и время как единое четырехмерное многообразие. Такая геометрическая интерпретация преобразований Лоренца впервые предложена немецким математиком Г. Минковским в 1908 г.

При выборе направления одной из осей координат (оси  $Ox$ ) в системах  $K$  и  $K'$  вдоль направления относительной скорости систем отсчета координаты  $y$  и  $z$  не за-

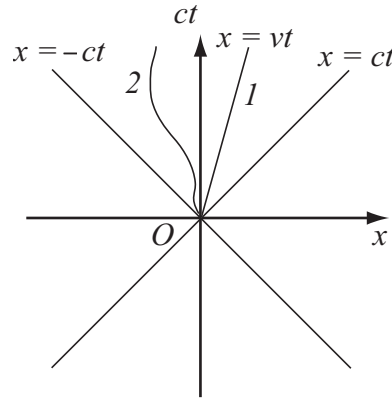


Рис. 12: Диаграмма Минковского и мировые линии

трагиваются при преобразованиях Лоренца. Поэтому для геометрической интерпретации преобразований Лоренца вместо четырехмерного пространства-времени достаточно рассматривать двумерные диаграммы пространства-времени (диаграммы Минковского), а именно плоскость  $x, ct$  (рис. 12). Некоторому событию соответствует точка этой плоскости с координатами  $(x, ct)$ , называемая *мировой точкой*.

Последовательности событий, происходящих с одной частицей, на диаграмме Минковского сопоставляется непрерывная линия, называемая *мировой линией частицы*. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Если, например, частица движется вправо вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ , то ее мировая линия на диаграмме Минковского представляет собой прямую, уравнение которой  $x = vt$  (прямая 1 на рис. 12; предполагается, что при  $t = 0$  частица находилась в точке  $x = 0$ ). Мировая линия неравномерно движущейся частицы искривлена (кривая 2 на рис. 12). Мировая линия неподвижной частицы, все время находящейся в начале координат — это ось времени (ее уравнение  $x = 0$ ). Другими словами, ось времени — это мировая линия начала координат. Совокупность точек, находящихся на оси  $Ox$  диаграммы Минковского, изображает множество одновременных событий, происходящих при  $t = 0$  в разных местах оси  $Ox$ .

Мировая линия светового сигнала, вышедшего из начала координат в момент времени  $t = 0$  и распространяющегося в положительном направлении оси  $Ox$ , имеет уравнение  $x = ct$ . Это биссектриса координатного угла на диаграмме Минковского (рис. 12). Все события, изображаемые точками этой линии, отделены от события  $(x = 0, t = 0)$  светоподобным (равным нулю) интервалом. Мировая линия сигнала, распространяющегося в отрицательном направлении оси  $Ox$ , имеет уравнение  $x = -ct$ . Вместе мировые линии световых сигналов  $x = \pm ct$ , распространяющихся из мировой точки  $(x = 0, t = 0)$ , образуют на диаграмме Минковского так называемый *световой конус*.

## 8.4 Диаграммы Минковского и системы отсчета

Введем теперь наряду с системой отсчета  $K$  систему  $K'$ , которая, как обычно, движется вдоль оси  $Ox$  вправо со скоростью  $v$ . Миртовая линия начала координат системы  $K'$  (т. е. частицы, имеющей координату  $x' = 0$  во все моменты времени  $t'$ ) дается уравнением  $x = vt$ . Поэтому ось времени  $ct'$  системы отсчета  $K'$  на рассматриваемой диаграмме Минковского (где ось  $ct$  направлена вертикально вверх) *наклонена* вправо на угол  $\theta$ , причем  $\operatorname{tg} \theta = v/c$  (рис. 13, а). Точки этой прямой изображают совокупность событий, происходящих в начале координат системы  $K'$  в разные моменты времени.

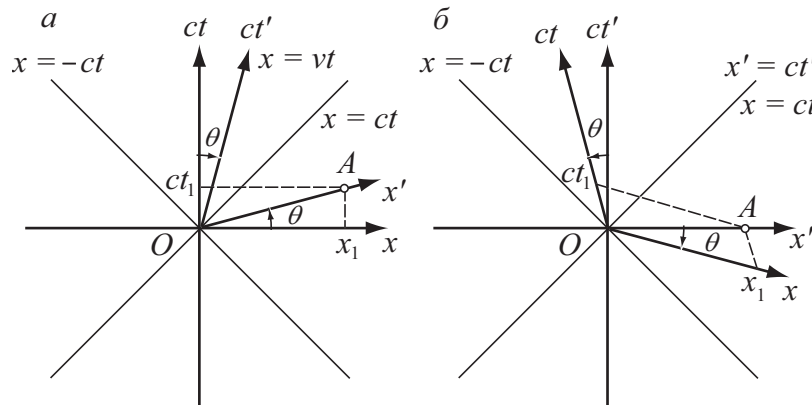


Рис. 13: Оси координат и времени системы  $K'$  на диаграмме Минковского

Ось  $Ox'$  системы отсчета  $K'$  — это прямая, на которой в пространстве-времени лежат все события, одновременные (в этой системе) с событием  $(x' = 0, t' = 0)$ . Чтобы найти уравнение этой прямой в переменных  $x, ct$ , обратимся к преобразованиям Лоренца (см. лекцию 8), и в формуле для преобразования времени

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

положим  $t' = 0$ . Отсюда получаем  $ct = (v/c)x$ , т. е. ось  $Ox'$  на диаграмме Минковского отклонена вверх от оси  $Ox$  и составляет с ней такой же угол  $\theta$  ( $\operatorname{tg} \theta = v/c$ ), как и ось  $ct'$  с осью  $ct$ . Этого и следовало ожидать, так как вследствие инвариантности скорости света миртовая линия светового сигнала  $x = ct$  (и  $x' = ct'$ ) должна быть биссектрисой координатного угла как в системе  $K$ , так и в  $K'$ . Система координат  $(x', ct')$  оказывается косоугольной на диаграмме Минковского (рис. 13, а), где оси  $(x, ct)$  системы отсчета  $K$  образуют прямой угол.

Разумеется, можно построить диаграмму Минковского и так, чтобы на ней система координат  $(x', ct')$  была прямоугольной. Но тогда система координат  $(x, ct)$ , соответствующая системе отсчета  $K$ , будет на этой диаграмме Минковского косоугольной (рис. 13, б): оси координат  $(x, ct)$  образуют на ней тупой угол.

В отличие от преобразования координат точки на плоскости в евклидовой геометрии при переходе к повернутым координатным осям, в геометрии пространства-времени инвариант преобразований представляет собой *разность* квадратов



временной и пространственной координат  $c^2t^2 - x^2$  (квадрат интервала), а не *сумму* квадратов  $x^2 + y^2$  (квадрат расстояния), как в евклидовой геометрии. Если в евклидовой геометрии обе координаты эквивалентны, то в геометрии Минковского различие между пространственной и временной координатами события проявляется в том, что в выражение для инварианта геометрических преобразований (интервала, т. е. «расстояния» между событиями в мире Минковского) квадраты пространственной и временной координат входят с противоположными знаками. Такую геометрию называют *псевдоевклидовой*.

Диаграммы пространства-времени дают наглядное геометрическое представление многим выводам теории относительности, которые с точки зрения «здорового смысла» кажутся парадоксальными. В частности, относительность одновременности двух событий можно следующим образом продемонстрировать на диаграммах рис. 13. Событие  $A(x_1, t_1)$  с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K$  произошло позже, чем событие  $O(x = 0, t = 0)$ , так как  $t_1 > 0$ . Но с точки зрения системы отсчета  $K'$  оба эти события произошли одновременно, так как соответствующие им точки диаграммы Минковского лежат на оси  $Ox'$ , т. е.  $t'_1 = t'_0 = 0$ .

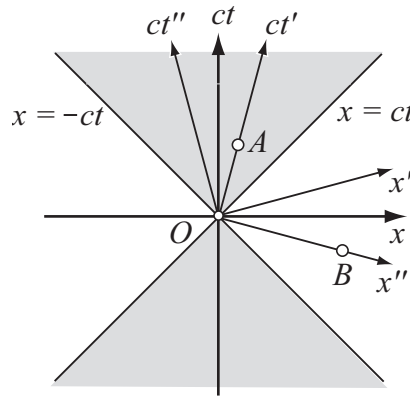


Рис. 14: Световой конус и различные области пространства-времени на диаграмме Минковского

Мировые линии световых сигналов  $x = \pm ct$  делят псевдоевклидову плоскость пространства-времени на отдельные области (рис. 14). Внутри светового конуса в заштрихованной области лежат события, отделенные от события  $O(x = 0, t = 0)$  времениподобными интервалами:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 > 0.$$

Для любого события  $A$  можно найти такую систему отсчета  $K'$ , в которой событие  $A$  произошло в одном месте с событием  $O(x' = 0, t' = 0)$ , т. е. в начале координат системы отсчета  $K'$ , так что обе точки, изображающие эти события, лежат на оси времени  $ct'$ . «Расстояние» в пространстве-времени между такими событиями равно (с точностью до постоянного множителя  $c$ ) просто промежутку времени  $t'$  между ними, измеренному в системе отсчета  $K'$ . Все события из верхней части заштрихованной области внутри светового конуса с точки зрения всех мыслимых систем отсчета произошли позже события  $O$ . Поэтому соответствующую

область пространства-времени можно назвать *абсолютным будущим* по отношению к событию  $O$ . Событие  $O$  в принципе может быть причиной любого из этих событий. События из нижней части заштрихованной области произошли абсолютно раньше события  $O$ , и эта область может быть названа *абсолютным прошлым* по отношению к событию  $O$ .

Множество событий, лежащих вне светового конуса (в незаштрихованной области на (рис. 14), можно назвать *абсолютно удаленным* по отношению к событию  $O$ . Все такие события удалены от события  $O$  пространственноподобным интервалом ( $s^2 = c^2t^2 - x^2 < 0$ ) и не могут иметь с ним причинно-следственной связи. Для любого события  $B$  из абсолютно удаленного всегда можно найти такую систему отсчета  $K''$ , с точки зрения которой оно произошло одновременно с событием  $O$  (см. рис. 14) при  $t'' = 0$ , и изображающие эти события точки лежат на оси  $Ox''$ . «Расстояние» в пространстве-времени между такими событиями (пространственно-временной интервал) выражается мнимым числом, модуль которого равен пространственной координате  $x''$  события  $B$  в системе отсчета  $K''$ .

## 8.5 Преобразование масштабов на диаграммах Минковского

На евклидовой плоскости множество точек, равноудаленных от начала координат, лежит на окружности. Поэтому при повороте осей координат единичные векторы вдоль новых осей изображаются отрезками той же длины, что и единичные векторы вдоль прежних осей. Но на псевдоевклидовой плоскости пространства-времени «расстояние» от начала координат до некоторого события — это интервал  $s = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$ . Поэтому множество точек (событий), равноудаленных от начала координат, представляет собой гиперболу  $s^2 = c^2t^2 - x^2$ .

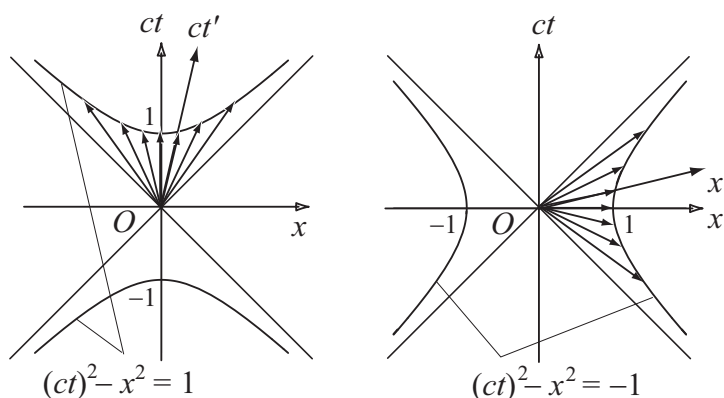


Рис. 15: Векторы единичной длины в пространстве-времени на диаграмме Минковского

Рассмотрим гиперболу  $c^2t^2 - x^2 = 1$ , для которой  $s^2 = 1$  (рис. 15, а). Она пересекает ось времени  $ct$  в точках  $ct = \pm 1$ . Если на диаграмме Минковского провести лучи из начала координат до пересечения с этой гиперболой, то отрезок каждого такого луча определит единичную длину в данном (временноподобном) направлении на псевдоевклидовой плоскости пространства-времени. Иначе говоря, данная гипербола определяет масштаб для каждого временноподобного направления

диаграммы Минковского. Для такой масштабной гиперболы возможна наглядная физическая интерпретация. Пусть из начала координат одновременно (при  $t = 0$ ) вылетают частицы, движущиеся со всевозможными скоростями, но обладающие одним и тем же собственным временем жизни  $\tau_0$ , таким, что  $c\tau_0 = 1$ . Тогда множество мировых точек, соответствующих событиям распада этих частиц, лежит в пространстве-времени как раз на масштабной гиперболе, а отрезки лучей, проведенные из начала координат до пересечения с масштабной гиперболой, представляют собой мировые линии таких частиц от рождения до распада.

Аналогично можно построить масштабную гиперболу  $c^2t^2 - x^2 = -1$  для пространственноподобных направлений на диаграмме Минковского (рис. 15, б). Эта гиперболa пересекает пространственную ось в точках  $x = \pm 1$ . Отрезки лучей из начала координат до пересечения с такой гиперболой определяют единичные расстояния в соответствующих направлениях. В частности, отрезок луча в направлении оси  $Ox'$  задает единичную длину на этой пространственной оси системы отсчета  $K'$ .

Уравнения масштабных гипербол  $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$  инвариантны относительно преобразований Лоренца. Поэтому и в косоугольных координатных осях ( $x', ct'$ ) эти гиперболы имеют уравнения  $c^2t'^2 - x'^2 = \pm 1$  и отсекают на осях  $x'$  и  $ct'$  единичные отрезки.

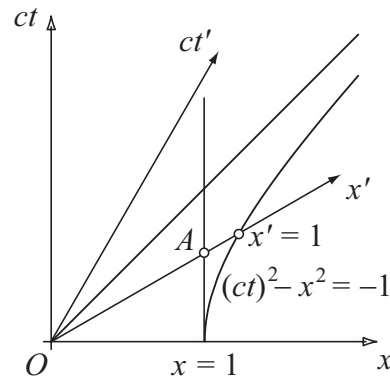


Рис. 16: Геометрическая интерпретация сокращения длины с помощью диаграммы Минковского

Используя масштабные гиперболы, можно дать на диаграмме Минковского наглядную геометрическую интерпретацию релятивистских кинематических эффектов. Рассмотрим, например, жесткий стержень единичной длины, расположенный вдоль оси  $Ox$  и покоящийся относительно системы отсчета  $K$ . На диаграмме Минковского (рис. 16) мировые линии концов этого стержня даются осью времени  $ct$  (начало координат системы отсчета  $K$ ) и прямой, параллельной оси времени и пересекающей ось  $Ox$  в точке  $x = 1$ . С точки зрения системы отсчета  $K'$  положение концов данного стержня, взятое в один и тот же момент времени  $t' = 0$  в  $K'$ , соответствует на диаграмме Минковского точкам пересечения этих мировых линий с пространственной осью  $Ox'$ , т. е. точкам  $O$  и  $A$  (рис. 16). Но расстояние  $OA$  вдоль оси  $Ox'$  в системе отсчета  $K'$  *меньше единицы*, так как единичному расстоянию соответствует отрезок оси  $Ox'$  от точки  $O$  до пересечения с масштабной

гиперболой. Таким образом, с точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  длина движущегося относительно него стержня с единичной собственной длиной оказывается меньше единицы. Этот кинематический эффект сокращения Лоренца — Фитцджеральда свидетельствует о том, что результат измерения одного и того же стержня зависит от системы отсчета, в которой производится измерение.

## 8.6 Четырехмерные векторы

Представление о четырехмерном пространстве-времени позволяет придать теории относительности особенно простое и изящное математическое выражение. По словам Г. Минковского, «отныне понятия пространства самого по себе и времени самого по себе осуждены на вымирание и превращение в бледные тени, и только своего рода объединение этих двух понятий сохранит независимую реальность».

Принцип относительности требует, чтобы уравнения, выражающие законы физики, были инвариантны относительно преобразований Лоренца. Выяснение инвариантности уравнений сильно облегчается при использовании четырехмерного пространства-времени и векторов в этом пространстве («четырёхвекторов»).

Физическое содержание любого закона не должно зависеть, например, от ориентации координатных осей. Следовательно, законы физики должны быть также инвариантны относительно поворотов системы координат в пространстве. Но обычно нам не приходится беспокоиться об инвариантности законов относительно поворотов системы координат. Это связано с тем, что при составлении уравнения, выражающего какой-либо физический закон, всегда требуют, чтобы все его члены были либо скалярами, либо векторами (либо вообще тензорами одного ранга). Тем самым автоматически обеспечивается инвариантность уравнений относительно поворотов координатных осей. Например, скалярное равенство  $a = b$  одновременно справедливо во всех системах координат, так как обе его части не изменяются при повороте осей координат.

Векторное равенство вида  $\vec{A} = \vec{B}$  эквивалентно трем равенствам  $A_x = B_x$ ,  $A_y = B_y$ ,  $A_z = B_z$ , связывающим проекции векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ . Значения этих проекций, разумеется, не инвариантны относительно поворотов системы осей. В результате поворота они примут, вообще говоря, другие значения  $A'_i$  и  $B'_i$  ( $i = x, y, z$ ). Но так как левая и правая части равенств, связывающих проекции векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , преобразуются при повороте осей координат идентичным образом, то после преобразования равенство отдельных проекций сохранится:  $A'_x = B'_x$ ,  $A'_y = B'_y$ ,  $A'_z = B'_z$ . В таких случаях говорят, что рассматриваемое равенство удовлетворяет требованию *ковариантности*. В противоположность этому равенство, связывающее проекцию вектора со скаляром, не остается справедливым при повороте осей координат.

Таким образом, инвариантность физического закона относительно преобразования координат требует ковариантности математического уравнения, выражающего этот закон.

По аналогии с поворотом системы координат в пространстве, преобразования Лоренца, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно рассматривать как преобразование четырехмерного радиуса-вектора события  $(ct, x, y, z)$  в четырехмерном пространстве-времени. В этом четырехмерном пространстве можно ввести скаляры, векторы, тензоры. Инвариантность фи-

зического закона при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой с помощью преобразований Лоренца можно сделать очевидной, если выразить этот закон в ковариантной четырехмерной форме: все члены уравнения, выражающего закон, должны быть четырехмерными тензорами одного ранга (т. е. должны быть все либо скалярами, либо векторами).

Важный пример четырехмерного вектора — радиус-вектор некоторого события  $(ct, x, y, z)$ . В дальнейшем будут рассмотрены другие четырехвекторы, в частности, четырехвектор энергии-импульса  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ . При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой проекции любых четырехвекторов преобразуются одинаковым образом в соответствии с формулами преобразований Лоренца.

Закон преобразования четырехвекторов при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (преобразования Лоренца) можно записать в компактной матричной форме. Введем для временной проекции четырехвектора обозначение  $x_0$ , а для пространственных проекций — обозначения  $x_1, x_2, x_3$ . В частности, для четырехмерного радиуса-вектора некоторого события  $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Эти проекции в системе отсчета  $K$  будут выражаться через проекции в системе  $K'$  по следующим формулам:

$$x_i = \sum_{k=0}^3 a_{ik} x'_k \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (44)$$

где матрица преобразования  $a_{ik}$  в соответствии с формулами преобразований Лоренца может быть записана следующим образом:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & 0 & 0 \\ \gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (45)$$

Из проекций любого четырехвектора можно образовать скалярную (инвариантную) величину. Для радиуса-вектора события такая величина — интервал

$$s = \sqrt{(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)},$$

остающийся неизменным при преобразованиях Лоренца подобно тому, как в евклидовой геометрии поворот осей координат оставляет неизменной длину радиуса-вектора  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени под «длиной» четырехвектора следует понимать квадратный корень из *разности* квадратов его временной и пространственной проекций. Поэтому в псевдоевклидовой геометрии существуют векторы нулевой длины с отличными от нуля проекциями, что невозможно в евклидовой геометрии. Нулевую «длину» имеют, например, радиусы-векторы всех событий, лежащих на световом конусе.

Из проекций двух четырехвекторов также можно образовать инвариантную величину — скалярное произведение четырехвекторов. В отличие от евклидовой геометрии скалярное произведение выражается не суммой произведений одноименных проекций, а разностью произведений временных и пространственных проекций четырехвекторов:

$$a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \text{inv.} \quad (46)$$

### Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 386–392, стр. 398–394).
2. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 542–548).
3. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972 (стр. 64–67).
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966 (стр. 18–19, стр. 39–52).
5. Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969 (стр. 11–16, стр. 35–57).
6. Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006 (стр. 34–46).

## 9 Основы релятивистской динамики

### Содержание темы

Релятивистский импульс частицы. Релятивистская энергия. Кинетическая энергия и энергия покоя. Масса и энергия. Эквивалентность энергии и релятивистской массы. Энергия связи атомных ядер. Превращения энергии покоя в ядерных реакциях. Реакции деления тяжелых ядер и синтеза легких ядер. Связь энергии и импульса частицы. Преобразование энергии и импульса частицы при переходе в другую систему отсчета. Четырехвектор энергии-импульса частицы. Простые задачи релятивистской динамики.

### 9.1 Принцип соответствия и релятивистский импульс

Теория относительности требует пересмотра и уточнения законов ньютоновской механики. Уравнения классической динамики (второй закон Ньютона) удовлетворяют принципу относительности в отношении преобразований Галилея. Но последние должны быть заменены преобразованиями Лоренца. Поэтому уравнения динамики следует изменить так, чтобы они оставались справедливыми при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой согласно преобразованиям Лоренца. При малых скоростях ( $v \ll c$ ) уравнения релятивистской динамики должны переходить в соответствующие классические уравнения, ибо в этой области справедливость ньютоновской механики подтверждается на опыте.

Чтобы получить релятивистское выражение для импульса частицы, можно исходить из принципа соответствия, согласно которому в классической области медленных движений ( $v \ll c$ ) релятивистское выражение должно сводиться к ньютоновскому. Напомним, что в механике Ньютона вектор импульса  $\vec{p}$  как динамическая характеристика движущейся частицы пропорционален соответствующей кинематической характеристике движения, т. е. вектору скорости  $\vec{v}$ , а постоянный для данной частицы коэффициент пропорциональности — это ее инертная масса  $m$ . В классической физике масса  $m$  частицы — постоянная величина, не зависящая от состояния ее движения. Иными словами, импульс определяется как произведение массы частицы на ее скорость:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

В релятивистской механике импульс частицы также определяется ее скоростью, но зависимость импульса от скорости оказывается сложнее, чем в классической механике и уже не сводится к простой пропорциональности. Так как импульс — вектор, то его направление должно совпадать с направлением скорости частицы. Это следует из соображений симметрии: в силу изотропности свободного пространства все направления в нем эквивалентны. Поэтому импульс свободной частицы должен быть направлен вдоль единственного физически выделенного направления, т. е. направления ее скорости. При обращении скорости в нуль импульс частицы также обращается в нуль.

Таким образом, релятивистское выражение для импульса должно иметь вид

$$\vec{p} = m_v \vec{v}, \quad (47)$$

где величина  $m_v$  может зависеть только от абсолютной величины скорости частицы  $v$ , а при  $v \ll c$  в силу принципа соответствия величина  $m_v$  должна совпадать с

массой  $m$  частицы, имеющей тот смысл, который придается инертной массе в классической механике. Величину  $m_v$ , связывающую в соотношении (47) релятивистский импульс частицы с ее скоростью, называют иногда *релятивистской массой* частицы, а ее значение  $m_0$  при  $v \rightarrow 0$  — *массой покоя*. Ниже будет показано, что

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{т. е.} \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48)$$

Релятивистские выражения (48) для импульса и массы покоя легко получить на основе кинематического релятивистского эффекта замедления времени (см. лекцию 7), если потребовать, чтобы составляющая импульса, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имела в этих системах одинаковые значения. Последнее утверждение можно строго обосновать, анализируя, например, абсолютно упругое столкновение двух частиц (см. [5], стр. 31–34, [6], стр. 48–50). Это утверждение становится очевидным, если для измерения импульса движущейся частицы принять по определению следующую процедуру. Выберем какую-либо среду, при движении сквозь которую частица испытывает сопротивление и в конце концов останавливается. Логично считать, что расстояние, проходимое частицей в такой среде до полной остановки, однозначно определяется начальным импульсом частицы. Поэтому можно измерять величину импульса свободной частицы длиной канала, пробиваемого частицей в некоторой эталонной среде. Выбором такой процедуры измерение импульса сводится к измерению пространственного расстояния. Но длина отрезка в направлении, перпендикулярном к относительной скорости двух систем отсчета, одинакова в этих системах. Тем самым и составляющая импульса свободной частицы, поперечная к относительной скорости двух систем отсчета, имеет в этих системах одинаковые значения.

В отличие от импульса, поперечная составляющая *скорости* частицы имеет разные значения в двух системах отсчета  $K$  и  $K'$ . Поэтому от классического выражения для импульса  $\vec{p} = m\vec{v}$  в виде произведения (постоянной) массы  $m$  частицы на ее скорость необходимо отказаться.

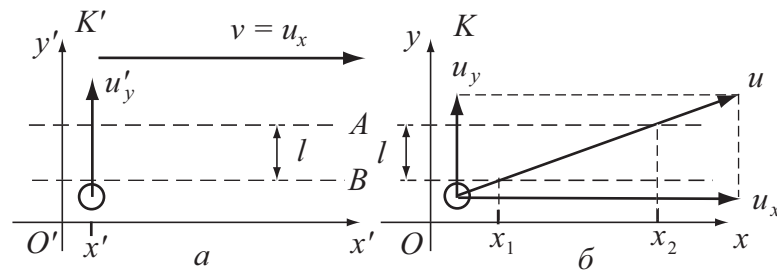


Рис. 17: К выводу выражения для релятивистского импульса

Чтобы получить релятивистское выражение для импульса, рассмотрим частицу, которая движется относительно системы отсчета  $K'$  в направлении оси  $Oy'$  с малой (нерелятивистской) скоростью  $u' \ll c$  (рис. 17, а). Для такой частицы  $x$ -составляющая скорости в системе  $K'$  равна нулю:  $u'_x = 0$ , а  $y$ -составляющая много меньше скорости света  $u'_y = u' \ll c$ . Проекции скорости этой частицы в системе



отсчета  $K$  найдем с помощью кинематических релятивистских формул преобразования скорости (см. (37), стр. 49):

$$u_x = v, \quad u_y = u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (49)$$

где учтено, что  $u'_x = 0$ . В формуле (49)  $v$  — скорость системы отсчета  $K'$  относительно  $K$ , которую можно принять сколь угодно близкой к скорости света. Таким образом, в системе отсчета  $K$   $y$ -составляющая скорости частицы меньше, чем в системе отсчета  $K'$ . Подчеркнем, что это уменьшение  $y$ -составляющей скорости при переходе от  $K'$  к  $K$  непосредственно связано с релятивистским кинематическим эффектом замедления времени (см. (25), стр. 42): одинаковое в  $K'$  и в  $K$  расстояние  $l$  между штриховыми линиями  $A$  и  $B$  на рис. 17,  $a$ ,  $b$  частица проходит с точки зрения системы  $K$  за большее время, чем с точки зрения системы  $K'$ . В самом деле, в системе  $K'$  это собственное время  $\tau_0$ , так как оба события — пересечения штриховых линий  $A$  и  $B$  — происходят в  $K'$  при одном и том же значении координаты  $x'$  (рис. 17,  $a$ ), но в системе  $K$  промежуток времени  $\tau$  между этими же событиями (происходящими в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , рис. 17,  $b$ ) больше в соответствии с выражением  $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Из-за такого замедления времени поперечная скорость частицы  $u_y = l/\tau$  в системе отсчета  $K$  оказывается меньше, чем скорость  $u'_y = l/\tau_0$  в  $K'$ . Разумеется, формулы преобразования скорости дают такой же результат.

Рассматриваемая нами частица движется относительно системы  $K'$  с нерелятивистской скоростью  $u'_y = u' \ll c$ . Поэтому в силу принципа соответствия к ней применимо классическое выражение для импульса:

$$p'_y = m_0 u'_y. \quad (50)$$

Будем считать, что скорость  $v$  системы отсчета  $K'$  относительно  $K$  много больше поперечной скорости нашей частицы, так что выполняется соотношение  $v \gg u'_y$ . Так как в силу (49)  $u_y < u'_y$ , в системе  $K$  продольная скорость частицы много больше поперечной:  $u_x = v \gg u_y$ . Тогда модуль скорости частицы относительно системы отсчета  $K$   $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  практически полностью определяется скоростью  $v$  самой системы отсчета  $K'$  относительно  $K$ :  $u = \sqrt{v^2 + u_y^2} \approx v$ . Это значит, что для поперечной составляющей импульса в системе  $K$ , в соответствии с (47), можно написать:

$$p_y = m_v u_y. \quad (51)$$

Но, как было показано выше,  $y$ -составляющая импульса частицы одинакова в системах отсчета  $K'$  и  $K$ :  $p'_y = p_y$ . Приравнявая правые части соотношений (50) и (51), и выражая  $u_y$  через  $u'_y$  с помощью (49), получаем искомое выражение (48) для релятивистской массы через массу покоя частицы и ее скорость:

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (52)$$

Уменьшение поперечной скорости частицы при переходе от  $K'$  к  $K$ , выражаемое формулой (49), компенсируется возрастанием релятивистской массы, так чтобы поперечный (к направлению относительной скорости систем отсчета  $K'$  и  $K$ )

импульс частицы оставался неизменным. Подчеркнем, что это возрастание массы связано с кинематическим релятивистским эффектом замедления времени, т. е. может рассматриваться как прямое следствие постулатов теории относительности.

Таким образом, для зависимости релятивистского импульса  $\vec{p} = m_v \vec{v}$  от скорости частицы получаем окончательно выражение (48),

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (53)$$

Скорость частицы в любой системе отсчета имеет конечную величину — она всегда меньше скорости света  $c$ , но это не налагает, как видно из формулы (53), никаких ограничений на величину импульса частицы: при  $v \rightarrow c$  импульс возрастает неограниченно.

## 9.2 Релятивистская энергия

Прежде всего получим выражение для энергии частицы, согласующееся с релятивистской формулой (53) для импульса частицы. Будем исходить из того, что в механике скорость изменения импульса частицы  $d\vec{p}/dt$  определяется полной силой  $\vec{F}$ , действующей на частицу:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (54)$$

а скорость изменения кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  равна работе, совершаемой полной силой за единицу времени:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (55)$$

Подставляя в соотношение (55) силу  $\vec{F}$  из (54), можем написать:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}). \quad (56)$$

Из этого соотношения и будем исходить при получении релятивистского выражения для кинетической энергии. Перепишем формулу (52) для релятивистской массы следующим образом:

$$m_v^2(1 - v^2/c^2) = m_0^2. \quad (57)$$

Умножим обе части (57) на  $c^2$  и раскроем скобки:

$$m_v^2 c^2 - (m_v \vec{v}^2)^2 = m_0^2 c^2. \quad (58)$$

Теперь продифференцируем обе части (58) по времени. Учитывая, что производная правой части (58) равна нулю, имеем:

$$2m_v \frac{d}{dt}(m_v c^2) - 2m_v \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}) = 0, \quad (59)$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(m_v c^2) = \vec{v} \frac{d}{dt}(m_v \vec{v}). \quad (60)$$

Сравним соотношения (60) и (56). Правые части у них совпадают. Поэтому левая часть (60), как и в (56), должна быть равна скорости изменения кинетической энергии частицы:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_v c^2) = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (61)$$

Таким образом, приращение кинетической энергии тела  $E_{\text{kin}}(v)$  сопровождается пропорциональным приращением его релятивистской массы  $m_v$ . Вспомним, что важнейшее свойство энергии состоит в способности превращаться из одной формы в другую в эквивалентных количествах при различных физических процессах — именно в этом заключается содержание закона сохранения и превращения энергии, одного из наиболее общих законов природы. Поэтому естественно ожидать, что возрастание релятивистской массы должно происходить не только при сообщении телу кинетической энергии, но при любом увеличении энергии тела, независимо от конкретного вида энергии. Отсюда можно сделать фундаментальное заключение о том, что полная энергия тела пропорциональна его релятивистской массе независимо от того, из каких конкретных видов она состоит. Этот вывод следует распространить на все виды энергии: нагретое тело имеет бóльшую массу покоя, чем холодное, сжатая или растянутая пружина имеет бóльшую массу, чем недеформированная, и т.п. Обобщение соотношения (61) на все виды энергии приводит нас к знаменитой формуле Эйнштейна, связывающей энергию и массу:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (62)$$

Из формулы (62) следует, в частности, что покоящееся тело обладает энергией  $E_0 = m_0 c^2$ . Эту энергию называют *энергией покоя*.

Например, при неупругом столкновении происходит превращение кинетической энергии сталкивающихся частиц во внутреннюю энергию (в энергию теплового движения молекул). Легко показать, что масса покоя тела, образовавшегося при неупругом столкновении, больше суммарной массы покоя исходных тел. Это означает, что увеличение внутренней энергии тела, как и увеличение кинетической энергии, сопровождается пропорциональным увеличением массы. Заметим, что согласно представлениям классической механики энергия при неупругих столкновениях не сохранялась, так как внутренняя энергия (энергия покоя) не была включена в механическую энергию.

### 9.3 Пропорциональность массы и энергии

Закон сохранения импульса в соединении с принципом относительности, требующим, чтобы этот закон выполнялся сразу во всех инерциальных системах отсчета, приводит, как мы видели, к закону сохранения релятивистской энергии.

Пропорциональность массы и энергии в любых формах тесно связана с сохранением импульса. Действительно, если бы в замкнутой системе при переходе энергии из одной формы в другую масса системы изменялась, то сохранение импульса

было бы невозможным. Внутренние превращения в системе не могут изменить импульса системы в целом, но ясно, что и скорость движения изолированного тела относительно какой-либо инерциальной системы отсчета остается при этом неизменной в соответствии с принципом относительности. Так как ни скорость, ни импульс не изменяются, то и масса покоя изолированного тела должна оставаться постоянной, какие бы внутренние превращения в нем ни происходили. Это значит, что определенное количество энергии в любой форме пропорционально одной и той же массе.

Закон пропорциональности массы и энергии представляет собой один из самых значительных выводов теории относительности. Взаимосвязь массы и энергии заслуживает подробного обсуждения (см., например, [2], стр. 152–156).

В механике масса тела есть физическая величина, характеризующая количественно инертные свойства тела, т. е. масса представляет собой меру инертности тела. Это так называемая *инертная масса*. С другой стороны, масса характеризует способность тела создавать поле тяготения и испытывать силу в поле тяготения, создаваемом другими телами. Это тяготеющая, или *гравитационная масса*. Инертность тела и его способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой проявления совершенно различных свойств материи. Однако то, что меры этих различных проявлений называют одним и тем же словом «масса», не случайно, а обусловлено тем, что оба свойства всегда существуют совместно и меры этих свойств всегда друг другу пропорциональны, так что при надлежащем выборе единиц их можно выражать одним и тем же числом.

Равенство инертной и гравитационной масс представляет собой экспериментальный факт, многократно подтвержденный с огромной степенью точности в прецизионных опытах Этвеша, Дикке, Брагинского и других. Как же следует отвечать на вопрос: есть ли инертная и гравитационная масса одно и то же или нет? По своим проявлениям они различны, но неразрывно связаны друг с другом, и их численные характеристики всегда пропорциональны. Такое положение вещей в физике характеризуют термином «эквивалентность».

Аналогичный вопрос возникает в связи с понятиями массы и энергии в теории относительности. Проявления свойств материи, соответствующих массе и энергии, бесспорно различны. Но теория относительности утверждает, что эти свойства неразрывно связаны, а численные характеристики этих свойств пропорциональны друг другу. Поэтому можно говорить об эквивалентности массы и энергии. Всякое изменение энергии системы сопровождается эквивалентным изменением ее массы. Это относится как к изменениям кинетической энергии тела, при которых масса покоя остается неизменной, так и к изменениям различных видов внутренней энергии, при которых масса покоя изменяется.

Опыт показывает, что в громадном большинстве физических процессов, в которых изменяется внутренняя энергия, масса покоя остается неизменной. Как это согласовать с законом пропорциональности массы и энергии? Дело в том, что как правило подавляющая часть внутренней энергии (и соответствующей ей массы покоя) в превращениях не участвует, и поэтому определяемая взвешиванием масса покоя практически сохраняется несмотря на то, что тело выделяет или поглощает энергию. Это объясняется просто недостаточной точностью взвешивания. Поэтому экспериментальное подтверждение релятивистского закона пропорциональности энергии и массы следует искать в ядерной физике и физике элементар-

ных частиц. Для описания процессов с атомными ядрами и элементарными частицами, характерная особенность которых заключается в изменениях энергии системы, сравнимых с ее энергией покоя, релятивистские законы абсолютно необходимы.

Рассмотрим в качестве примера ядерную реакцию, вызванную полученными на ускорителе протонами, а именно превращение ядра лития в две альфа-частицы:



Закон пропорциональности массы и энергии позволяет сделать предсказания относительно энергетического выхода ядерной реакции. Значения масс покоя атомных ядер могут быть определены с высокой точностью при помощи масс-спектрометра. Так, масса покоя протона  ${}^1_1\text{H}$  равна 1,00728 атомной единицы массы (а.е.м.), масса ядра  ${}^7_3\text{Li}$  — 7,01601 а.е.м., а масса альфа-частицы  ${}^4_2\text{He}$  — 4,00260 а.е.м. Суммарная масса покоя ядер, вступающих в реакцию, равна 8,02329 а.е.м., а масса покоя конечных продуктов реакции меньше: она составляет 8,00520 а.е.м. Таким образом, в результате ядерной реакции масса покоя уменьшается на величину  $\Delta m = 0,01809$  а.е.м. Соответствующая этому изменению массы энергия  $\Delta mc^2 = 16,85$  МэВ с хорошей точностью совпадает с измеренной на опыте кинетической энергией образующихся альфа-частиц. (Первоначальная кинетическая энергия протона мала по сравнению с этой величиной и поэтому в расчете энергетического выхода реакции не принимается во внимание).

Закон пропорциональности энергии и массы можно применить к анализу устойчивости атомных ядер. Рассмотрим атомное ядро массы  $M$ , состоящее из  $Z$  протонов и  $A - Z$  нейтронов ( $Z$  — атомный номер, т. е. заряд ядра в единицах элементарного заряда,  $A$  — массовое число, т. е. полное число нуклонов в ядре). Энергия покоя ядра  $Mc^2$  складывается из энергии покоя всех входящих в него частиц (нуклонов) и энергии внутреннего движения и взаимодействия нуклонов. Для того чтобы ядро было устойчивым и не могло самопроизвольно распасться на составные части, необходимо, чтобы энергия покоя ядра была меньше суммарной энергии покоя этих частей:

$$Mc^2 < \sum_i m_i c^2.$$

Разность  $\sum_i m_i c^2 - Mc^2$  служит мерой устойчивости ядра и называется *энергией связи*. Для ядер, содержащих 50 — 60 нуклонов, энергия связи составляет около 9 МэВ на один нуклон, т. е. достигает почти 1% энергии покоя.

Наряду с энергией связи мерой устойчивости ядра может служить эквивалентная величина  $\Delta m$ , называемая *дефектом массы*:

$$\Delta m = \sum_i m_i - M = Zm_p + (A - Z)m_n - M,$$

где  $m_p$  и  $m_n$  — массы покоя протона и нейтрона соответственно. Если дефект массы положителен, ядро устойчиво по отношению к распаду на отдельные протоны и нейтроны. Однако это еще не означает, что ядро абсолютно устойчиво. Различие в величине энергии связи на один нуклон у разных ядер может привести к тому, что

устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны ядро не будет устойчивым по отношению к распаду на две части. Такой распад возможен, если дефект массы исходного ядра  $\Delta m$  меньше, чем сумма дефектов масс  $\Delta m_1 + \Delta m_2$  двух ядер, образующихся в результате распада. Это обстоятельство можно использовать для высвобождения ядерной энергии.

Например, ядро изотопа бериллия  ${}^8_4\text{Be}$  имеет массу  $M = 8,00531$  а.е.м., которая меньше, чем сумма масс покоя составляющих его четырех протонов и четырех нейтронов  $\sum_i m_i = 4 \cdot 1,00728 + 4 \cdot 1,00867 = 8,06380$ , но больше, чем суммарная масса покоя двух ядер гелия  ${}^4_2\text{He}$  ( $2 \cdot 4,00260 = 8,00520$  а.е.м.). Поэтому ядро бериллия  ${}^8_4\text{Be}$ , устойчивое по отношению к распаду на отдельные нуклоны, должно самопроизвольно распадаться на две альфа-частицы, что и происходит в действительности.

Дефект массы ядра другого изотопа бериллия  ${}^9_4\text{Be}$  не только положителен, но и превышает сумму дефектов масс всех ядер, на которые ядро  ${}^9_4\text{Be}$  могло бы распадаться. Такое ядро абсолютно устойчиво.

## 9.4 Преобразование энергии-импульса

Компоненты вектора релятивистского импульса частицы можно рассматривать как пространственные компоненты некоторого четырехмерного вектора, а именно *четырёхмерного вектора энергии-импульса*, временной компонентой которого является энергия частицы, деленная на  $c$ .

Напомним релятивистские выражения для энергии (62) и импульса (48) частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (63)$$

Сравнивая эти выражения, легко получить простую формулу, выражающую импульс частицы через ее скорость и энергию:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (64)$$

Возведем обе части первой из формул (63) в квадрат, разделим на  $c^2$  и запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 v^2 = m_0^2 c^2. \quad (65)$$

Здесь второе слагаемое в левой части в соответствии с (64) представляет собой квадрат вектора релятивистского импульса. Поэтому соотношение (65) выражает связь между энергией и импульсом частицы:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2. \quad (66)$$

Это одна из важнейших формул релятивистской физики.

В правой части формулы (66) стоит величина, не зависящая от выбора системы отсчета. Поэтому, хотя каждое из слагаемых в левой части имеет разные

значения в различных системах отсчета, вся левая часть (66) не зависит от выбора системы отсчета, т. е. представляет собой *релятивистский инвариант*. Можно предположить, что это квадрат четырехмерного вектора (четырёхвектора энергии-импульса), пространственные компоненты которого представлены трехмерным вектором релятивистского импульса, а временная компонента — релятивистской энергией, деленной на  $c$ . В таком случае четверка величин

$$\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \quad (67)$$

должна при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразовываться по тем же правилам, что и проекции любого четырехмерного вектора, например, радиуса-вектора события  $(ct, x, y, z)$ , т. е. в соответствии с преобразованиями Лоренца (31), стр. 47. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой компоненты импульса «перемешиваются» с энергией подобно тому как пространственные компоненты радиуса-вектора события «перемешиваются» с его временной координатой. Закон преобразования четверки величин (67) при переходе от системы отсчета  $K'$  к системе  $K$  легко получить из формул преобразований Лоренца (31) простой заменой  $ct \rightarrow E/c, x \rightarrow p_x, y \rightarrow p_y, z \rightarrow p_z$ :

$$E = \frac{E' + vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \quad (68)$$

Разность квадратов временной и пространственной проекций четырехвектора энергии-импульса некоторой частицы (т. е. квадрат его «длины») дается левой частью формулы (66). Эта величина не изменяется при преобразованиях Лоренца (68), т. е. представляет собой релятивистский инвариант. Физический смысл этого инварианта — квадрат энергии покоя частицы, деленной на  $c$ .

## 9.5 Простые задачи релятивистской динамики

В лекции рассматриваются несколько простых примеров задач релятивистской динамики о движении частиц в силовых полях:

- Движение первоначально покоившейся частицы с зарядом  $q$  и массой покоя  $m_0$  в однородном постоянном электрическом поле напряженностью  $\vec{E}$ .
- Заряженная частица с импульсом  $p_0$ , направленным вдоль оси  $Oy$ , влетает в однородное постоянное электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное вдоль оси  $Ox$ . По какой траектории  $x = x(y)$  движется частица?
- Движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле  $\vec{B}$  под действием силы Лоренца.

Подробное обсуждение этих задач можно найти в [6], стр. 66–70.

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 399–414).

2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., «Физматгиз», 1961 (стр. 152–156).
3. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 536–542).
4. Тэйлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969 (стр. 142–174).
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966 (стр. 19–22, стр. 31–38, стр. 46–49).
6. Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006 (стр. 47–70).
7. Сборник задач по общему курсу физики. Механика (под ред. Яковлева И.А.). Изд. 4-е, М., «Наука», 1977.

По материалу данной лекции рекомендуется решить следующие задачи из [7]: 747, 749, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 762, 763, 766, 769, 770, 771, 772.



# 10 Движение в полях тяготения. Космическая динамика

## Содержание темы

Законы движения планет и искусственных спутников. Законы Кеплера. Круговая скорость. Скорость освобождения. Применение законов сохранения энергии и момента импульса к исследованию движения в центральном поле тяготения. Свойства замкнутых и открытых кеплеровых орбит. Годограф вектора скорости.

### 10.1 Введение

На протяжении почти двух тысячелетий астрономы безуспешно бились над поиском истинных закономерностей движений планет — светил, казалось бы бессистемно блуждающих по небу. Датский астроном Тихо Браге в течение почти всей жизни занимался тщательными измерениями видимых положений планет относительно звезд. Его многолетние записи небесных координат планет послужили тем сырым материалом, при помощи которого немецкому астроному Иоганну Кеплеру (1571 — 1630) удалось установить форму кривых, изображающих орбиты планет. Открытые Кеплером законы планетных движений были выдающимся научным достижением. Результаты многолетних наблюдений и многие тысячи измерений оказались сконцентрированными в четкой системе простых правил. Динамическое объяснение Ньютоном этой замечательной простоты можно без преувеличения считать началом современной физической науки. Это был поистине фантастический прорыв в понимании Природы. Но и поныне движения небесных тел — малых и больших планет Солнечной системы, их спутников, комет, астероидов, а в наше время также рукотворных космических кораблей и искусственных спутников, дают наиболее впечатляющие опытные подтверждения законов классической ньютоновской механики. В этой замечательной космической лаборатории все явления наблюдаются в наиболее «чистом» виде, не осложненные побочными факторами вроде трения, сопротивления воздуха и т.п., неизбежными в условиях земной лаборатории.

Теоретический фундамент, на котором построена небесная механика и ее современная ветвь — механика космического полета — это *закон всемирного тяготения* и *законы Ньютона*, составляющие основу классической динамики. Замечательно, что для движения тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра (так называемая *задача Кеплера*), возможно получение решения уравнений движения в аналитическом виде.

Любое движение в ньютоновском поле тяготения происходит по одному из так называемых *конических сечений* — кривых, которые получаются при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса получаются окружность, эллипс, парабола или гипербола. Периодическим движениям планет и спутников соответствуют замкнутые эллиптические (в частном случае круговые) орбиты. Предельному случаю сильно вытянутых эллиптических орбит со все более и более далеким вторым фокусом соответствует

разомкнутая параболическая траектория (второй фокус эллипса при таком предельном переходе постепенно удаляется в бесконечность). Если же тело приближается к силовому центру из бесконечности, его движение происходит по одной из ветвей гиперболы. В этом случае, изменив направление движения под действием силы тяготения, тело снова уходит в бесконечность. Движение по уходящей в бесконечность ветви гиперболы можно также получить, сообщив находящемуся на конечном расстоянии телу достаточно большую скорость, превосходящую так называемую *скорость освобождения*.

## 10.2 Круговая скорость и скорость освобождения

*Круговую* скорость  $v_{\text{circ}}$  для орбиты, проходящей на расстоянии  $r$  от центра планеты, можно найти, приравнявая центростремительное ускорение  $v_{\text{circ}}^2/r$  ускорению  $GM/r^2$ , которое сообщает сила тяготения спутнику, находящемуся на расстоянии  $r$  от силового центра:

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}. \quad (69)$$

Значение круговой скорости обратно пропорционально корню квадратному из радиуса орбиты и не зависит от массы спутника. Период обращения по круговой орбите можно найти, разделив длину орбиты  $2\pi r$  (длину окружности радиуса  $r$ ) на постоянную скорость  $v_{\text{circ}}$  движения по этой орбите:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\text{circ}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}. \quad (70)$$

Как видно из (70), квадрат периода обращения пропорционален кубу радиуса орбиты (это частный случай третьего закона Кеплера). Период обращения спутника обратно пропорционален квадратному корню из массы планеты. Зависимость периода обращения от массы планеты дает простой и наиболее точный способ «взвешивания» планеты (т. е. определения ее массы) по измерениям периодов обращения ее спутников.

Значение круговой скорости  $v_{\text{circ}}$  для гипотетической предельно низкой орбиты, стелющейся над самой поверхностью Земли, иногда называют *первой космической* скоростью  $v_1 = \sqrt{gR} \approx 7.9$  км/с. Движение спутника по такой орбите было бы возможно только в идеализированном случае полного отсутствия атмосферы.

*Скорость освобождения*  $v_{\text{esc}}$  на заданном расстоянии  $r$  от центра планеты (т. е. минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно удалилось в бесконечность) может быть рассчитана с помощью закона сохранения энергии. Минимальная скорость тела в точке  $r$ , необходимая для преодоления сил тяготения и удаления в бесконечность, отвечает нулевой скорости на бесконечности (и нулевому значению кинетической энергии). Потенциальная энергия на бесконечности тоже принята равной нулю. Поэтому тело, которому сообщена скорость, равная скорости освобождения, имеет нулевую полную энергию:

$$\frac{mv_{\text{esc}}^2}{2} - G\frac{mM}{r} = 0,$$

откуда

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}}. \quad (71)$$

Сравнивая это выражение с формулой (69), видим, что скорость освобождения (71) на любом расстоянии  $r$  от силового центра в  $\sqrt{2} \approx 1.41$  раз превышает круговую скорость. Ее значение не зависит от массы тела. В закон сохранения энергии, из которого получено значение  $v_{\text{esc}}$ , входит только величина скорости освобождения, но не ее направление. Поэтому тело удаляется в бесконечность при произвольном направлении сообщаемой ему скорости, если только ее величина  $v_0$  равна скорости освобождения  $v_{\text{esc}}$ . Удаление тела в бесконечность происходит по некоторой параболической траектории, конкретный вид которой зависит от направления начальной скорости, либо по прямой, если эта скорость направлена по радиусу (вертикально вверх).

Если начальная скорость  $v_0$  превышает скорость освобождения, тело удаляется в бесконечность по гиперболической траектории. На бесконечно большом расстоянии его движение будет равномерным и прямолинейным. Постоянная скорость  $v_\infty$  этого движения направлена по асимптоте гиперболы. Ее значение можно определить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{r}} = \sqrt{v_0^2 - v_{\text{esc}}^2}. \quad (72)$$

Скорость тела на бесконечно большом расстоянии  $v_\infty$  (72) называют *остаточной скоростью* либо *гиперболическим избытком* скорости.

Значение скорости освобождения  $v_{\text{esc}}$  для точки на поверхности Земли (т. е. при  $r = R$ ) обычно называют *второй космической скоростью*. Ее значение в  $\sqrt{2} \approx 1.41$  раз превышает первую космическую скорость:  $v_{\text{II}} = \sqrt{2gR} \approx 11.2$  км/с.

### 10.3 Свойства кеплеровых орбит

В общем случае движение тела под действием ньютоновской силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра, происходит по одному из *конических сечений* — окружности или эллипсу, параболе, гиперболе. Уравнение траектории кеплерова движения можно записать в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (73)$$

Здесь  $r$  — расстояние от силового центра (длина радиуса-вектора),  $\varphi$  — угол, образуемый радиусом-вектором с осью симметрии траектории (с направлением из центра на ближайшую точку). Величина  $p$  в формуле (73) имеет размерность длины. Она называется *фокальным параметром* орбиты. Безразмерная величина  $e$  называется *эксцентриситетом* орбиты. При  $e = 0$  из (73) получаем  $r = p$  — расстояние до орбиты не зависит от  $\varphi$ , т. е. орбита в данном случае представляет собой окружность. Во всех остальных случаях параметр  $p$  равен расстоянию до

орбиты при  $\varphi = \pm\pi/2$ , когда  $\cos \varphi = 0$  (в этом заключается геометрический смысл фокального параметра). При  $e < 1$  уравнение (73) соответствует эллипсу (рис. 18), при  $e = 1$  — параболе, при  $e > 1$  — гиперболе. (Аналитический вывод уравнения траектории (73) приведен в Дополнении к данному комментарию, см. ниже.)

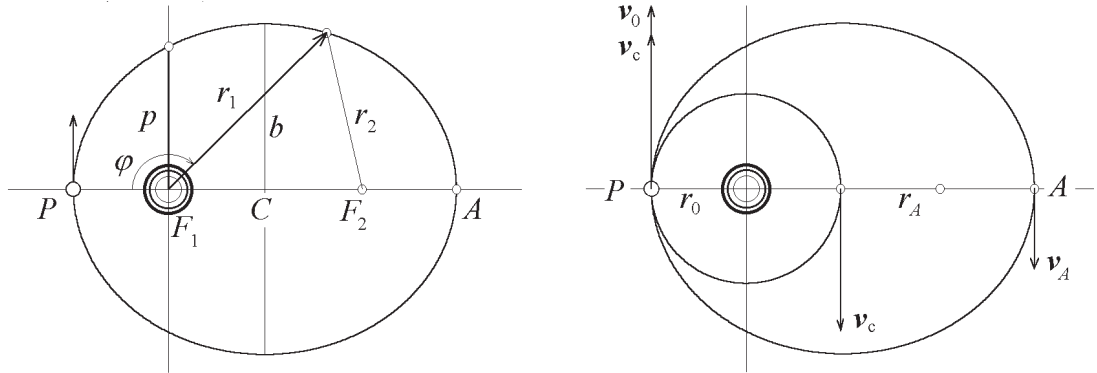


Рис. 18: Элементы эллиптической орбиты кеплерова движения.

Эллиптическую орбиту можно характеризовать, наряду с параметрами  $p$  и  $e$ , также расстоянием  $r_P$  до ближайшей к силовому центру точки  $P$ , называемой *перигелием* для планетных орбит и *перигеем* для орбит спутников Земли, и расстоянием  $r_A$  до наиболее удаленной точки  $A$  орбиты, называемой соответственно *афелием* или *апогеем* (рис. 18). Точке  $P$  соответствует значение  $\varphi = 0$ , точке  $A$  — значение  $\varphi = \pi$ . Подставляя эти значения в (73), получаем

$$r_P = \frac{p}{1+e}, \quad r_A = \frac{p}{1-e}. \quad (74)$$

Эксцентриситет  $e$  орбиты выражается через  $r_P$  и  $r_A$  следующим образом:

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}.$$

Сумма  $r_A + r_P$  дает большую ось эллипса  $2a$ :

$$2a = r_A + r_P = \frac{2p}{1-e^2}.$$

Такое же значение имеет сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса:  $r_1 + r_2 = 2a$ . Расстояния от центра эллипса до фокусов ( $CF_1$  и  $CF_2$  на рис. 18) равны произведению большой полуоси на эксцентриситет:

$$CF_1 = a - r_P = ae.$$

Малая полуось эллипса  $b$  выражается через большую полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  соотношением:

$$b = a\sqrt{1-e^2}.$$

Определим параметры орбиты спутника, которому на расстоянии  $r_0$  от силового центра (центра планеты) сообщается горизонтальная скорость  $v_0$ . Если начальная скорость равна найденной выше круговой скорости  $v_{\text{circ}}$  (69), орбита представляет собой окружность (см. правую часть рис. 18). Когда начальная скорость

$v_0$  превышает круговую, перигей эллиптической орбиты расположен в начальной точке  $P$  (рис. 18), апогей — на противоположном конце  $A$  прямой, проходящей через начальную точку и центр планеты. Для нахождения расстояния  $r_A$  до апогея воспользуемся законом сохранения энергии и законом сохранения момента импульса, который справедлив при движении тела в любом центральном силовом поле. Напомним, что сохранение момента импульса приводит к закону площадей (второму закону Кеплера). Приравнявая значения момента импульса в начальной точке  $P$  и в апогее  $A$  орбиты, получаем

$$v_0 r_0 = v_A r_A, \quad (75)$$

где  $v_A$  — скорость спутника в апогее. Приравнявая значения энергии в начальной точке и в апогее, получаем второе уравнение:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = \frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{r_A}.$$

Выразим скорость в апогее  $v_A$  через  $v_0$  с помощью (75) и подставим в уравнение закона сохранения энергии. Собирая члены с  $v_0$  в левой его части, а остальные члены — в правой части, получим

$$v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_A^2}\right) = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_A}\right).$$

Из этого квадратного уравнения можно найти неизвестное расстояние  $r_A$  до апогея. Один из его корней  $r_A = r_0$  соответствует начальной точке (перигею). Для нахождения второго корня, соответствующего апогею, представим разность квадратов в левой части уравнения как произведение суммы на разность, и сократим обе части на  $(1 - r_0/r_A)$ . Учитывая, что  $GM/r_0 = v_{\text{circ}}^2$ , расстояние до перигея орбиты можно выразить следующим соотношением:

$$r_A = \frac{r_0}{2(v_{\text{circ}}/v_0)^2 - 1} = \frac{r_0}{(v_{\text{esc}}/v_0)^2 - 1}. \quad (76)$$

При  $v_0 = v_{\text{circ}}$  из (76) имеем  $r_A = r_0$  — спутник движется по круговой орбите. По мере увеличения начальной скорости расстояние до апогея становится все больше. При приближении значения начальной скорости к скорости освобождения  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2}v_{\text{circ}}$  эллиптическая орбита неограниченно вытягивается, и ее апогей уходит в бесконечность. При еще больших значениях начальной скорости движение спутника будет происходить по гиперболической траектории. Формула (76) в этом случае неприменима. Если же начальная скорость меньше круговой скорости  $v_{\text{circ}}$ , из формулы (76) получаем  $r_A < r_0$  — начальная точка будет апогеем орбиты, а значение  $r_A$  из (76) соответствует расстоянию до перигея, который в этом случае лежит на противоположном по отношению к начальной точке конце большой оси эллипса. Большая полуось орбиты дается следующим выражением:

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_A) = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - v_0^2/(2v_{\text{circ}}^2)} = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - v_0^2/v_{\text{esc}}^2}. \quad (77)$$

При  $v_0 = v_{\text{circ}}$  из (77) получаем, естественно,  $a = r_0$  — эллипс превращается в окружность, и большая полуось совпадает с радиусом. Когда  $v_0 \rightarrow \sqrt{2}v_{\text{circ}}$ , т. е.

начальная скорость приближается к скорости освобождения  $v_{\text{esc}}$ , согласно уравнению (77), большая полуось орбиты  $a \rightarrow \infty$  — эллипс растягивается до бесконечности. При  $v_0 \rightarrow 0$  формула (77) дает  $a \rightarrow r_0/2$  — по мере уменьшения начальной скорости эллиптическая орбита сжимается и вырождается в отрезок прямой от начальной точки до силового центра. Фокусы такого предельно сплющенного эллипса совпадают с концами отрезка.

## 10.4 Момент импульса и секториальная скорость

Скорость изменения момента импульса частицы со временем  $d\mathbf{L}/dt$  равна моменту действующей на нее силы  $\mathbf{F}$  относительно начала координат:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (78)$$

При движении частицы в центральном поле сила направлена вдоль радиуса, и ее момент относительно силового центра равен нулю:  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ . Таким образом, как видно из (78), в любом центральном поле момент импульса частицы относительно силового центра остается неизменным (сохраняется).

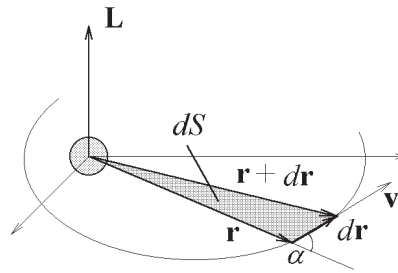


Рис. 19: Геометрический смысл момента импульса частицы.

Рассмотрим геометрический смысл момента импульса частицы, совершающей орбитальное движение (рис. 19). Представим скорость  $\mathbf{v}$  в выражении для момента импульса как отношение вектора элементарного перемещения  $d\mathbf{r}$  к соответствующему промежутку времени  $dt$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt. \quad (79)$$

Векторное произведение  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  в правой части (79) представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат сомножители  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$  (т. е.  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ ). Его модуль

$$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = r dr \sin \alpha = 2dS \quad (80)$$

представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника, заштрихованного на рис. 19. В самом деле, произведение  $dr$  на синус угла  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$  равно высоте этого треугольника, опущенной на сторону  $\mathbf{r}$ . Отношение  $dS/dt$  элементарной площади  $dS$  к промежутку времени  $dt$ , в течение которого радиус-вектор  $\mathbf{r}$  «заметает» эту площадь, называется *секториальной скоростью*.

стью. Таким образом, из (80) следует, что модуль момента импульса пропорционален секториальной скорости:

$$L = 2m \frac{dS}{dt}. \quad (81)$$

Сохранение *направления* вектора момента импульса в центральном поле означает, что траектория представляет собой *плоскую* кривую. Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору  $\mathbf{L}$ . Эта плоскость задается радиусом-вектором начального положения  $\mathbf{r}_0$  и вектором начальной скорости  $\mathbf{v}_0$ . Сохранение *модуля* момента импульса означает неизменность *секториальной скорости*. Применительно к движению планеты сохранение секториальной скорости (81) известно как второй закон Кеплера. Таким образом, второй закон Кеплера есть следствие сохранения момента импульса частицы при движении в центральном силовом поле. Секториальная скорость постоянна для любых кеплеровых орбит, в том числе и для разомкнутых параболических и гиперболических траекторий. Подчеркнем, что это свойство имеет место для *любого* центрального поля, а не только для ньютонова поля тяготения. Напротив, утверждения, выражаемые первым и третьим законами Кеплера, справедливы только для движения в *кулоновом* центральном поле, где сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра.

## 10.5 Годограф вектора скорости при кеплеровом движении

Вектор скорости движущегося тела в любой момент направлен по касательной к пространственной траектории, и поэтому при криволинейном движении его направление все время изменяется. Чтобы получить траекторию в пространстве скоростей, нужно начертить линию, описываемую концом меняющегося вектора скорости при условии, что его начало зафиксировано в определенной точке — начале координат пространства скоростей. Повсеместно принятое теперь название такой кривой — годограф скорости — было дано ей Гамильтоном в 1846 году.

При движении тела (планеты, спутника) по круговой орбите модуль скорости остается неизменным, так что все изменение вектора скорости сводится к равномерному вращению вокруг начала координат пространства скоростей. Это значит, что годограф скорости для происходящего по окружности кеплерова движения также будет окружностью. Радиус этой окружности равен неизменному значению модуля скорости (круговой скорости  $v_{\text{circ}}$ ).

Когда планета (или спутник) движется вдоль замкнутой эллиптической орбиты или открытой параболической или гиперболической траектории, поворот вектора скорости происходит неравномерно. Изменяется при этом не только направление, но и модуль вектора скорости. Однако эти изменения происходят таким образом, что конец вектора скорости также описывает окружность (либо часть окружности в случае гиперболических движений). Центр такой окружности не находится в начале координат. Другими словами, для произвольного кеплерова движения годограф скорости имеет форму окружности. Это замечательное свойство орбитальных движений почему-то не нашло отражения в существующих учебниках по механике и общей физике. Доказательство (геометрическое и аналитическое) круговой формы годографа скорости можно найти в [4], стр. 18–25.

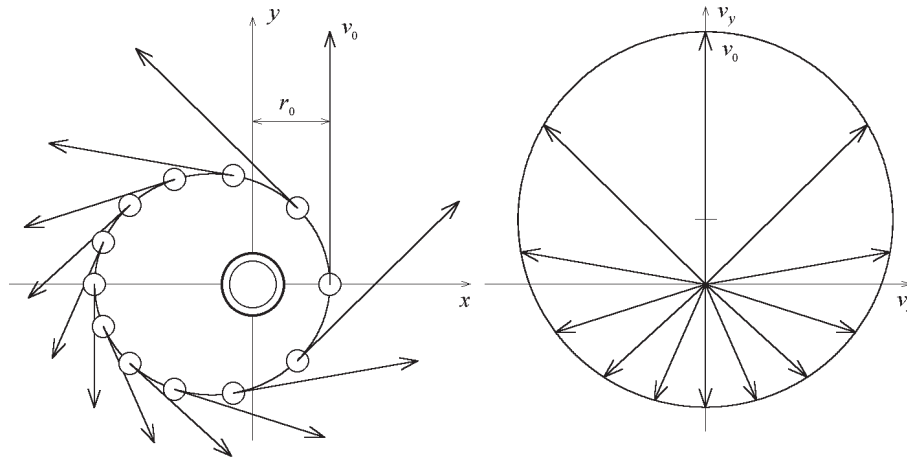


Рис. 20: Эллиптическая орбита с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

На приводимых здесь рисунках 20 и 21 показаны траектории (слева) и годографы скорости (справа) для замкнутых и открытых орбит. Если начальная скорость больше скорости освобождения, то диаметр годографа меньше начальной скорости, т. е. начало координат пространства скоростей находится вне окружности годографа (нижняя часть рис. 21).

На концах малой оси эллиптической орбиты вектор скорости  $\mathbf{v}$  параллелен большой оси эллипса. Поэтому для этих точек вектор  $\mathbf{v}$  перпендикулярен диаметру кругового годографа скорости. Основание этого перпендикуляра делит диаметр на части, равные скоростям спутника в перигее и апогее орбиты ( $\mathbf{v}_P$  и  $\mathbf{v}_A$  соответственно). Поэтому длина перпендикуляра, т. е. скорость на конце малой оси, равна среднему геометрическому скоростей  $\mathbf{v}_P$  и  $\mathbf{v}_A$ :  $v = \sqrt{v_P v_A}$ .

Подчеркнем, что круговая форма годографа скорости получена для движения в кулоновом (ньютоновском) центральном поле, где сила квадратично убывает с расстоянием.

## 10.6 Дополнение: Аналитический вывод 1-го закона Кеплера

Ниже приводится динамическое доказательство того, что траектории в ньютоновском центральном поле тяготения представляют собой конические сечения. Для вывода формы траектории на основе законов динамики удобнее использовать вместо дифференциальных уравнений движения их первые интегралы, а именно законы сохранения момента импульса и энергии.

Траектория движения тела в центральном поле представляет собой плоскую кривую. Для задания положения тела в этой плоскости будем использовать полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ . Начало координат выберем в силовом центре. Уравнение траектории в полярных координатах имеет вид  $r = r(\varphi)$ , т. е. оно выражает расстояние  $r$  от силового центра как функцию угла  $\varphi$  между текущим радиусом-вектором и некоторым фиксированным направлением в этой плоскости (полярной осью).

Выразим величину момента импульса частицы  $L$  в полярных координатах:



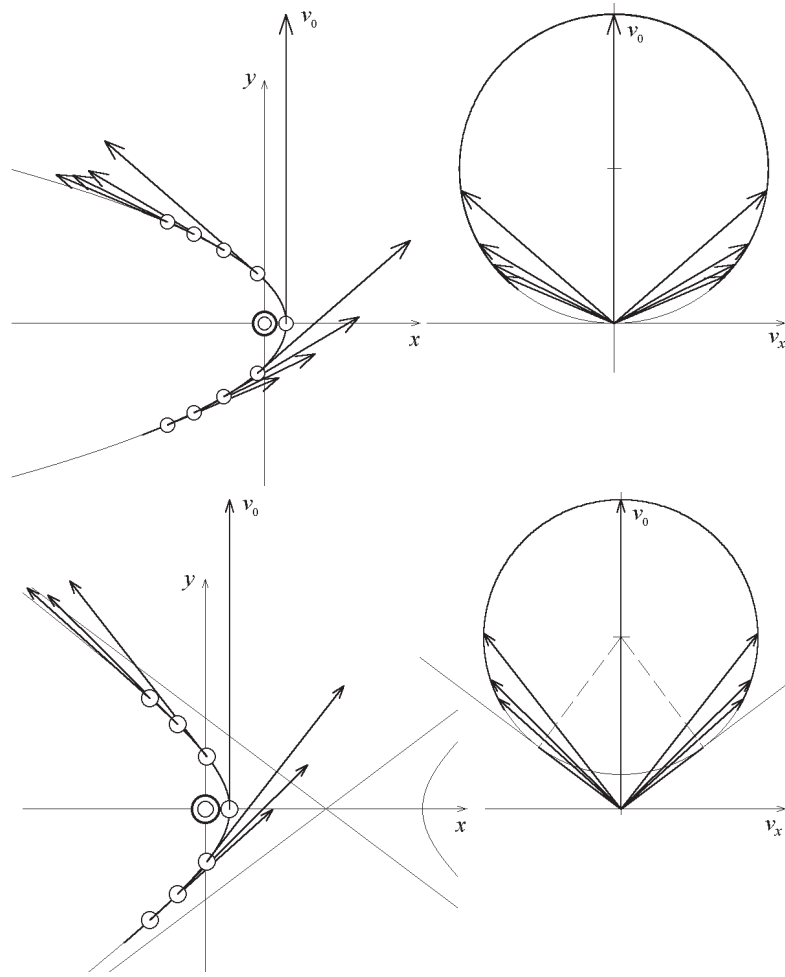


Рис. 21: Параболическая (вверху) и гиперболическая (внизу) траектории с векторами скоростей в разных точках и соответствующие им годографы в пространстве скоростей.

$$L = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mrv_{\perp} = mr^2\dot{\varphi}. \quad (82)$$

Здесь  $v_{\perp} = r\dot{\varphi}$  представляет собой поперечную (азимутальную) проекцию скорости частицы (проекцию на направление, перпендикулярное к радиусу-вектору). Поскольку при движении момент импульса  $L$  остается неизменным, для любой точки траектории угловую скорость  $\dot{\varphi}$  можно с помощью уравнения (82) выразить через расстояние  $r$  от начала координат (от силового центра) и постоянное значение  $L$  момента импульса:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \quad (83)$$

Далее мы используем закон сохранения энергии. В выражении  $mv^2/2$  для кинетической энергии квадрат скорости частицы представим как сумму квадратов ее радиальной ( $\dot{r}$ ) и поперечной ( $r\dot{\varphi}$ ) проекций:  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ . Подставляя  $\dot{\varphi}$  из уравнения (83) во второе слагаемое, получаем следующее выражение для полной энергии частицы  $E_{\text{kin}} + U$  в полярных координатах:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E. \quad (84)$$

Постоянные значения полной энергии  $E$  и момента импульса  $L$  в уравнении (84) определяются начальными условиями. Уравнение (84) не содержит угловой переменной  $\varphi$ . Поэтому его можно трактовать как закон сохранения энергии для одномерного (радиального) движения частицы массы  $m$  в некоторой эффективной потенциальной яме, где зависимость потенциальной энергии от  $r$  дается выражением  $U_{\text{eff}}(r) = -GmM/r + L^2/(2mr^2)$ . Графики эффективной потенциальной энергии  $U_{\text{eff}}(r)$  и каждого из ее слагаемых показаны на рис. 22.

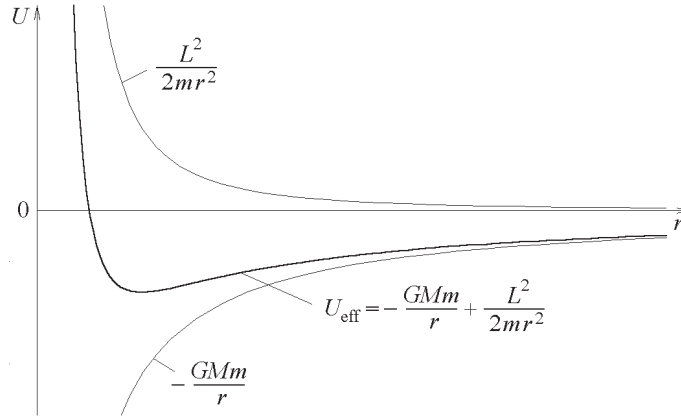


Рис. 22: График эффективной потенциальной энергии  $U_{\text{eff}}(r)$  для радиальной составляющей движения тела в центральном поле тяготения.

Левый берег потенциальной ямы очень крутой и бесконечно высокий:  $U_{\text{eff}}(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$  благодаря второму слагаемому  $L^2/(2mr^2)$ . Пологий правый берег обусловлен членом  $-GmM/r$  в  $U_{\text{eff}}(r)$  и поднимается лишь до нулевой отметки потенциальной энергии:  $U_{\text{eff}}(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Поэтому при положительных значениях полной энергии приходящая из бесконечности частица приближается к силовому центру до некоторого минимального расстояния  $r_{\text{min}}$ , где полная энергия сравнивается с  $U_{\text{eff}}(r)$ , и затем снова удаляется в бесконечность.

При отрицательных значениях полной энергии частица «заперта» в потенциальной яме и совершает периодическое движение между ее берегами. При этом расстояние  $r$  до силового центра изменяется в некоторых конечных пределах от  $r_{\text{min}}$  до  $r_{\text{max}}$ . Таким случаям соответствуют орбиты конечных размеров, при движении по которым угловая переменная  $\varphi$  совершает «обход» по полному кругу в пределах от 0 до  $2\pi$  с определенным периодом. Центральное кулоново поле, в котором сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, замечательно тем, что в нем периоды радиального и углового движений совпадают при любых начальных условиях, соответствующих отрицательным значениям полной энергии. Поэтому орбита оказывается замкнутой.

При любом искажении (возмущении) кулонова поля (например, при отклонении формы планеты от идеальной сферической симметрии) периоды радиального и углового движений уже не совпадают, и «чудо» замкнутых кеплеровых орбит бесследно исчезает. Отмеченное выше совпадение периодов радиального и углового

движений (такого рода совпадения называют «вырождением») связано с определенной («скрытой») симметрией кулонова поля и существованием обусловленного этой симметрией инварианта (сохраняющейся при движении величины). Соответствующий инвариант (так называемый вектор Рунге — Ленца или вектор Лапласа) можно назвать *динамическим*, поскольку его существование связано с определенным законом силы (обратная пропорциональность квадрату расстояния), тогда как такие инварианты как момент импульса и полная энергия могут быть отнесены к *геометрическим*, поскольку их существование обусловлено общими свойствами симметрии пространства и времени (изотропностью пространства и однородностью времени соответственно).

Чтобы найти форму траектории  $r = r(\varphi)$ , исключим время из уравнения (84). Рассматривая  $r$  как функцию  $\varphi$ , а не как явную функцию времени  $t$ , имеем:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2}. \quad (85)$$

Здесь мы выразили угловую скорость  $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$  через момент импульса  $L$  с помощью уравнения (83). Подставляя это выражение для  $\dot{r}$  в уравнение (84), получаем дифференциальное уравнение для функции  $r(\varphi)$ , которая определяет искомую траекторию частицы. Это уравнение можно упростить, если вместо  $r(\varphi)$  ввести новую неизвестную функцию  $\rho = \rho(\varphi)$  с помощью соотношения  $\rho = 1/r$ . Поскольку

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = -r^2 \frac{d\rho}{d\varphi},$$

из уравнения (85) находим, что

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad \dot{r}^2 = \frac{L^2}{m^2} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2. \quad (86)$$

Подставляя это выражение для  $\dot{r}^2$  в уравнение (84), получаем следующее дифференциальное уравнение для  $\rho(\varphi)$ :

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 - \frac{2Gm^2M}{L^2} \rho = \text{const}. \quad (87)$$

В этом уравнении первого порядка переменные  $\rho$  и  $\varphi$  разделяются, и потому его решение может быть найдено стандартными методами.

Однако можно добиться еще большего упрощения, если продифференцировать это уравнение по  $\varphi$ , заменяя его следующим уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C, \quad (88)$$

где введено обозначение  $C = Gm^2M/L^2$ .

Это уравнение с постоянными коэффициентами часто встречается в различных задачах. В частности, аналогичным уравнением описываются собственные колебания гармонического осциллятора. Решение этого уравнения хорошо известно:

$$\rho(\varphi) = C + A \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (89)$$

где произвольные постоянные  $A$  и  $\varphi_0$  определяются из начальных условий. Возвращаясь теперь к исходной искомой функции  $r = 1/\rho$ , получаем:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (90)$$

где использованы следующие обозначения:

$$p = \frac{1}{C} = \frac{L^2}{Gm^2M}, \quad e = \frac{A}{C}. \quad (91)$$

Уравнение (90) выражает искомую форму траектории тела, движущегося в ньютоновском центральном поле тяготения, сила которого спадает обратно пропорционально квадрату расстояния. Из аналитической геометрии известно, что (90) есть уравнение конического сечения, т. е. кривой, которая образуется при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса, в сечении получаются окружность, эллипс, парабола или гипербола. В уравнении (90)  $\varphi - \varphi_0$  есть угол между радиусом-вектором и осью симметрии траектории. Эта ось направлена из силового центра в ближайшую к нему точку траектории. Если полярную ось системы координат выбрать вдоль этой оси симметрии, то константа  $\varphi_0$  в уравнении (90) обращается в нуль.

Входящая в уравнение (90) величина  $p = L^2/(Gm^2M)$  имеет размерность длины. Она называется *фокальным параметром* конического сечения. Безразмерная величина  $e$  называется *эксцентриситетом* конического сечения. При  $e = 0$  из уравнения (90) следует, что  $r = p = \text{const}$ , т. е. расстояние до силового центра не зависит от  $\varphi$  и орбита представляет собой окружность. При  $e < 1$  уравнению (90) соответствует эллипс (см. рис. 18 на стр. 77), при  $e = 1$  — парабола, и при  $e > 1$  — гипербола.

Параметры орбиты  $p$  и  $e$  можно выразить через сохраняющиеся при движении динамические параметры, а именно полную энергию  $E$  и момент импульса  $L$ , и через физические параметры системы  $M$  и  $m$ . В соответствии с (91) фокальный параметр  $p$  зависит только от момента импульса  $L$ :  $p = L^2/(GMm^2)$ . Ниже мы получим значения большой полуоси  $a$  (для замкнутых орбит) и эксцентриситета  $e$ .

Пусть  $r_P$  — расстояние между силовым центром и ближайшей к нему точкой траектории (перигелием, перигеем или в общем случае перицентром), а  $v_P$  — скорость в этой точке. (В этой точке вектор скорости  $\mathbf{v}$  перпендикулярен радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ ). Тогда полную энергию можно записать следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} = \frac{L^2}{2mr_P^2} - \frac{GMm}{r_P}. \quad (92)$$

Мы выразили в (92) скорость в перигее через момент импульса  $L = mr_Pv_P$ . Из уравнения (90) следует, что расстояние  $r_P$  до перигея для орбиты с заданными параметрами  $p$  и  $e$  равно  $p/(1 + e)$ . Подставляя  $r_P = p/(1 + e)$  и  $L^2 = pGMm^2$  из (91) в уравнение (92), получаем:

$$E = -(1 - e^2) \frac{GMm}{2p} = -\frac{GMm}{2a}. \quad (93)$$

В последнем равенстве использовано соотношение  $a = p/(1 - e^2)$  между большой полуосью  $a$  и параметрами эллипса  $p$  и  $e$ . Для конечных замкнутых орбит  $e < 1$

и величина  $a$  в (93) положительна. Мы видим, что замкнутым орбитам соответствуют отрицательные значения полной энергии:  $E < 0$ . Из уравнения (93) следует, что большая полуось  $a$  для таких замкнутых эллиптических орбит зависит только от величины полной энергии  $E$ :  $a = -GMm/(2E)$ . Таким образом, большая полуось и, следовательно, период обращения  $T$  однозначно определяются полной энергией и не зависят от момента импульса. Период обращения одинаков для всех орбит с данным значением полной энергии (или большой полуоси), независимо от эксцентриситета орбиты. В частном случае круговой орбиты  $r = a$ , и уравнение (93) совпадает с известным выражением  $E = -GMm/(2r)$  для полной энергии спутника на круговой орбите.

При равном нулю значении полной энергии ( $E = 0$ ) уравнение (93) дает  $e = 1$ . Коническое сечение с  $e = 1$  — это парабола. Положительным значениям полной энергии ( $E > 0$ ) соответствуют эксцентриситеты  $e > 1$ , т. е. гиперболические траектории. Если применить соотношение  $a = p/(1 - e^2)$  к гиперболе ( $e > 1$ ), для  $a$  получается отрицательное значение. В этом случае  $|2a|$  имеет геометрический смысл кратчайшего расстояния между двумя ветвями гиперболы (измеряемого вдоль главной оси, проходящей через фокусы).

В общем случае из уравнения (93) можно получить выражения для большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  орбиты через постоянные значения полной энергии  $E$  и момента импульса  $L$ . Подставляя  $p = L^2/(GMm^2)$  в уравнение (93), получаем:

$$a = -\frac{GMm}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}. \quad (94)$$

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 303–313).
2. Общий курс физики, т. 1 Механика. М., «Наука», 1974 (стр. 311–320).
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1 (Современная наука о природе. Законы механики). М., «Мир», 1966 (стр. 122–139, стр. 167–173).
4. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. Спб, 2006 (стр. 3–38).

# 11 Свободное вращение симметричного волчка

## Содержание темы

Главные оси инерции. Свободное вращение вокруг главных осей инерции. Устойчивость свободного вращения вокруг главных осей инерции. Связь векторов угловой скорости и момента импульса для симметричного волчка. Свободное вращение симметричного волчка. Регулярная прецессия (нутация). Геометрическая интерпретация свободной прецессии для вытянутого и сплюсненного симметричного волчка. Подвижный и неподвижный аксоиды. Шаровой волчок. Волчок в кардановом подвесе.

### 11.1 Главные оси инерции тела

Под свободным движением твердого тела понимают движение, происходящее в отсутствие внешних сил. Этот простейший вид движения принято называть «движением по инерции». Для материальной точки движение по инерции действительно оказывается очень простым — это равномерное прямолинейное движение. Но для твердого тела только поступательное движение по инерции (т.е. движение, при котором тело не вращается) будет достаточно простым. Если же тело вращается, его движение даже в отсутствие внешних сил может быть значительно более сложным.

Свободное движение твердого тела можно разложить на поступательное движение, в котором все точки тела движутся с такой же скоростью, как и центр масс тела, и вращение вокруг центра масс. В отсутствие внешних сил центр масс движется прямолинейно и равномерно. Для анализа вращения тела целесообразно перейти в систему центра масс, т.е. в инерциальную систему отсчета, в которой центр масс тела покоится, а оси координат имеют неизменные направления в пространстве. В этой системе отсчета движение твердого тела — это вращение вокруг неподвижной точки (вокруг центра масс).

Кинематика вращения вокруг неподвижной точки характеризуется вектором мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$ . В каждый момент времени скорость любой точки твердого тела будет такой, как если бы тело только вращалось вокруг оси, направленной вдоль вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Но в общем случае свободного вращения тела вектор угловой скорости и, следовательно, мгновенная ось вращения, непрерывно меняют свое направление. Даже при отсутствии моментов внешних сил, т.е. при вращении «по инерции», поведение мгновенной оси вращения оказывается весьма сложным. Еще более сложными представляются при этом траектории отдельных точек тела.

При вращении твердого тела вектор момента импульса  $\vec{L}$  (иначе его называют вектором углового момента) пропорционален мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$ , но, вообще говоря, не совпадает с  $\vec{\omega}$  по направлению. Совпадение направлений  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  будет только тогда, когда угловая скорость направлена вдоль одной из трех взаимно перпендикулярных осей, называемых *главными осями инерции* тела. Для симметричных тел из однородного материала главные оси инерции совпадают с осями симметрии тела. Например, в случае прямоугольного параллелепипеда главные оси инерции проходят через геометрический центр параллельно ребрам. Моменты

инерции тела относительно проходящих через центр масс главных осей называются *главными центральными моментами инерции*.

Свободное вращение твердого тела вокруг главных осей инерции, когда векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  совпадают по направлению, происходит очень просто. В самом деле, в отсутствие моментов внешних сил сохраняется вектор момента импульса  $\vec{L}$ . Отсюда сразу следует, что сохраняется направление вектора угловой скорости в пространстве и сохраняется величина угловой скорости. Поэтому главные оси инерции называют еще *осями свободного вращения тела*. Если твердое тело раскручено вокруг одной из этих осей, оно и дальше просто равномерно вращается вокруг оси, направление которой в пространстве не изменяется. Траектория любой точки тела в таком движении — это окружность с центром на оси вращения.

Можно показать, что свободное вращение вокруг осей с наибольшим и наименьшим центральными моментами инерции устойчиво. Устойчивость вращения означает, что малое отклонение направления угловой скорости от главной оси в начальный момент времени остается малым в процессе дальнейшего свободного вращения. Напротив, вращение вокруг главной оси инерции, которой соответствует промежуточное значение момента инерции, неустойчиво: если в начальный момент угловая скорость немного отклоняется по направлению от оси, в дальнейшем угол отклонения стремительно нарастает, и вместо простого равномерного вращения вокруг неизменного направления тело начинает совершать беспорядочное на вид кувыркание. При этом вектор мгновенной угловой скорости все время изменяет свое направление в пространстве и в самом теле.

Свойство устойчивости свободного вращения вокруг главных осей инерции легко проверить с помощью простого опыта. Возьмите полный спичечный коробок или любой брусок из однородного материала (дерева, пенопласта) и подбросьте его, одновременно закрутив вокруг одной из главных осей инерции. Наблюдайте, как вращается коробок, пока он находится в свободном полете. Если Вы раскрутили коробок вокруг оси, направленной перпендикулярно самой большой его плоскости, т.е. вокруг оси с максимальным моментом инерции, то во время полета коробка эта ось сохраняет свое направление в пространстве независимо от того, как Вы направили ее в момент бросания — вертикально, горизонтально или под произвольным углом. То же самое будет происходить и тогда, когда коробок раскручен вокруг оси, параллельной самому длинному ребру, т.е. вокруг оси с наименьшим моментом инерции. Для сообщения коробку такого вращения придется немного потренироваться: здесь потребуется некоторая «ловкость рук». Но при раскручивании вокруг оси, параллельной среднему ребру, коробок в полете практически сразу начинает беспорядочно кувыркаться. Как бы тщательно Вы не старались раскрутить коробок точно вокруг заданной оси, избежать какого-то небольшого отклонения начальной угловой скорости от этой оси не удастся. И если в случаях вращения коробка вокруг осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции малое начальное отклонение вектора угловой скорости от оси остается малым в процессе дальнейшего движения, то для оси с промежуточным моментом инерции начальное отклонение быстро возрастает.

Если вектор угловой скорости отклонен от главной оси инерции тела на некоторый угол, то вектор момента импульса  $\vec{L}$  не совпадает с  $\vec{\omega}$  по направлению. При этом даже свободное вращение тела оказывается весьма сложным. Сравнительно просто свободное вращение происходит для так называемого *симметричного*

*волчка*. Симметричный волчок — это тело, у которого два из трех главных центральных моментов инерции имеют равные значения. Примеры таких тел — однородный брусок с квадратным основанием и вообще любая призма или пирамида с основанием в виде правильного многоугольника (в том числе и треугольника), изготовленная из материала постоянной плотности, круговой диск, цилиндр или конус, эллипсоид вращения (вытянутый или сжатый сфероид), и т.п. При вращении таких тел вокруг оси симметрии момент импульса также направлен вдоль этой оси.

## 11.2 Векторы момента импульса и угловой скорости свободного вращения симметричного волчка

Если же вектор угловой скорости отклонен от оси симметрии тела на некоторый угол, то вектор момента импульса  $\vec{L}$  не совпадает с  $\vec{\omega}$  по направлению, но обязательно лежит в одной плоскости с  $\vec{\omega}$  и осью симметрии тела. Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 23. Момент импульса  $\vec{L}$  отклонен от оси симметрии тела на больший угол, нежели вектор  $\vec{\omega}$ , если момент инерции тела относительно поперечной оси больше, чем относительно продольной оси. Такое взаимное расположение векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  относительно оси фигуры характерно для тел вытянутой формы (рис. 23, слева). Для сплюсненного вдоль оси тела вектор  $\vec{L}$  отклонен от оси тела на меньший угол, нежели вектор  $\vec{\omega}$  (рис. 23, справа).

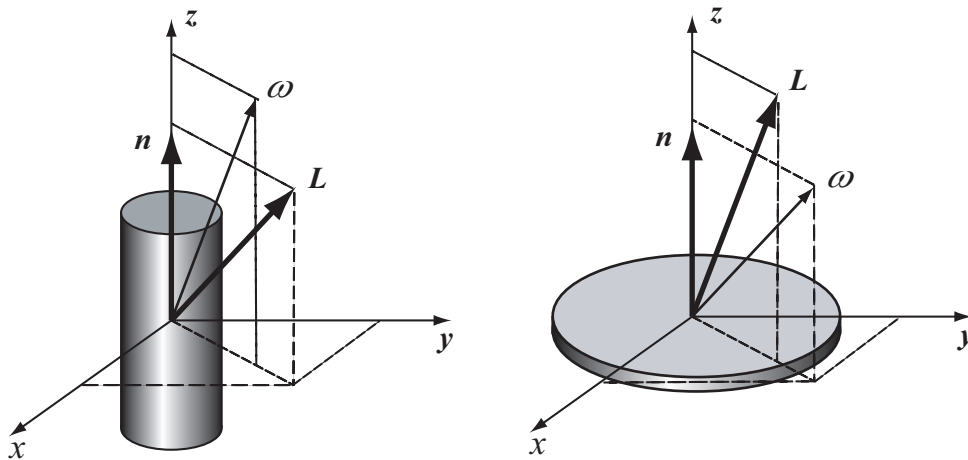


Рис. 23: Взаимное расположение векторов угловой скорости  $\vec{\omega}$ , момента импульса  $\vec{L}$  и оси симметрии (вектор  $\vec{n}$ ) для симметричных волчков вытянутой формы (слева) и сплюсненной формы (справа).

Введем единичный вектор  $\vec{n}$ , показывающий направление оси симметричного волчка в пространстве, т.е. выходящий из начала системы координат (из центра масс) и направленный вдоль оси волчка. В каждый момент времени все три вектора  $\vec{n}$ ,  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  лежат в одной плоскости, и при движении тела их взаимное расположение остается неизменным. Легко понять, что в отсутствие моментов внешних сил плоскость, содержащая векторы  $\vec{n}$ ,  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$ , равномерно поворачивается вокруг неизменного в пространстве направления вектора  $\vec{L}$ . В самом деле, скорость  $\vec{v}$  той



точки оси волчка, которая совпадает с концом вектора  $\vec{n}$ , выражается через угловую скорость по формуле  $\vec{v} = d\vec{n}/dt = \vec{\omega} \times \vec{n}$ . Это означает, что в любой момент конец вектора  $\vec{n}$  движется перпендикулярно рассматриваемой плоскости, увлекая ее за собой вместе с лежащими в ней векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{\omega}$ . Таким образом, вся плоскость равномерно вращается вокруг  $\vec{L}$ , а лежащие в ней векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\omega}$  синхронно описывают в пространстве конусы, вершины которых лежат в начале координат. О таком поведении векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{\omega}$  говорят, что они совершают вокруг  $\vec{L}$  *регулярную прецессию*.

Можно показать, что угловая скорость этой прецессии  $\vec{\Omega}$  прямо пропорциональна моменту импульса  $\vec{L}$  и обратно пропорциональна центральному моменту инерции волчка  $I_{\perp}$  относительно поперечной оси:  $\vec{\Omega} = \vec{L}/I_{\perp}$  (см. ниже раздел «Угловая скорость прецессии»). Такую свободную прецессию оси волчка, происходящую в отсутствие внешних моментов при несовпадении угловой скорости с осью волчка, называют также *нутацией*. Подчеркнем, что ось волчка сохраняет свое направление в пространстве (не прецессирует), если при свободном вращении угловая скорость направлена вдоль оси волчка: в таких случаях нутация не происходит.

### 11.3 Геометрическая интерпретация свободной прецессии

На рис. 24 показана наглядная геометрическая интерпретация поведения оси  $\vec{n}$  волчка и вектора мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  при описанной выше регулярной прецессии, т.е. при свободном вращении симметричного волчка.

На этом рисунке вектор момента импульса  $\vec{L}$ , сохраняющий свое направление в пространстве, для большей наглядности направлен вертикально (вдоль оси  $z$ ). Вектор угловой скорости прецессии  $\vec{\Omega} = \vec{L}/I_{\perp}$  направлен вдоль  $\vec{L}$ . Векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\omega}$  лежат в одной и той же проходящей через вертикальной плоскости, и для вытянутого вдоль оси тела отклонены от  $\vec{L}$  в одну сторону, как показано в левой части рис. 24. Вектор мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  совершает прецессию вокруг неизменного направления вектора момента импульса  $\vec{L}$  с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ , т.е. описывает в пространстве неподвижный круговой конус с вершиной в центре масс. Угол между осью этого конуса и образующей равен углу отклонения вектора  $\vec{\omega}$  от направления  $\vec{L}$ . Этот угол остается неизменным при движении тела. В каждый момент времени вектор показывает направление оси вращения тела в пространстве. Поэтому множество мгновенных осей вращения в разные моменты времени образует в пространстве круговой конус с вершиной в центре масс тела и осью, направленной вдоль  $\vec{L}$  (вертикально на рис. 24). Такой конус называют неподвижным аксоидом.

Представим себе еще один круговой конус, на этот раз жестко связанный с телом. Вершина этого конуса также находится в центре масс, а его ось направлена вдоль вектора  $\vec{n}$ , показывающего направление оси симметрии тела в пространстве (см. рис. 24). Пусть угол между осью и образующей этого конуса равен неизменному при движении тела углу между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{L}$ , т.е. вектор  $\vec{\omega}$  проходит вдоль образующей конуса. Другими словами, мгновенная ось вращения  $\vec{\omega}$  в любой момент времени совпадает с одной из образующих связанного с телом конуса, а вся боковая поверхность этого конуса показывает, как расположена мгновенная ось вращения в разные моменты времени в самом теле, т.е. дает положение всего множества мгновенных осей вращения относительно тела. По этой причине такой

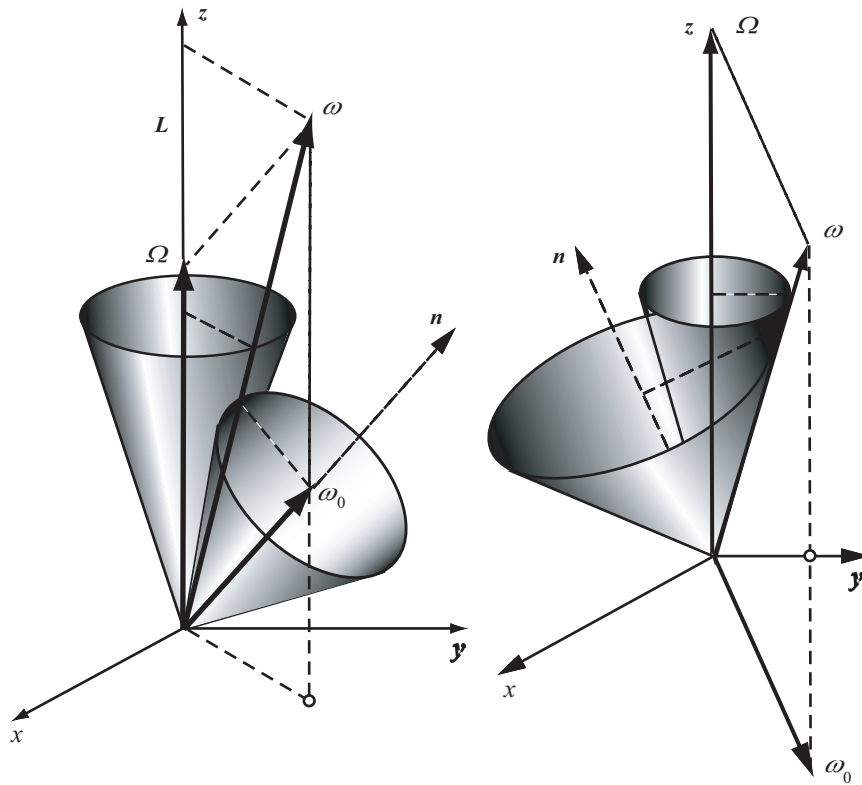


Рис. 24: Геометрическая интерпретация свободной прецессии симметричного волчка как качения без проскальзывания мысленно связанного с телом подвижного аксоида по поверхности неподвижного аксоида.

мысленно связанный с движущимся телом круговой конус называют подвижным аксоидом.

Подвижный и неподвижный конусы соприкасаются своими боковыми поверхностями вдоль вектора  $\vec{\omega}$ , т.е. вдоль мгновенной оси вращения. Скорости всех точек тела, лежащих в данный момент на мгновенной оси вращения, равны нулю. Это значит, что поведение мысленно связанного с телом подвижного аксоида представляет собой качение без проскальзывания по поверхности неподвижного аксоида. Точки тела, лежащие на оси симметрии, описывают окружности, центры которых находятся на оси неподвижного аксоида. Движение точек тела, не лежащих на оси симметрии, можно представить как сложение двух движений, а именно, вращения тела вокруг собственной оси с одновременным движением этой оси по конусу прецессии. Наглядному геометрическому представлению кинематики свободного вращения симметричного волчка в виде качения без проскальзывания подвижного аксоида по поверхности неподвижного соответствует показанное на рис. 24 разложение вектора мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  на сумму двух составляющих векторов  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}. \quad (95)$$

Вектор  $\vec{\omega}_0$  соответствует вращению тела вокруг собственной оси симметрии. Направление этого вектора неизменно в самом теле, а в пространстве он совер-

шает прецессию вокруг направления вектора  $\vec{L}$ , описывая вместе с осью тела круговой конус. Направление второго слагаемого неизменно в пространстве. Оно соответствует прецессии оси симметрии тела вокруг момента импульса  $\vec{L}$ , сохраняющего свое направление.

## 11.4 Угловая скорость прецессии

Как уже было отмечено, угловая скорость прецессии может быть выражена через полный момент импульса  $\vec{L}$  и момент инерции тела  $I_{\perp}$  относительно поперечной оси. Чтобы получить это выражение, обратимся к рис. 25, на котором вектор  $\vec{\omega}$  мгновенной угловой скорости представлен в виде суммы угловой скорости  $\vec{\omega}_0$  вращения тела относительно собственной оси и угловой скорости  $\vec{\Omega}$  прецессии, а также в виде суммы взаимно ортогональных продольной  $\vec{\omega}_{\parallel}$  и поперечной  $\vec{\omega}_{\perp}$  компонент. Такие разложения вектора  $\vec{\omega}$  на компоненты соответствуют двум различным возможностям представления сложного свободного вращения твердого тела в виде суперпозиции двух простых вращений. В первой возможности ( $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}$ ) одно вращение происходит вокруг оси симметрии, т.е. направления  $\vec{n}$ , неизменного в самом теле, а второе — вокруг направления  $\vec{L}$ , неизменного в пространстве. Векторы угловых скоростей  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{\Omega}$ , соответствующие этим вращениям, не ортогональны друг другу.

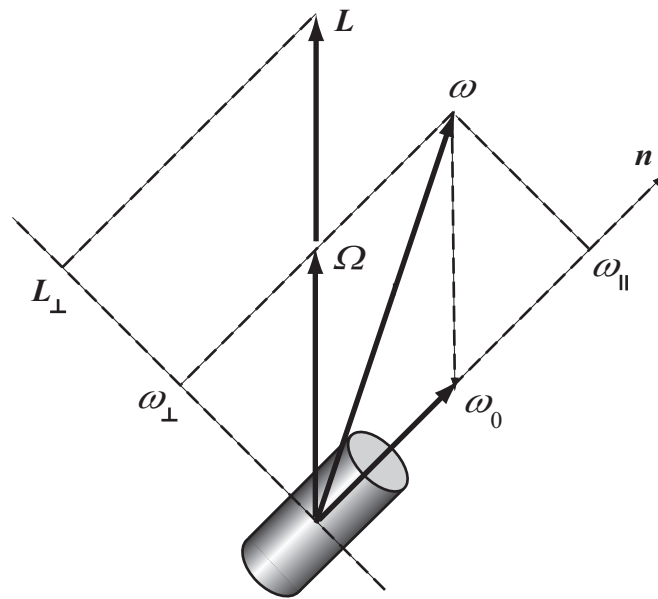


Рис. 25: Соотношение между вектором  $\vec{L}$  полного момента импульса и вектором  $\vec{\Omega}$  угловой скорости прецессии.

Во второй возможности разложения вектора  $\vec{\omega}$  на компоненты одно вращение также происходит вокруг неизменного в теле направления  $\vec{n}$ , но с иной (отличной от  $\vec{\omega}_0$ ) угловой скоростью, а второе — вокруг направления, перпендикулярного к оси симметрии тела (тоже неизменного в теле). Во втором случае две компоненты угловой скорости взаимно ортогональны. Из рис. 25 легко заключить, что проекции каждого из векторов  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\omega}$  на направление, перпендикулярное к оси симметрии

тела, имеют одно и то же значение  $\vec{\omega}_\perp$ .

Рассмотрим подобные прямоугольные треугольники с общим острым углом, гипотенузы которых образованы векторами  $\vec{L}$  и  $\vec{\Omega}$ , а катеты — векторами  $\vec{L}_\perp$  и  $\vec{\omega}_\perp$  соответственно. На основании подобия этих треугольников можно написать следующую пропорцию:  $\vec{L}/L_\perp = \vec{\Omega}/\omega_\perp$ . Принимая во внимание, что  $L_\perp = I_\perp\omega_\perp$ , из этой пропорции получаем искомое выражение для угловой скорости прецессии через момент импульса  $\vec{L}$ :  $\vec{\Omega} = \vec{L}/I_\perp$ . При малых отклонениях  $\vec{\omega}$  от  $\vec{n}$  (когда  $\omega_\perp \ll \omega$ ) из этого точного соотношения следует, что угловая скорость прецессии приближенно равна полной угловой скорости  $\omega$ , умноженной на отношение продольного и поперечного моментов инерции тела. Это значит, что в случае вытянутого вдоль оси тела  $\Omega < \omega$  (прецессия происходит медленнее, чем вращение тела вокруг оси), в то время как для сплюснутых тел  $\Omega > \omega$ . В частности, для тонкого диска угловая скорость прецессии вдвое больше мгновенной угловой скорости:  $\Omega = 2\omega$ .

Проиллюстрировать характерные черты «вращения по инерции» призвана моделирующая компьютерная программа «Свободное вращение симметричного волчка» ([www.ifmo.ru/butikov/Applets/PrecisionR.html](http://www.ifmo.ru/butikov/Applets/PrecisionR.html)), которая выполняется непосредственно в браузере. С помощью этой программы можно получить наглядное представление о том, как при «вращения по инерции» ведет себя мгновенная ось в пространстве и как меняется ее положение в самом теле, и по каким траекториям движутся разные точки тела, совершающего свободное вращение.

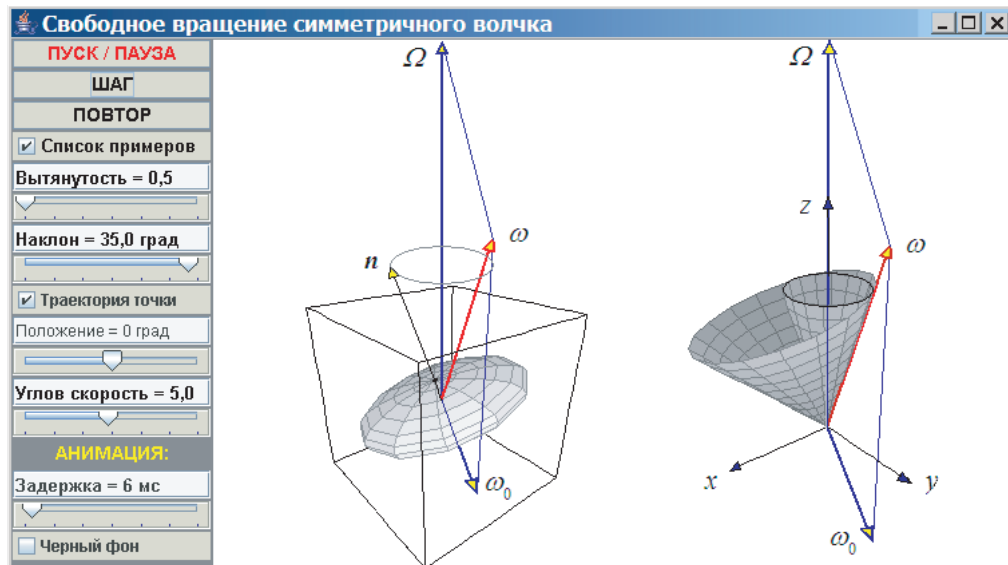


Рис. 26: Иллюстрация свободного вращения симметричного волчка сплюснутой формы (слева) с геометрической интерпретацией этого вращения (справа).

На рис. 26 показано окно программы «Свободное вращение симметричного волчка» с перспективной иллюстрацией свободной прецессии симметричного волчка сплюснутой формы (слева) и геометрической интерпретацией такого вращения (справа). В случае симметричного волчка сплюснутой формы свободное вращение может представиться весьма неожиданным, противоречащим нашей интуиции. Действительно, для такого тела векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\omega}$ , как это видно из правой части рис. 23, расположены по разные стороны вектора момента импульса  $\vec{L}$ . При этом

связанный с телом подвижный аксоид соприкасается с неподвижным аксоидом своей внутренней поверхностью, как показано в правой части рис. 24. Разложение вектора мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  на составляющие  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{\Omega}$  свидетельствует о том, что в этом случае векторы  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{\Omega}$  образуют между собой тупой угол. Иначе говоря, вектор  $\vec{\omega}_0$  угловой скорости вращения вокруг собственной оси направлен от вершины подвижного аксоида в сторону, противоположную вектору  $\vec{n}$  (т.е. противоположно по сравнению со случаем вытянутого тела). Это значит, что когда прецессия оси тела происходит против часовой стрелки и подвижный аксоид катится своей внутренней поверхностью по охватываемому им неподвижному аксоиду (совершает внутреннее качение), собственное вращение тела происходит в противоположную сторону, т.е. по часовой стрелке. Рис. 26 дает представление о том, как компьютерная программа иллюстрирует такое необычное на первый взгляд поведение.

В частности, для тонкого диска при малых отклонениях мгновенной угловой скорости от его оси симметрии угловая скорость прецессии, как уже отмечалось, приблизительно вдвое больше мгновенной угловой скорости:  $\Omega \approx 2\omega$ . При этом вектор  $\vec{\omega}_0$  угловой скорости собственного осевого вращения и мгновенная угловая скорость  $\vec{\omega}$  приблизительно равны по величине и направлены почти противоположно. Иначе говоря, прецессия и вращение тонкого диска вокруг собственной оси происходят в противоположных направлениях, о чем можно судить при наблюдении моделирования такого необычного поведения диска при свободном вращении (см. рис. 26). При этом прецессия происходит примерно вдвое быстрее собственного вращения.

Промежуточное положение между рассмотренными выше случаями вытянутого вдоль оси и сплющенного симметричного волчка занимает так называемый *шаровой волчок* — тело, у которого все три главных центральных момента инерции равны. Шаровой волчок не обязательно должен иметь сферическую форму. Например, у куба из однородного материала все три главных момента инерции тоже равны, т.е. при вращении он динамически эквивалентен шару. Любой правильный многогранник (тетраэдр, икосаэдр, додекаэдр) также представляет собой шаровой волчок. Все такие тела при вращении вокруг центра масс ведут себя одинаково. У шарового волчка направления главных осей инерции могут быть выбраны произвольно: любую тройку взаимно перпендикулярных осей с началом в центре масс можно рассматривать в качестве главных. В частности, для кубика эти оси совершенно необязательно направлять параллельно ребрам. Это значит, что любая ось, проходящая через центр масс, будет осью свободного вращения — при любом направлении вектора угловой скорости вектор момента импульса  $\vec{L}$  будет совпадать с ним по направлению. Для шарового волчка вращение по инерции вокруг любой оси представляет собой равномерное вращение с сохранением направления оси вращения в пространстве.

Само собой разумеется, что рассмотренная выше геометрическая интерпретация свободного вращения симметричного волчка применима и к частному случаю равенства продольного и поперечного моментов инерции, т.е. к случаю шарового волчка. Так как у шарового волчка вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  и направленная вдоль него мгновенная ось вращения сохраняют свое направление в пространстве (не прецессируют), то конус неподвижного аксоида вырождается в полупрямую, направленную вдоль вектора момента импульса  $\vec{L}$ . Иллюстрация поведения шаро-

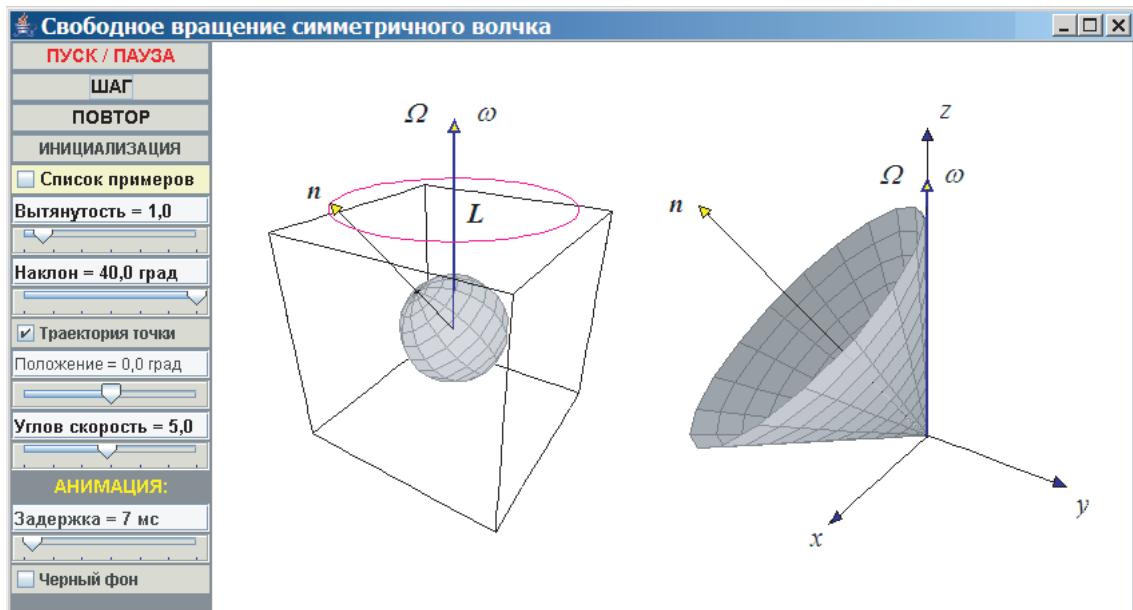


Рис. 27: Моделирование свободного вращения шарового волчка и соответствующая геометрическая интерпретация.

вого волчка в компьютерной программе показана на рис. 27. Качение подвижного аксоида, жестко связанного с телом, по выродившемуся в прямую неподвижному аксоиду сводится к равномерному вращению подвижного конуса вокруг своей образующей. Эта образующая совпадает по направлению с вектором момента импульса  $\vec{L}$  и неизменным вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Любая точка шарового волчка (например, конец стрелки на рис. 27, жестко связанной с телом) описывает окружность с центром на оси вращения.

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 258–277).
2. Общий курс физики, т. 1 Механика. М., «Наука», 1974 (стр. 263–269, стр. 294–301).
3. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 217–239, стр. 251–254).
4. Бутиков Е.И. Динамика вращения твердого тела. Спб, 2007 (стр. 2–10).

## 12 Прецессия и нутация гироскопа

### Содержание темы

Гироскоп. Приближенная теория гироскопа. Волчок в поле тяжести. Вынужденная прецессия гироскопа (псевдорегулярная прецессия и нутация). Применения гироскопов. Прецессия земной оси.

### 12.1 Вынужденная прецессия волчка в поле тяжести

Гироскопом называют тело вращения (например, массивный диск), приведенное в быстрое вращение вокруг оси симметрии. Первое знакомство с гироскопом обычно происходит в раннем детстве при наблюдении за необычным поведением известной игрушки — детского волчка или юлы. Пока волчок быстро вращается, он может устойчиво стоять на остром конце своей оси, сохраняя вертикальное положение оси и не падая на горизонтальную плоскость, хотя центр тяжести волчка расположен выше точки опоры. Если же ось вращающегося волчка отклонена от вертикали, то под действием силы тяжести ось описывает в пространстве круговой конус с вертикальной осью, так что угол наклона оси остается неизменным. Такое движение волчка называют *вынужденной прецессией* (см. рис. 28).

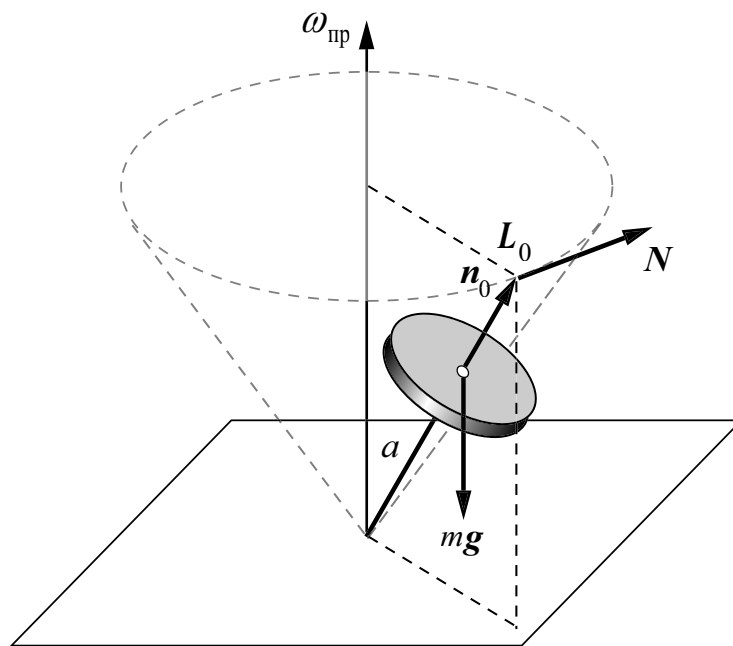


Рис. 28: Установившаяся (регулярная) прецессия гироскопа под действием силы тяжести.

В данной лекции приводится теоретическое объяснение вынужденной прецессии с помощью основного уравнения динамики твердого тела. Объяснение иллюстрируется небольшой моделирующей компьютерной программой (Java-апплетом) «Вынужденная прецессия гироскопа», которую можно найти в сети Интернет по адресу (<http://www.ifmo.ru/butikov/Applets/GyroscopeR.html>). Программа

выполняется непосредственно в браузере и не требует предварительной установки на компьютер.

Необычное на первый взгляд поведение гироскопа объясняется законом изменения момента импульса под действием внешних сил. Согласно этому закону, скорость изменения момента импульса  $\vec{L}$  (называемого иначе угловым моментом) любого тела относительно некоторой точки равна суммарному моменту  $\vec{N}$  действующих на тело внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}. \quad (96)$$

Когда волчок вращается вокруг собственной оси, вектор момента импульса  $\vec{L}$  тоже направлен вдоль этой оси. Направление  $\vec{L}$  связано с направлением вращения волчка правилом правого винта. Будем указывать направление оси волчка в пространстве (от точки опоры к центру масс) с помощью единичного вектора  $\vec{n}_0$  (рис. 28). Пусть  $I_0$  — момент инерции волчка относительно оси симметрии (например, для однородного диска или цилиндра  $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$ , где  $m$  — масса,  $R$  — радиус), а  $\omega_0$  — угловая скорость вращения вокруг собственной оси (положительная при вращении против часовой стрелки). Тогда вектор момента импульса волчка можно представить в виде  $\vec{L} = I_0\vec{n}_0$ .

Наклоненный к вертикали волчок прецессирует, т.е. помимо вращения вокруг собственной оси поворачивается еще и вокруг вертикальной оси. При быстром собственном вращении эта прецессия (поворот вокруг вертикальной оси) происходит настолько медленно, что с хорошей точностью можно пренебречь той составляющей момента импульса, которая обусловлена прецессией вокруг вертикали. Иными словами, приближенно можно считать, что вектор полного момента импульса  $\vec{L}$  и в этом случае направлен вдоль оси волчка:  $\vec{L} \approx \vec{L}_0 = I_0\vec{n}_0$ . Именно такой быстро вращающийся вокруг собственной оси волчок и называют гироскопом.

В приближенной теории гироскопа, основанной на законе изменения момента импульса (96), предполагается, что вектор  $\vec{L}$  равен  $\vec{L}_0$  и все время направлен вдоль собственной оси волчка. Поэтому описываемое уравнением (96) поведение вектора  $\vec{L}$  говорит и о том, как ведет себя в пространстве ось гироскопа. В случае тела, имеющего неподвижную точку (у детского волчка это точка опоры о горизонтальную плоскость), уравнение (96) удобно применять именно к этой точке. Будем называть эту точку полюсом. При выборе полюса в точке опоры момент силы реакции, действующей на волчок как раз в этой точке, обращается в нуль. В правой части уравнения (96) остается только момент  $\vec{N}$  силы тяжести  $m\vec{g}$ , который в каждый момент времени перпендикулярен вектору  $\vec{L}$ . Поэтому сила тяжести может изменить только направление  $\vec{L}$ , но не его длину, т.е. вызвать поворот вектора  $\vec{L}$ , а вместе с ним и поворот оси волчка вокруг вертикали, как это показано на рис. 28.

Пусть  $a$  — расстояние от точки опоры до центра тяжести. Тогда момент силы тяжести можно записать как векторное произведение вектора  $\vec{n}_0a$ , проведенного из точки опоры вдоль оси волчка в центр тяжести, на силу  $m\vec{g}$ :  $\vec{N} = \vec{n}_0a \times m\vec{g}$ . Вектор  $\vec{N}$  лежит в горизонтальной плоскости и направлен перпендикулярно вектору  $\vec{n}_0a$ , т.е. перпендикулярно оси волчка. Движение конца оси гироскопа происходит в направлении момента  $\vec{N}$  силы тяжести, а не в направлении самой силы тяжести  $m\vec{g}$ . Этим и объясняется «необычное» поведение гироскопа. Согласно уравнению (96),



за каждый малый промежуток времени  $dt$  вектор момента импульса  $\vec{L}$  получает под действием силы тяжести приращение  $d\vec{L} = \vec{N}dt$ , направленное вдоль  $\vec{N}$ , т.е. лежащее в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси волчка. Отсюда следует, что вектор  $\vec{L}$  и вместе с ним ось волчка равномерно поворачиваются (совершают прецессию) вокруг вертикали, проходящей через точку опоры. Угловую скорость  $\omega_{\text{пр}}$  этой прецессии можно найти, подставив  $\vec{L}_0 = I_0\vec{n}_0$  в левую часть уравнения (96) и  $\vec{N} = \vec{n}_0a \times m\vec{g}$  – в правую часть. Пренебрегая трением, угловую скорость собственного вращения будем считать постоянной и вынесем за знак производной. В результате уравнение (96) принимает вид:

$$I_0\omega_0 \frac{d\vec{n}_0}{dt} = \vec{n}_0a \times m\vec{g}, \quad (97)$$

или

$$I_0\omega_0 \frac{d\vec{n}_0}{dt} = \vec{\omega}_{\text{пр}} \times \vec{n}_0, \quad \text{где} \quad \vec{\omega}_{\text{пр}} = -\frac{am}{I_0\omega_0}\vec{g}. \quad (98)$$

Вектор угловой скорости прецессии  $\vec{\omega}_{\text{пр}}$  при  $\omega_0 > 0$  (т.е. при вращении гироскопа против часовой стрелки) направлен противоположно вектору  $\vec{g}$ , т.е. прецессия происходит тоже против часовой стрелки. Как следует из уравнения (98), величина угловой скорости прецессии обратно пропорциональна угловой скорости собственного вращения и прямо пропорциональна расстоянию  $a$  от точки опоры до центра тяжести. Она не зависит от угла наклона оси волчка к вертикали.

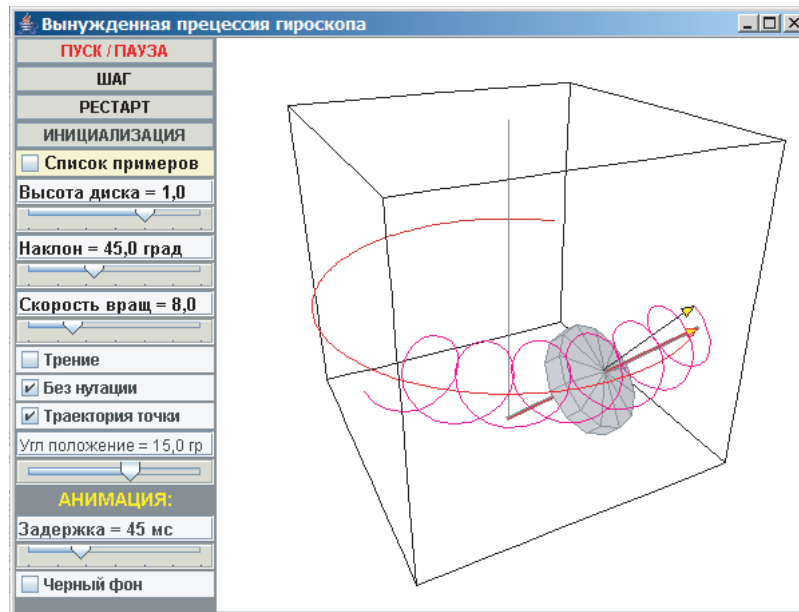


Рис. 29: Моделирование регулярной прецессии гироскопа в поле тяжести. Показаны круговая траектория конца оси и петлеобразная траектория точки волчка, не лежащей на оси.

Описываемое уравнением (98) поведение оси гироскопа называют *регулярной прецессией*. Это вынужденная прецессия, так как она происходит под действием момента силы тяжести. Все точки волчка, лежащие на его оси, равномерно дви-

жуются по круговым траекториям, центры которых лежат на вертикали, проходящей через точку опоры волчка.

На рис. 29 приведена иллюстрация регулярной прецессии гироскопа с помощью компьютерной программы «Вынужденная прецессия гироскопа». Программа строит траекторию, которую прочерчивает конец оси (в данном случае это окружность), а также петлеобразную траекторию некоторой точки волчка, не лежащей на оси. Для наглядности строится траектория точки, находящейся на конце тонкой стрелки, выходящей из центра масс за пределы диска волчка. Можно представлять себе эту стрелку как жестко связанную с телом волчка («воткнутую» в него). Траектория конца стрелки крупнее всех остальных, что позволяет наблюдать характерные особенности траекторий точек волчка в увеличенном масштабе. В программе расстояние от точки опоры волчка до конца стрелки выбрано равным длине оси волчка. Поэтому траектория выбранной точки и траектория конца оси лежат на поверхности одной и той же сферы с центром в точке опоры.

Замечательно, что регулярная прецессия, угловая скорость которой рассчитана выше на основе приближенной теории гироскопа, в действительности является одним из возможных *точных* решений динамического уравнения (96). Покажем это. В точной теории гироскопа необходимо принимать во внимание, помимо собственного момента импульса  $\vec{L}_0$ , дополнительный вклад в полный момент импульса  $\vec{L}$ , обусловленный участием гироскопа во вращениях вокруг других осей. В случае регулярной прецессии такой вклад создается дополнительным вращением волчка вокруг вертикали. Обозначим через  $\vec{L}_{пр}$  соответствующий вектор, пропорциональный угловой скорости прецессии  $\vec{\omega}_{пр}$  и совпадающий с ней по направлению, как показано на рис. 30.

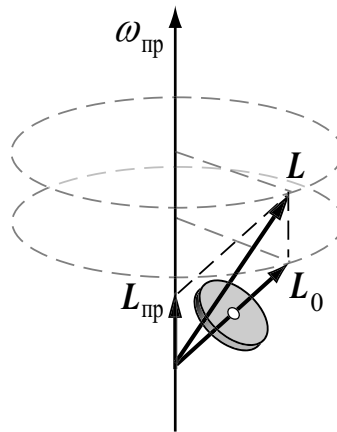


Рис. 30: Вектор  $\vec{L}$  момента импульса волчка при регулярной прецессии.

При учете  $\vec{L}_{пр}$  вектор полного момента импульса  $\vec{L}$  уже не направлен точно по оси волчка (см. рис. 30). Но легко понять, что при регулярной прецессии волчка горизонтальные составляющие векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{L}_0$  равны. Концы векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{L}_0$  синхронно описывают одинаковые окружности, показанные на рис. 30 штриховыми линиями. Это означает, что скорости изменения этих векторов равны. Иначе говоря, равны производные  $\vec{L}$  и  $\vec{L}_0$  по времени:  $d\vec{L}/dt = d\vec{L}_0/dt$ . Оба вектора совершают прецессию вокруг вертикали с одной и той же угловой скоростью  $\vec{\omega}_{пр}$ , т.е.

их изменение с течением времени описывается одинаковыми уравнениями:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\omega}_{\text{пр}} \times \vec{L}_0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{пр}} \times \vec{L}. \quad (99)$$

Однако вынужденная регулярная прецессия волчка — это не единственно возможное точное решение уравнения (96), когда в правой его части стоит момент силы тяжести. Регулярная прецессия будет происходить только при строго определенных начальных условиях: чтобы получить такое движение, нужно не только раскрутить волчок вокруг собственной оси, но и сообщить этой оси вращение вокруг вертикали с нужной угловой скоростью, а именно, угловой скоростью  $\vec{\omega}_{\text{пр}}$ , с которой должна происходить дальнейшая прецессия волчка.

В определенном смысле можно сказать, что сила тяжести, стремящаяся опрокинуть волчок, фактически не вызывает, а лишь поддерживает регулярную прецессию. Роль силы тяжести при регулярной прецессии гироскопа можно сравнить с ролью силы натяжения нити при равномерном движении по окружности привязанного к ней шарика. Сила натяжения тянет шарик к центру окружности, но шарик при этом все время движется перпендикулярно к силе. Сила натяжения нити не создает, а лишь поддерживает равномерное движение шарика по окружности. Чтобы получить такое движение, шарик необходимо сообщить начальную скорость в поперечном направлении. Если иметь в виду эту аналогию, то поведение оси гироскопа при регулярной прецессии представится, возможно, не таким уж странным, каким оно кажется на первый взгляд.

## 12.2 Нутация оси гироскопа

Чтобы понять, каким будет движение оси гироскопа при произвольных начальных условиях, в общем случае не обеспечивающих возникновения регулярной прецессии, рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу. Представим себе, как будет двигаться волчок, совершающий регулярную прецессию под действием силы тяжести, если в некоторый момент времени сила тяжести внезапно исчезнет. Практически такую ситуацию можно получить, если, начиная с некоторого момента, дать возможность всей установке (волчку вместе с подставкой) свободно падать, так что волчок, совершавший до этого момента регулярную прецессию, внезапно окажется в состоянии невесомости. Очевидно, что для ответа на этот вопрос нужно обратиться к задаче о симметричном волчке, вращающемся «по инерции», т.е. в отсутствие внешних сил. Такая задача рассматривается в предыдущей лекции и иллюстрируется программой «Свободная прецессия симметричного волчка» (<http://www.ifmo.ru/butikov/Applets/PrecessionR.html>).

При несовпадении направления момента импульса с осью волчка движение волчка можно представить как результат сложения двух вращений: вращения вокруг собственной оси (сохраняющей неизменное направление в теле волчка) с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$  и одновременного вращения этой оси вокруг неизменного в пространстве направления вектора момента импульса  $\vec{L}$ . Ось волчка при этом описывает круговой конус вокруг направления вектора  $\vec{L}$ . Такое равномерное движение оси волчка по конусу в отсутствие внешних сил представляет собой свободную прецессию. Применительно к гироскопу ее принято называть нутацией.

Итак, вектор полного момента импульса  $\vec{L}$  нашего волчка, совершающего регулярную прецессию, не совпадает по направлению с осью волчка, как это можно видеть на рис. 30). В момент «выключения» силы тяжести вектор  $\vec{L}$  мгновенно останавливается, но ось волчка продолжает движение. Скорость оси в этот момент нужно рассматривать как начальную скорость для дальнейшего движения волчка в отсутствие силы тяжести. Картина этого движения показана на рис. 31). Это нутация, в процессе которой ось волчка (вектор  $\vec{n}_0$ ) описывает круговой конус с вершиной в точке опоры вокруг вектора  $\vec{L}$  полного момента импульса.

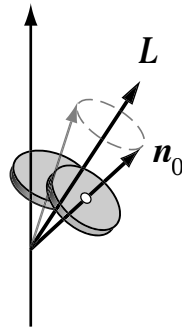


Рис. 31: Свободная прецессия (нутация) волчка вокруг направления полного момента импульса  $\vec{L}$  в отсутствие силы тяжести.

Существованием нутаций объясняется еще одна особенность поведения гироскопа, которая может показаться парадоксальной. Согласно уравнению (96) момент импульса гироскопа  $\vec{L}$  изменяется только тогда, когда на гироскоп действуют внешние силы и их момент  $\vec{N}$  отличен от нуля. Если действие внешних сил прекращается, как в рассматриваемом нами примере, то в тот же момент времени прекращается изменение вектора  $\vec{L}$  и, следовательно, прекращается прецессия гироскопа. Казалось бы, ось гироскопа с этого момента должна стать сразу неподвижной. Вместе с осью и центр масс волчка, во время прецессии двигавшийся по окружности, также должен мгновенно остановиться. Не противоречит ли такая безынерционность поведения волчка закону инерции?

Это противоречие действительно существовало бы, если отмеченная безынерционность относилась бы к движению оси гироскопа, а не вектора  $\vec{L}$ . Вектор  $\vec{L}$  и в самом деле ведет себя безынерционно, прекращая изменяться сразу в тот момент времени, когда прекращается действие внешних сил, как это следует из основного уравнения (96). К ложному заключению о безынерционности оси волчка приводит приближенная теория гироскопа, в которой предполагается, что вектор  $\vec{L}$  всегда направлен вдоль оси гироскопа. В действительности у прецессирующего волчка вектор  $\vec{L}$  отклонен от оси на некоторый угол, и при прекращении действия силы сразу возникает нутация вокруг неизменного в пространстве направления  $\vec{L}$ . Скорость центра масс в момент возникновения нутации как раз равна той скорости, с которой он двигался до этого момента, т.е. пока происходила прецессия. Таким образом, учет нутации устраняет противоречие с законом инерции.

### 12.3 Прецессия вместе с нутацией

Перейдем к исследованию вопроса о том, как будет вести себя вращающийся волчок под действием силы тяжести при начальных условиях, не обеспечивающих немедленного возникновения регулярной прецессии. Из разобранный выше примера можно заключить, что в общем случае движение волчка должно представлять собой суперпозицию вынужденной регулярной прецессии и нутации.

Рассмотрим для определенности наиболее характерную ситуацию, когда мы сначала, во время раскручивания волчка, удерживаем его от падения за верхний конец наклоненной оси. Для этого мы должны к верхнему концу оси приложить силу, направленную вертикально вверх. Момент этой силы относительно точки опоры компенсирует момент силы тяжести. Если бы мы отпустили верхний конец оси до того, как привели волчок во вращение, ось стала бы просто падать вниз, ускоряясь поворачиваясь вокруг точки опоры в вертикальной плоскости. Но как будет вести себя волчок, если мы отпускаем ось после того, как раскрутили его?

Очевидно, что в этом случае в начальный момент вектор момента импульса  $\vec{L}$  направлен вдоль оси волчка. Как только мы отпускаем ось, появляется момент силы тяжести, и под действием этого момента вектор  $\vec{L}$ , в соответствии с основным уравнением (96), начинает изменяться, стремясь двигаться по конусу так, как это происходит при регулярной прецессии. Но если прецессия вектора  $\vec{L}$  вокруг вертикали с угловой скоростью  $\vec{\omega}_{\text{пр}}$  начинается сразу, безынерционно, то ось волчка, как и находящийся на ней центр масс, в начальный момент еще неподвижны, т.е. их начальная скорость равна нулю. Исходя из таких начальных условий, попробуем представить себе дальнейшее движение волчка как суперпозицию вынужденной прецессии и нутации.

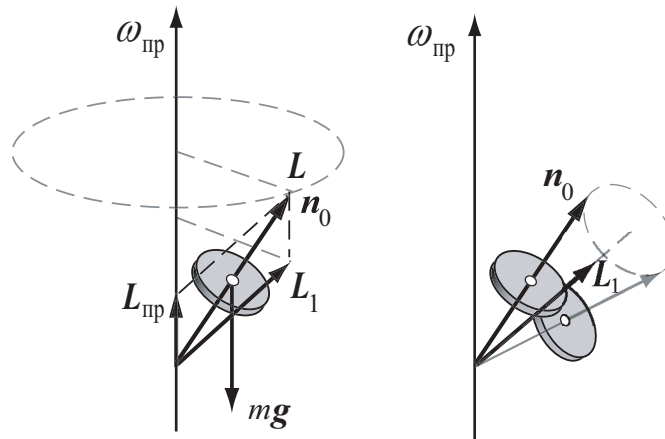


Рис. 32: Наложение нутации оси волчка вокруг направления вектора  $\vec{L}_1$  на вынужденную прецессию.

Участие волчка в вынужденной прецессии означает, что у вектора полного момента импульса  $\vec{L}$  должна быть вертикальная составляющая  $\vec{L}_{\text{пр}}$ , обусловленная вращением волчка вокруг вертикали с угловой скоростью  $\vec{\omega}_{\text{пр}}$ . Выделим  $\vec{L}_{\text{пр}}$  из полного момента импульса, т.е. представим  $\vec{L}$  в виде суммы  $\vec{L}_{\text{пр}} + \vec{L}_1$ , и будем рассматривать оставшуюся часть  $\vec{L}_1$  как вклад собственного вращения волчка в полный

момент импульса (см. рис. 32).

Легко понять, что, если отвлечься от вынужденной прецессии волчка и сосредоточиться на его собственном вращении, то связанный с этим вращением момент импульса  $\vec{L}_1$  уже не направлен точно вдоль оси волчка: вектор  $\vec{L}_1$  отклонен от вертикали сильнее, чем ось волчка. Отклонение  $\vec{L}_1$  от оси волчка означает, что одновременно с медленной вынужденной прецессией будет происходить быстрая нутация волчка, т.е. ось волчка будет описывать конус (с малым углом раствора) вокруг направления прецессирующего вектора  $\vec{L}_1$ . Сложение этих двух движений дает для начального момента времени требуемую начальными условиями нулевую скорость оси волчка (и центра масс).

Чтобы начальная скорость оси действительно получилась равной нулю при сложении двух движений, вектор  $\vec{L}_1$  должен быть отклонен от оси волчка (от вектора  $\vec{n}_0$ ) на вполне определенный угол, зависящий от угла наклона оси волчка и отношения угловых скоростей нутации и прецессии. Именно этим углом между  $\vec{L}_1$  и  $\vec{n}_0$  определяется раствор конуса нутации. В моделирующей программе «Вынужденная прецессия гироскопа» конус нутации выбирается таким, чтобы в момент освобождения оси волчка скорость оси была равна нулю.

Итак, отпущенная ось волчка (вектор  $\vec{n}_0$  на рис. 32) одновременно совершает два сравнительно простых движения: по вертикальному конусу, соответствующему установившейся вынужденной прецессии (рис. 32, слева) и по малому конусу нутации вокруг вектора момента импульса  $\vec{L}_1$  собственного вращения (рис. 32, справа) с угловой скоростью  $\Omega = \vec{L}_1/I_\perp$ . Первому из этих движений соответствует траектория верхнего конца оси в виде горизонтальной окружности, которая показана штриховой линией на рис. 32 слева; второму — малая окружность, перпендикулярная вектору  $\vec{L}_1$  и показанная на рис. 32 справа. Оба движения начинаются в момент отпускания оси — до того волчок просто вращался вокруг неподвижной оси. Сложение этих движений дает для верхнего конца оси траекторию, напоминающую циклоиду, т.е. кривую, которую рисует точка на ободке колеса, катящегося без проскальзывания. Моделирующая программа строит траекторию конца оси волчка (синяя линия на рис. 33) именно для таких начальных условий. Красная окружность показывает траекторию конца вектора  $\vec{L}_1$ .

Обратите внимание, что в первый момент, как только мы отпускаем ось волчка, под действием силы тяжести она действительно начинает падать вниз, что вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями. Но по мере того, как ось набирает скорость, траектория ее верхнего конца все сильнее отклоняется от вертикали. Вскоре движение оси становится горизонтальным, как и при регулярной прецессии, но скорость этого движения больше той, что нужна для регулярной прецессии. Траектория конца оси начинает отклоняться вверх. Поднявшись до исходной высоты, ось «замирает» — ее скорость обращается в нуль. Затем все повторяется сначала. Но теперь мы понимаем, что такое своеобразное поведение, когда конец оси движется по циклоидальной траектории, объясняется сложением двух движений — нутации волчка вокруг вектора момента импульса  $\vec{L}_1$  с одновременной вынужденной прецессией этого вектора вокруг вертикали.

Для быстро вращающегося гироскопа  $L_1 \approx I_0\omega_0$ , откуда для угловой скорости нутации следует выражение  $\Omega = L_1/I_\perp \approx (I_0/I_\perp)\omega_0$ . Таким образом, угловая скорость нутации  $\Omega$  имеет тот же порядок величины, что и угловая скорость собственного вращения гироскопа, если только его продольный и поперечный мо-

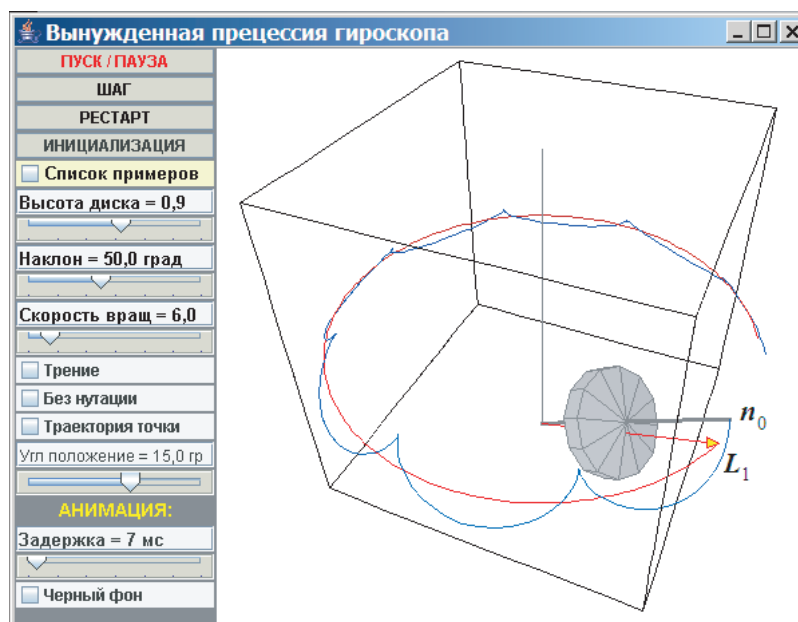


Рис. 33: Демонстрация вынужденной прецессии под действием силы тяжести вместе с нутацией, сопровождающей прецессию при освобождении оси раскрученного гироскопа.

менты инерции не различаются слишком сильно. При других начальных условиях сложение прецессии и нутации может порождать траектории верхнего конца оси волчка петлеобразного и волнообразного (синусообразного) вида. И только тогда, когда начальная скорость как раз равна скорости оси при регулярной прецессии, волнообразная траектория полностью разглаживается, превращаясь в окружность, описываемую концом оси при регулярной прецессии (см. рис. 29)).

Когда нутации малы, вынужденную прецессию гироскопа называют *псевдорегулярной*. Для быстро вращающихся гироскопов, применяемых в технике, псевдорегулярная прецессия практически не отличается от регулярной. В таких случаях нутация проявляет себя как едва заметное мелкое и частое дрожание оси гироскопа. Кроме того, мелкомасштабные нутации быстро затухают под действием сил трения, и псевдорегулярная прецессия переходит в регулярную. Когда нутации полностью затухнут и установится регулярная вынужденная прецессия, вектор  $\vec{L}_1$  момента импульса, связанного с собственным вращением волчка, будет направлен вдоль оси волчка. Представление о том, по каким траекториям движутся точки волчка, не лежащие на оси симметрии, дает рис. 34.

Жестко связанная с волчком стрелка («воткнутая» в тело волчка) образует небольшой угол (15 градусов) с его осью. Траектория острия этой стрелки лежит на сферической поверхности с центром в неподвижной точке опоры волчка. При регулярной прецессии (см. рис. 29)) петлеобразная траектория стрелки получается как результат сложения вращения волчка вокруг собственной оси и равномерного движения этой оси по конусу прецессии. Все петли такой траектории одинаковы. При добавлении нутаций ось волчка совершает колебания около среднего положения, соответствующего конусу установившейся прецессии. Из-за таких колебаний оси волчка траектория конца стрелки заметно усложняется.

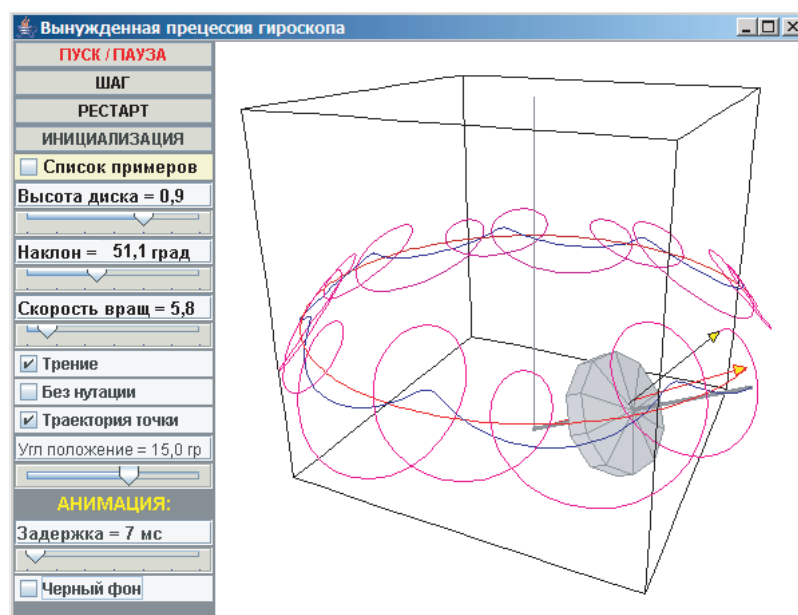


Рис. 34: Траектории оси волчка и точки, не лежащей на оси, при переходе псевдо-регулярной прецессии в установившуюся регулярную прецессию.

## 12.4 Прецессия земной оси

Если бы Земля была идеальным шаром, направление оси суточного вращения Земли в пространстве оставалось бы неизменным. Однако это направление сохраняется лишь приближенно. Постепенное изменение направления земной оси происходит с периодом почти в 26 000 лет, на протяжении которых ось описывает в пространстве круговой конус. Эта прецессия земной оси исторически была третьим из открытых движений Земли — после значительно более очевидных суточного вращения вокруг оси и годовичного орбитального обращения вокруг Солнца.

Из астрономических наблюдений известно, что небесный экватор наклонен по отношению к эклиптике на угол  $23,5^\circ$ . Это значит, что на такой угол ось вращения Земли отклонена от перпендикуляра к плоскости земной орбиты. Нашу планету можно считать сферически симметричной лишь в первом приближении. Основное отклонение вызвано «сплюснутостью» земного шара, у которого полярный радиус на 21 км короче экваториального. В небесной механике Землю иногда представляют в виде шара с надетым на него по экватору массивным обручем, т.е. вместо полярного сжатия используют эквивалентное представление об экваториальном «вздутии» Земли. Гравитационные воздействия Солнца и Луны на экваториальное «вздутие» Земли создают момент сил, стремящийся повернуть ось Земли в сторону перпендикуляра к плоскости орбиты. Но под действием этого момента Земля ведет себя подобно гигантскому волчку: земная ось совершает медленную прецессию в пространстве, в процессе которой наклон оси к эклиптике не изменяется.

Из-за прецессии земной оси небесные полюса прочерчивают круги на небесной сфере. В современную эпоху Северный небесный полюс отклоняется менее чем на  $1^\circ$  дуги от Полярной звезды. Ближе всего к Полярной звезде полюс подойдет в 2017 году. Через 12 000 лет Северный небесный полюс будет находиться в  $5^\circ$  от



Веги. В современную эпоху поблизости к Южному небесному полюсу нет ни одной сколько-нибудь яркой звезды.

Небесный экватор и эклиптика пересекаются в двух точках, называемых точками весеннего и осеннего равноденствий. Из-за движения Земли по орбите Солнце в своем видимом движении пересекает небесный экватор дважды на протяжении года: в марте при движении из южного полушария в северное и в сентябре — в обратном направлении. Точки равноденствий постепенно смещаются вдоль эклиптики в западном направлении со скоростью 50.2 угловых секунды в год по мере того как небесный экватор меняет свою ориентацию из-за прецессии земной оси.

## **Рекомендуемая литература**

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 279–281).
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т. 1 Механика. М., «Наука», 1974 (стр. 269–277, стр. 294–301).
3. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 239–247, стр. 251–254).
4. Бутиков Е.И. Динамика вращения твердого тела. Спб, 2007 (стр. 11–21).

## 13 Силы инерции и тяготение. Принцип эквивалентности

### Содержание темы

Законы движения в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции в поступательно движущихся неинерциальных системах. Принцип относительности, первый закон Ньютона и происхождение сил инерции. Системы отсчета, свободно падающие в гравитационном поле. Невесомость. Принцип эквивалентности. Пропорциональность инертной и гравитационной масс. Опыты Галилея, Ньютона, Бесселя, Этвеша и Дикке. Локальный характер принципа эквивалентности. Приливные силы в неоднородном гравитационном поле.

### 13.1 Неинерциальные системы отсчета и силы инерции

Для описания движения тел в неинерциальных системах отсчета никакие новые физические законы не нужны. Переход к неинерциальной системе по сути дела представляет собой простой (кинематический) пересчет от одной системы отсчета к другой. В уравнении второго закона Ньютона, записанного в инерциальной системе, можно выразить «абсолютное» ускорение (ускорение относительно инерциальной системы отсчета) через относительное и переносное (в случае вращающейся системы — еще и кориолисово ускорение). Оставляя в левой части уравнения только относительное ускорение, придают этому уравнению вид второго закона Ньютона с дополнительными членами в правой части. Эти дополнительные члены можно трактовать как силы инерции, складывающиеся с теми «настоящими» или «физическими» силами, которые характеризуют действие других тел на рассматриваемое тело. Интегрирование дифференциального уравнения движения с включенными в него силами инерции позволяет рассчитать движение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Многочисленные дискуссии в литературе по поводу сил инерции («фиктивные» это или «реальные» силы), несмотря на их острый характер, по своей сути чисто терминологические. Если определять силу как количественную меру действия других тел на данное тело, то в этом смысле сила инерции не является «настоящей» силой, так как мы не можем указать ее источник, т.е. тело, со стороны которого она действует. Поэтому к силам инерции неприменим третий закон Ньютона. К тому же эта сила исчезает при переходе к другой (инерциальной) системе отсчета, чего с «настоящими» силами не бывает. В англоязычной литературе силы инерции иногда называют псевдосилами.

Но если трактовать силу как причину ускорения тела, то в этом отношении силы инерции «ничем не хуже» всех других сил. Неприменимость третьего закона к силам инерции принципиального значения не имеет, поскольку для любой физической системы силы инерции всегда будут внешними силами (третий закон важен лишь для внутренних сил, действующих между входящими в систему телами).

Вопрос о происхождении (или об источнике) сил инерции также не имеет самостоятельного значения, так как по существу сводится к вопросу о том, почему второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Последний же вопрос при изучении основ динамики обычно не поднимается (дескать,

так устроен мир, о чем свидетельствуют все известные экспериментальные факты), хотя безусловно очень важен в познавательном отношении. Попытки выяснения физической причины, выделяющей инерциальные системы отсчета среди прочих (в частности, так называемый принцип Маха), послужили для Эйнштейна стимулом к созданию общей теории относительности (релятивистской теории тяготения).

## 13.2 Силы инерции и силы тяготения

Важная особенность сил инерции заключается в том, что для любого тела (независимо от его формы, размеров, химического состава, электрического заряда, магнитного момента и любых других свойств) силы инерции всегда пропорциональны инертной массе тела. Это свойство непосредственно следует из определения сил инерции. Поэтому все тела под действием только сил инерции приобретают одинаковые ускорения.

Это свойство роднит силы инерции с силами тяготения. Использование неинерциальных систем отсчета позволяет непринужденно решать многие задачи, к которым трудно подступиться в рамках инерциальных систем. Неинерциальные системы отсчета могут использоваться не только в классической (ньютоновской) механике, но в равной мере и в задачах релятивистской механики (вопреки часто встречающимся утверждениям).

Земное тяготение известно с глубокой древности, но понимание роли тяготения в наблюдаемых движениях небесных тел («всемирное» тяготение) пришло лишь в эпоху Кеплера и Ньютона. Даже Галилей, первым пришедший к пониманию того, что равномерное прямолинейное движение представляет собой естественное состояние тела, ограничил применимость закона инерции только земными условиями. Галилей не придавал значения законам Кеплера, продолжая считать круговые движения небесных тел «совершенными», т.е. рассматривал их как естественные движения, не нуждающиеся в динамическом объяснении.

Количественные закономерности всемирного тяготения были впервые установлены Ньютоном на основе открытых Кеплером кинематических законов движения планет солнечной системы. Центральный характер силы тяготения следует из закона площадей (второго закона Кеплера). Обратная пропорциональность силы тяготения квадрату расстояния между телами следует из того, что движение планеты происходит по эллипсу (первый закон Кеплера). Более простое доказательство зависимости силы тяготения от расстояния ( $F \sim 1/r^2$ ) может быть основано на третьем законе Кеплера для круговых орбит (квадраты периодов обращения пропорциональны кубам радиусов орбит). Вся совокупность астрономических наблюдений свидетельствует о том, что показатель степени в законе тяготения равен 2 с очень высокой точностью, что отражает евклидову природу трехмерного физического пространства: в евклидовой геометрии поверхность сферы в точности пропорциональна квадрату ее радиуса.

Связь всемирного тяготения с земной силой тяжести также установлена Ньютоном путем сравнения ускорения Луны с ускорением свободного падения тел на поверхности Земли. В этой проблеме объяснения земной тяжести всемирным тяготением существенным моментом является математическое доказательство того, что тело со сферически симметричным распределением масс проявляет себя в гравитационных взаимодействиях так, как если бы вся его масса была сосредото-

на в геометрическом центре (для доказательства того, что ускорение свободного падения  $g$  равно  $GM/R^2$ , Ньюто́ну пришлось изобрести интегральное исчисление). Гравитационную постоянную (коэффициент пропорциональности  $G$  в законе  $F = GmM/r^2$ ) невозможно определить из астрономических наблюдений, так как  $G$  входит во все формулы вместе с массой  $M$  источника гравитационного поля. Лабораторные опыты по определению гравитационной постоянной и тем самым по определению массы Земли («взвешивание Земли») и других небесных тел впервые были выполнены Кэвендишем.

### 13.3 Пропорциональность инертной и гравитационной масс

Гравитационное притяжение между материальными телами пропорционально массам взаимодействующих тел. В законе всемирного тяготения  $F = GmM/r^2$  масса выступает как количественная характеристика способности тела к гравитационным взаимодействиям, подобно тому, как в законе Кулона  $F = qQ/r^2$  электрический заряд тела выступает как мера способности тела к электростатическим взаимодействиям. В этом смысле массу, входящую в закон тяготения (в отличие от инертной массы, входящей во второй закон Ньютона), можно назвать *гравитационным зарядом* (гравитационной массой). Иначе говоря, эти величины в классической физике характеризуют разные свойства материи: инертная масса служит мерой способности тела приобретать ускорение под действием силы (мерой инертности), а гравитационная масса — мерой способности тела к гравитационным взаимодействиям.

Принципиально важное значение имеет связанный с тяготением физический закон (открытый еще Галилеем), согласно которому свободное падение любых тел в одном и том же гравитационном поле происходит с одинаковым ускорением. Другими словами, движение тела под действием одного лишь тяготения совершенно не зависит от свойств тела, т.е. столь же универсально, как и свободное движение. В той же мере универсально и любое сочетание свободного движения и свободного падения, т.е. движение, при котором ускорение создается одним лишь тяготением (например, движение планет вокруг Солнца).

Из закона Галилея (вместе со вторым законом Ньютона) следует, что действующая на любое тело сила тяготения пропорциональна его инертной массе. Это утверждение известно как пропорциональность инертной и гравитационной масс всех тел. Для экспериментальной проверки этого закона после Галилея неоднократно ставились все более точные опыты (Ньютон, Бессель, Этвеш, Дикке) с целью ответить на вопрос: зависит ли гравитационное ускорение тела от его природы? В недавних опытах Дикке было установлено, что солнечное тяготение сообщает телам из алюминия и золота ускорения, отличающиеся не более чем на  $3 \cdot 10^{-11}$ . В 70-х годах Брагинским и Пановым точность опытов была увеличена еще примерно в 40 раз, так что в настоящее время пропорциональность инертной и гравитационной масс установлена с относительной точностью, достигающей  $10^{-12}$ .

### 13.4 Принцип эквивалентности

Для классической физики строгая пропорциональность инертной и гравитационной масс не имеет под собой физической причины, т. е. не связана с логической

структурой теории, а является скорее случайным совпадением. Ньютоновская теория не пострадала бы в случае, если эта пропорциональность была бы лишь грубым приближением к действительности. Эйнштейн счел неудовлетворительным, что столь универсальный факт пропорциональности инертной и гравитационной масс, установленный на опыте с чрезвычайно высокой точностью, оставался необъясненным и не находил своего места в фундаменте наших представлений о природе. В результате им был сформулирован *принцип эквивалентности*, связывающий воедино инерцию и тяготение. В основанной на этом принципе релятивистской теории тяготения (общей теории относительности) равенство инертной и гравитационной масс имеет принципиальное значение и изначально заложено в основу теории. Согласно Эйнштейну, в совпадении инертной и гравитационной масс нет ничего удивительного или случайного, так как он предположил, что в действительности инертная и гравитационная массы представляют собой одну и ту же физическую величину.

Для формулировки принципа эквивалентности удобно, следуя Эйнштейну, рассматривать идеализированные мысленные эксперименты в закрытой лаборатории («кабине лифта»). В случае свободного падения такого «лифта» в гравитационном поле мы получаем реализацию неинерциальной системы отсчета, в которой все тела подвержены действию сил инерции. Но гравитационное поле всем телам в этой лаборатории сообщает в точности такое же ускорение, как и самой лаборатории. Другими словами, в такой свободно падающей системе отсчета движения всех свободных тел (движения «по инерции») будут прямолинейными и равномерными, хотя для внешнего наблюдателя эти движения представляются ускоренными.

Невозможность с помощью механических опытов в закрытой лаборатории выяснить, является ли связанная с ней система отсчета инерциальной, или же она находится в свободном падении в гравитационном поле, следует из пропорциональности инертной и гравитационной масс. Эйнштейн распространил это утверждение на всю физику: не только механические движения, но и все физические явления в свободно падающей лаборатории будут происходить так же точно, как и в инерциальной системе отсчета. Принципиальная невозможность отличить одно явление от другого (инерцию от тяготения) означает, что мы имеем дело с одним и тем же явлением, т.е. свободное падение и свободное движение (движение «по инерции») — это одно и то же.

### 13.5 Принцип эквивалентности и невесомость

Примером практической реализации свободно падающей лаборатории (эйнштейновского «лифта») может служить космический корабль или станция в пассивном орбитальном полете. Мы говорим, что все тела на такой станции находятся в «состоянии невесомости», имея в виду, что все явления там происходят так, как если бы это была инерциальная система отсчета, и никаких гравитационных полей там не было. Сторонний наблюдатель может интерпретировать данную ситуацию как полную компенсацию сил тяготения, действующих на все тела в свободно падающей лаборатории, силами инерции, которые, как и силы тяготения, благодаря своей замечательной универсальности всем телам в лаборатории сообщают одинаковые ускорения, противоположные гравитационным ускорениям. Разумеется, из-за неоднородности поля тяготения такая компенсация сил тяготения силами инер-

ции возможна только в ограниченной области пространства (локальный характер принципа эквивалентности).

Чтобы испытать состояние невесомости, необязательно становиться космонавтом и совершать полет на орбитальной станции. Наша планета по существу представляет собой космический корабль, находящийся в свободном падении под действием гравитационных полей Солнца и других небесных тел. Поэтому все мы на Земле находимся в состоянии невесомости по отношению к солнечному тяготению и тяготению других небесных тел (кроме Земли).

Неоднородность полей тяготения Луны и Солнца приводит к неполной компенсации сил тяготения силами инерции, действующими на все тела в связанной с Землей свободно падающей системе отсчета. Эта неполная компенсация отражает локальный характер принципа эквивалентности и проявляется в хорошо знакомых приливных силах.

### 13.6 Релятивистская теория тяготения

Соединение релятивистских представлений о пространстве и времени с принципом эквивалентности приводит к релятивистской теории тяготения (общей теории относительности). Вследствие универсальности тяготения исчезают причины для его интерпретации как силового поля. То, что в классической физике рассматривалось как состояние свободного падения (как ускоренное движение в поле тяготения), в общей теории относительности трактуется как состояние свободного движения («движения по инерции») в искривленном пространстве-времени. Свободное движение тела — это наиболее простое движение, происходящее в отсутствие всяких воздействий со стороны других тел и силовых полей. Характеристики такого движения определяются только геометрическими свойствами пространства-времени: мировые линии свободного движения (аналог «прямых» линий) представляют собой геодезические линии геометрии пространства-времени. В отсутствие массивных тел это действительно прямые линии в плоском псевдоевклидовом пространстве-времени.

Согласно представлениям ньютоновской физики, присутствие материальных тел проявляется в создаваемом ими поле тяготения. Действуя на свободные тела, поле тяготения вызывает отклонения в их движении от прямолинейного равномерного движения в евклидовом физическом пространстве. Согласно общей теории относительности, материальные тела приводят не к появлению поля тяготения как некоторого физического силового поля, а к локальным отклонениям геометрии реального пространства-времени от псевдоевклидовой геометрии. (Плоское псевдоевклидово пространство-время частной теории относительности приближенно соответствует физической реальности в отсутствие массивных тел.)

Таким образом, в общей теории относительности характеристики свободного движения пробного тела при наличии материальных тел обусловлены не создаваемым этими телами физическим полем тяготения, а пространственно-временными свойствами реального мира. Влияние материи на геометрию проявляется в том, что мировые линии свободных частиц (аналог «прямых») представляют собой геодезические линии в искривленном пространстве-времени. Неевклидовость мира обнаруживается прежде всего в движении, т.е. не в пространственной, а в пространственно-временной геометрии.

Геометрические свойства пространства-времени в каждой точке характеризуются метрическим тензором. Уравнения тяготения Эйнштейна связывают геометрические характеристики пространства-времени с тензором энергии-импульса физической среды, играющим в релятивистской теории роль источника явлений тяготения (т.е. искривления пространства-времени). Тензор энергии-импульса определяется массами тел и их скоростями, а также всеми другими видами энергии в рассматриваемой системе (в соответствии с релятивистским соотношением  $E = mc^2$ ).

Образно говоря, гениальность Ньютона проявилась в том, что он увидел Луну свободно падающей на Землю, хотя всякий видит совсем иное. И нужно было обладать гениальностью Эйнштейна, чтобы увидеть, что движение Луны в некотором смысле происходит по «прямой».

### 13.7 Эйнштейновская и ньютоновская теории тяготения

Ни одна физическая теория не подвергалась таким испытаниям, проверкам и перепроверкам (почти с непостижимой степенью точности, главным образом в астрономии и небесной механике), как теория тяготения Ньютона за первые два с половиной века своего существования. Но это не уберегло теорию от опровержения в результате создания релятивистской теории тяготения. Релятивистская теория лучше объясняет несколько тонких эффектов, лежащих на грани экспериментальных возможностей (прецессия перигелия орбиты Меркурия, гравитационное красное смещение спектральных линий, отклонение световых лучей при прохождении вблизи Солнца, задержка радиосигналов при прохождении вблизи Солнца, уменьшение периода обращения компонент двойной звездной системы из-за излучения гравитационных волн), и дает более глубокое понимание явления тяготения в целом. Но в той области, где ньютоновская теория выдержала экспериментальную проверку, любая приходящая ей на смену теория тяготения (в том числе эйнштейновская теория тяготения) должна приводить к тем же результатам (принцип соответствия): уравнения релятивистской теории тяготения в пределе переходят в уравнения классической динамики и ньютоновской теории тяготения.

Можно показать, что ньютоновская теория хорошо описывает наблюдательные факты, пока скорости, приобретаемые телами под влиянием тяготения, малы по сравнению с скоростью света, т.е. пока гравитационная энергия тела составляет малую часть полной энергии (включающей энергию покоя). В таком случае говорят о слабых гравитационных полях. В солнечной системе мы имеем дело только со слабым тяготением. Поэтому и в наши дни все расчеты в небесной механике и космической динамике выполняются на основе ньютоновской теории тяготения.

Для определения условий, ограничивающих применимость ньютоновской теории тяготения, можно рассмотреть падение малого пробного тела из бесконечности в гравитационном поле большого тела со сферически симметричным распределением масс. Скорость, приобретаемая пробным телом на расстоянии  $R$  от тела массы  $M$  определяется (на основании закона всемирного тяготения и закона сохранения энергии) выражением  $v = \sqrt{2GM/R}$ . Расстояние  $R$ , на котором вычисляемая по этой формуле скорость становится равной скорости света, называется *гравитационным радиусом* тела массы  $M$ :  $R = 2GM/c^2$ . Гравитационные радиусы обычных астрофизических объектов ничтожно малы по сравнению с их действительными размерами: гравитационный радиус Земли  $\sim 1$  см, Солнца  $\sim 3$  км. Если

тело сжать до размеров гравитационного радиуса, то никакие силы не смогут удержать его от дальнейшего сжатия под действием гравитации. Такой релятивистский гравитационный коллапс может происходить с достаточно массивными звездами в конце их эволюции.



## 14 Собственные колебания осциллятора. Затухание колебаний при вязком и сухом трении

### Содержание темы

Свободные колебания гармонического осциллятора. Изохронность линейного осциллятора. Затухание колебаний при вязком трении. Декремент затухания. Добротность. Фазовый портрет линейного осциллятора. Превращения энергии при колебаниях. Критическое затухание. Аперiodический режим. Затухание колебаний при сухом трении. Зона застоя. Причины случайных погрешностей стрелочных измерительных приборов.

### 14.1 Модель линейного осциллятора

Состояние равновесия физической системы называется *устойчивым*, если при любом отклонении из равновесия возникает *возвращающая*, или *восстанавливающая* сила, которая стремится вернуть систему в равновесие. Если систему вывести из устойчивого равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, в системе будут происходить колебания около устойчивого положения равновесия. Такие колебания, происходящие в отсутствие периодического внешнего воздействия на осциллятор, в соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу возбуждения называют *собственными* или *свободными*. Любая система, способная совершать собственные колебания, называется *осциллятором*.

В отсутствие трения энергия, сообщенная системе при начальном возбуждении, остается неизменной в процессе последующих собственных колебаний. Поэтому в идеализированных консервативных системах собственные колебания продолжаются неограниченно долго. В консервативных системах с одной степенью свободы собственные колебания будут строго периодическими, так как начальное состояние системы воспроизводится через равные промежутки времени. При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, собственные колебания постепенно затухают из-за диссипации (рассеяния) механической энергии, и в конце концов система приходит в состояние покоя в положении равновесия.

Если восстанавливающая сила пропорциональна величине отклонения из положения равновесия, то такая система в отсутствие трения, а также при наличии вязкого трения (сила трения пропорциональна скорости) описывается *линейным дифференциальным уравнением*. В отсутствие трения собственные колебания в линейной системе будут гармоническими (синусоидальными), а при слабом вязком трении — почти гармоническими (с экспоненциально убывающей амплитудой). Модель линейного осциллятора пригодна также для описания малых колебаний вблизи устойчивого положения равновесия и в нелинейных системах при условии, что зависимость возвращающей силы от смещения из положения равновесия может быть аппроксимирована линейной функцией вплоть до отклонений, соответствующих амплитуде рассматриваемых колебаний.

Хорошо известный пример линейной механической системы — груз, подвешенный на упругой пружине, подчиняющейся закону Гука. Другой пример — торсион-

ный пружинный осциллятор, представляющий собой уравновешенный ротор (маховик) со спиральной пружиной, закручивающейся при повороте маховика (рис. 35).

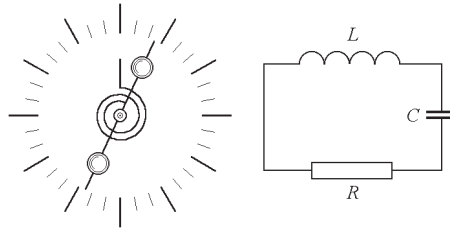


Рис. 35: Торсионный пружинный осциллятор и его электромагнитный аналог — последовательный  $RLC$ -контур.

Подобное устройство используется в механических карманных или наручных часах (балансовый механизм). Электромагнитный аналог механического пружинного линейного осциллятора — последовательный  $LCR$ -контур — показан в правой части рис. 35.

При повороте маховика из положения равновесия на угол  $\varphi$  прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) создает возвращающий момент  $N$ , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi. \quad (100)$$

Коэффициент пропорциональности  $D$  называется жесткостью пружины. Применяя к движению маховика с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (101)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = D/J$ . Общее решение уравнения (101) представляет собой простое *гармоническое колебание*:

$$\varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0). \quad (102)$$

Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  в выражении (102) зависят от *начальных условий*, т. е. от угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$  при  $t = 0$ . Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний. Колебания происходят с угловой частотой  $\omega_0$ , квадрат которой пропорционален жесткости пружины  $D$  и обратно пропорционален моменту инерции  $J$  маховика. Частота  $\omega_0$  и соответствующий ей период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий — они целиком определяются свойствами самого осциллятора, т. е. значениями параметров осциллятора  $D$  и  $J$ . Собственные колебания линейного осциллятора всегда происходят с одной и той же собственной частотой  $\omega_0$  независимо от способа возбуждения. Независимость частоты собственных колебаний от начальных условий, а следовательно от амплитуды (и энергии) колебаний называют *изохронностью* линейного осциллятора.

При наличии силы вязкого трения в дифференциальном уравнении будет присутствовать тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (103)$$

где *постоянная затухания*  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания  $\gamma$ , как и  $\omega_0$ , имеет размерность частоты.

Уравнения (101) и (103) – это *линейные* дифференциальные уравнения, потому что искомая функция  $\varphi(t)$ , как и ее производные по времени, входят в эти уравнения в первой степени. Эти уравнения *однородны*, так как искомая функция или ее производные присутствуют в одинаковой степени во всех членах уравнения. Однородность уравнений отражает отсутствие возбуждающей внешней силы. Таким образом, собственные колебания моделируемой системы описываются однородным линейным уравнением.

Как и любое однородное уравнение, уравнения (101) и (103) имеют тривиальное нулевое решение  $\varphi(t) = 0, \dot{\varphi}(t) = 0$ . Такое решение соответствует отсутствию начального возбуждения (нулевым начальным условиям) и описывает осциллятор, который постоянно находится в покое в положении равновесия. Собственные колебания осциллятора могут возникнуть только в результате некоторого начального возбуждения.

Если трение настолько слабо, что  $\gamma < \omega_0$ , общее решение уравнения (103) имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta_0). \quad (104)$$

Это решение описывает *затухающие колебания*, медленно меняющаяся амплитуда которых  $A_0 \exp(-\gamma t)$  экспоненциально убывает со временем. Начальное значение амплитуды  $A_0$  и начальная фаза  $\delta_0$  определяются из начальных условий. Частота  $\omega_1$  периодического (косинусоидального) сомножителя в (104) дается следующим выражением:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}. \quad (105)$$

В случае слабого трения, когда постоянная затухания  $\gamma$  мала по сравнению с величиной  $\omega_0$ , характеризующей собственную частоту в отсутствие трения, частота  $\omega_1$  косинусоидального сомножителя в (104) очень близка к  $\omega_0$ :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0). \quad (106)$$

Относительное отклонение частоты затухающих колебаний  $\omega_1$  от собственной частоты осциллятора  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  пропорционально квадрату малого параметра  $\gamma/\omega_0$ .

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для затухающих колебаний показаны на рис. 36 для случая возбуждения собственных колебаний начальным отклонением ротора из положения равновесия (в положительном направлении) при нулевой начальной скорости.

В условиях слабого и умеренного вязкого трения зависящий от времени множитель  $A_0 \exp(-\gamma t)$  в выражении (104) можно рассматривать как постепенно уменьшающуюся амплитуду затухающих колебаний. Спустя промежуток времени  $\tau =$



Рис. 36: Графики затухающих колебаний при  $Q = 18.1$ .

$1/\gamma$ , эта амплитуда приблизительно в  $e \approx 2.72$  раз меньше своего начального значения. Это время  $\tau$  называется *временем затухания* или *временем жизни* колебаний. Хотя формально колебания продолжаются бесконечно долго, характерное время  $\tau$  условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения.

При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , или  $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$  (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число  $N$  циклов собственных колебаний в течение времени жизни  $\tau$ :  $N = \tau/T_0 \gg 1$ . Последовательные максимальные отклонения из положения равновесия убывают в геометрической прогрессии. В самом деле, пусть  $\varphi_n$  есть максимальное отклонение ротора при  $n$ -м колебании. Тогда

$$\varphi_{n+1}/\varphi_n \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0. \quad (107)$$

Таким образом, отношение последовательных членов (знаменатель) этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии меньше единицы на величину  $\gamma T_0 = T_0/\tau \ll 1$ .

Для характеристики быстроты затухания колебаний используют, наряду с размерной постоянной затухания  $\gamma$ , также безразмерный *логарифмический декремент затухания*, определяемый как натуральный логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону:

$$d = \ln(\varphi_n/\varphi_{n+1}) = \gamma T = T/\tau. \quad (108)$$

Обратная логарифмическому декременту величина  $1/d = \tau/T$  — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания  $\tau$ .

Другая эквивалентная логарифмическому декременту безразмерная величина, используемая для характеристики быстроты затухания колебаний, это *добротность*  $Q$ , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau}{T_0}. \quad (109)$$

Число циклов, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза, равно деленному на  $\pi \approx 3.14$  значению его добротности. Число колебаний  $N_{1/2}$ , на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность следующим соотношением:

$$N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22 Q = Q/4.53. \quad (110)$$

## 14.2 Неколебательное движение системы

Когда параметры системы удовлетворяют условию  $\gamma \geq \omega_0$  (условие сильного затухания), осциллятор после начального возбуждения возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом движении ротор либо асимптотически приближается к положению равновесия с одной стороны, либо только один раз пересекает среднее положение и затем приближается к нему с другой стороны. Последний случай возможен, если при возбуждении ротор получает достаточно большую начальную скорость в направлении положения равновесия.

Если  $\gamma = \omega_0$ , затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения (103) принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t), \quad (111)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если ротор, первоначально находившийся в положении равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), в результате толчка получает начальную скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ , то  $C_1 = \Omega_0$ ,  $C_2 = 0$ , и дальнейшее движение ротора описывается функцией

$$\varphi(t) = \Omega_0 t \exp(-\gamma t). \quad (112)$$

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для осциллятора с критическим затуханием, движение которого возбуждается начальным толчком из положения равновесия, показаны на рис. 37.

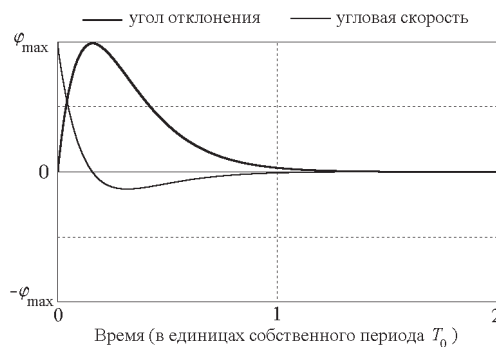


Рис. 37: Графики угла отклонения и угловой скорости при критическом затухании.

Замечательная особенность системы с критическим затуханием заключается в том, что после начального возбуждения она возвращается в состояние покоя в

положении равновесия быстрее, чем при любом другом значении постоянной затухания  $\gamma$  (при данном значении  $\omega_0$ ). Как видно из уравнения (109), критическому затуханию, т. е. случаю ( $\gamma = \omega_0$ ), соответствует добротность  $Q = 0.5$ .

Неколебательное движение при очень сильном трении (при сверхкритическом затухании), когда  $\gamma > \omega_0$ , можно представить в виде суперпозиции двух убывающих экспоненциальных функций, характеризуемых различными постоянными времени  $\tau_1 = -1/\alpha_1$  и  $\tau_2 = -1/\alpha_2$  в показателях экспонент:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \text{где } \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (113)$$

Значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из находятся из начальных условий, т. е. определяются способом возбуждения системы. В измерительных приборах (таких как гальванометры) затухание вводится преднамеренно для того чтобы преодолеть трудности считывания показаний при осциллирующей стрелке. Демпфирование называют *критическим*, если подвижная система прибора приходит в равновесие и успокаивается за кратчайшее время, не совершая колебаний. При недостаточном демпфировании прибора ( $Q > 0.5$ ) перед остановкой стрелка совершает колебания. В случае передемпфированного прибора ( $Q < 0.5$  — сверхкритическое затухание) стрелка не совершает колебаний, но тем не менее для ее прихода в положение равновесия требуется большее время по сравнению со случаем критического демпфирования.

Другой пример преднамеренного введения затухания, близкого к критическому — применение гидравлических амортизаторов в упругой подвеске кузова автомобиля. При неисправных амортизаторах после каждого бугорка или ямки на дороге кузов автомобиля совершает колебания, неприятные для пассажиров и опасные с точки зрения надежности сцепления колес с дорогой.

## Фазовая диаграмма линейного осциллятора

Механическое состояние торсионного осциллятора определяется двумя динамическими переменными: *обобщенной координатой* (в данном случае углом отклонения)  $\varphi$  и *обобщенной скоростью* (угловой скоростью)  $\dot{\varphi}$ , или, что эквивалентно, углом отклонения  $\varphi$  и угловым моментом (моментом импульса)  $J\dot{\varphi}$ .

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью свободы, положение которой определяется единственной координатой (в случае торсионного осциллятора это угол отклонения), фазовое пространство динамических переменных двумерно, т. е. представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения)  $\varphi$ , а по оси ординат — угловая скорость  $\dot{\varphi}$ . Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, т. е. линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Фазовая диаграмма для торсионного осциллятора — это график зависимости угловой скорости  $\dot{\varphi}$  (или момента импульса  $J\dot{\varphi}$ ) от угла отклонения  $\varphi$ .

Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает *замкнутую кривую*, двигаясь по ней в направле-

нии по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого цикла колебаний.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*. Через каждую точку фазовой плоскости проходит, вообще говоря, только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно в соответствии с единственностью решения задачи Коши для дифференциального уравнения системы. Это движение и будет происходить вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости. Другими словами, фазовые траектории системы не пересекаются. Исключение составляют лишь отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются *особыми*. Примеры особых точек будут рассмотрены ниже. Фазовый портрет (вместе с совокупностью особых точек) дает очень наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой динамической системы.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия.

Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*.

Как уже отмечалось, период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы, а именно значениями жесткости пружины  $D$  и моментом инерции ротора  $J$ . В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, т. е. от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется *изохронностью*. Благодаря свойству изохронности изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осциллятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени  $T_0$ .

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ) максимальные отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний благодаря трению трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающиеся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа *фокус*. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой *аттрактор* (от англ. *attract* — притягивать): все фазовые траектории, независимо от то-

го, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (левая часть рис. 38).

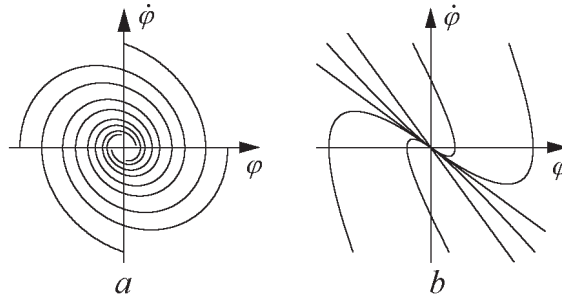


Рис. 38: Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (*a*) и системы со сверхкритическим затуханием  $\gamma > \omega_0$  (*b*).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ( $\gamma > \omega_0$ ) аттрактор фазовых траекторий из фокуса превращается в особую точку типа *узел*: все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу напрямую без наматывания, не совершив и одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан в правой части рис. 38. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная  $\dot{\varphi} = \alpha_1\varphi$  с наклоном  $\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  (за исключением одной прямолинейной фазовой траектории  $\dot{\varphi} = \alpha_2\varphi$ ). При специфических начальных условиях вида  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_1\varphi(0)$  изображающая точка движется к узлу непосредственно вдоль этой прямолинейной фазовой траектории (общей касательной всех траекторий). Другая прямолинейная фазовая траектория  $\dot{\varphi} = \alpha_2\varphi$  соответствует движению при начальных условиях типа  $\dot{\varphi}(0) = \alpha_2\varphi(0)$ .

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка: начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  равны нулю. Как уже отмечалось, этой точке соответствует состояние покоя в положении равновесия. При  $\gamma = 0$  это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При  $\gamma < \omega_0$  это фокус, а при  $\gamma > \omega_0$  это узел фазовых траекторий.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории. В дальнейшем, при изучении движения жесткого маятника в поле тяжести, мы встретимся с еще одним типом особых точек, возможных в нелинейных консервативных системах, а именно, с особой точкой типа *седло*, через которую проходят две фазовые траектории.

### 14.3 Превращения энергии при колебаниях

Полная энергия  $E$  торсионного пружинного маятника представляет собой сумму потенциальной энергии  $E_{\text{pot}}$  упруго деформированной пружины и кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (114)$$



Собственные колебания в отсутствие трения характеризуются обратимыми полными превращениями энергии одного из этих видов в другой и обратно. В точках максимального отклонения от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой потенциальную энергию деформированной пружины. Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию вращающегося маховика. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, два вида энергии совершают колебания в противофазе друг с другом на частоте  $2\omega_0$ , т. е. на удвоенной собственной частоте  $\omega_0$  колебаний самого осциллятора.

Описанный выше полный обмен между двумя видами энергии характерен для консервативной системы, в которой энергетические превращения обратимы. Сумма кинетической и потенциальной энергий, т. е. полная энергия  $E$  осциллятора, имеет одно и то же значение в любой момент времени, совпадающее с максимальными значениями каждого из этих видов энергии:

$$E = \frac{1}{2}DA_0^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2A_0^2. \quad (115)$$

Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний. Средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора, совершающего собственные колебания, равны друг другу и составляют половину неизменного значения полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}DA_0^2 = \frac{1}{4}J\omega_0^2A_0^2. \quad (116)$$

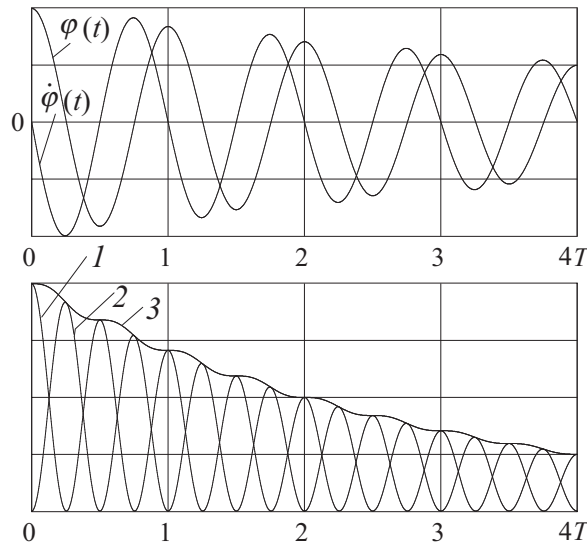


Рис. 39: Превращения энергии при затухающих колебаниях (добротность  $Q = 18.1$ ).

При наличии трения в системе взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий становятся частично необратимыми из-за рассеяния (диссипации) механической энергии. Графики энергетических превращений при затухающих колебаниях показаны на рис. 39. Здесь верхний график — зависимость угла отклонения  $\varphi(t)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  от времени, на нижнем графике кривая 1 — потенциальная энергия  $E_{\text{pot}}$ , кривая 2 — кинетическая энергия  $E_{\text{kin}}$ , кривая 3 — полная энергия  $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ . Отметим, что диссипация энергии происходит неравномерно на протяжении цикла колебаний. Скорость диссипации  $-dE/dt$  максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени, когда максимальна величина угловой скорости маховика. В самом деле, скорость рассеяния энергии из-за вязкого трения  $-dE/dt = -N_{\text{fr}}\dot{\varphi}$ , где  $N_{\text{fr}} \sim \dot{\varphi}$ , пропорциональна квадрату угловой скорости и тем самым мгновенному значению кинетической энергии  $J\dot{\varphi}^2/2$  маховика. Вблизи точек поворота, когда маховик изменяет направление вращения и его угловая скорость обращается в нуль, диссипации энергии не происходит. Утверждение об экспоненциальном характере убывания энергии затухающего осциллятора, которое часто встречается в учебниках, на самом деле справедливо не для мгновенного, а только для усредненного по периоду колебаний значения полной энергии осциллятора:

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp(-2\gamma t) = E_0 \exp(-2t/\tau). \quad (117)$$

Из (117) видно, что время затухания средней энергии осциллятора (время, в течение которого среднее за период значение полной энергии убывает в  $e \approx 2.72$  раза) равно  $\tau/2$ , т. е. вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний.

## 14.4 Осциллятор с сухим трением

Экспоненциальный характер затухания колебаний под действием вязкого трения обусловлен тем, что сила трения пропорциональна скорости. Любая другая зависимость силы трения от скорости порождает затухание колебаний с иной зависимостью амплитуды от времени.

Случай сухого (или кулоновского) трения интересен с точки зрения практических приложений. При сухом трении, пока система находится в движении, величина силы трения почти постоянна, а ее направление противоположно скорости. В соответствии с упрощенной идеализированной характеристикой сухого трения (так называемой z-характеристикой) сила трения постоянна по модулю, но ее направление изменяется всякий раз при изменении направления скорости. Когда система покоится, момент силы статического трения может принимать любое значение от  $-N_{\text{max}}$  до  $N_{\text{max}}$ . Действительная величина момента силы трения покоя зависит от других приложенных сил, которые должны быть уравновешены трением для того, чтобы сохранялось состояние покоя. Величина момента силы трения скольжения принимается в этой модели равной максимально возможной величине момента силы трения покоя  $N_{\text{max}}$ .

В реальных системах сухое трение характеризуется более сложной зависимостью силы трения от скорости. Предельная величина силы трения покоя обычно несколько больше силы трения скольжения. Когда скорость движения начинает возрастать от нулевого значения, сила трения скольжения сначала несколь-

ко уменьшается, достигает минимума при некоторой скорости, а затем постепенно увеличивается по мере дальнейшего роста скорости. В идеализированной  $z$ -характеристике сухого трения эти особенности игнорируются. Тем не менее, принятая идеализация позволяет объяснить многие существенные особенности вызванного сухим трением процесса затухания колебаний в реальных физических системах.

Из-за того, что момент силы трения покоя может принимать любые значения вплоть до  $N_{\max}$ , по обе стороны от положения равновесия (в котором спиральная пружина не деформирована) имеется интервал углов отклонения, в пределах которого трение покоя в состоянии уравновесить силу натяжения деформированной пружины. Этот интервал называют *зоной застоя* или *мертвой зоной*. В любой точке мертвой зоны ротор осциллятора может находиться в покое в состоянии безразличного равновесия, в противоположность случаю вязкого трения, когда имеется только одно положение равновесия, в котором пружина не деформирована. Если угловая скорость ротора обращается в нуль где-либо в пределах зоны застоя, ротор останавливается и в дальнейшем покоится в этой точке.

Зона застоя простирается на одинаковые расстояния в обе стороны от точки, в которой пружина не деформирована. Чем сильнее трение покоя в рассматриваемой системе, тем шире мертвая зона. Ее границы определяются максимальным значением момента силы трения покоя  $N_{\max}$ .

Важная отличительная черта затухания колебаний под действием силы сухого трения заключается в том, что движение полностью прекращается после *конечного числа циклов*. Пока осциллятор совершает колебания, знак скорости периодически изменяется, и каждое очередное изменение направления скорости происходит при все меньшем отклонении от средней точки зоны застоя. В конце концов точка поворота оказывается внутри зоны застоя, где трение покоя в состоянии уравновесить возвращающую силу пружины. В этот момент движение полностью прекращается. В какой именно точке произойдет остановка, зависит от начальных условий, которые могут меняться от случая к случаю.

Эти особенности присущи различным механическим системам с сухим трением. В частности, сухое трение может присутствовать в стрелочных измерительных приборах, таких как гальванометры с подвижной катушкой. В типичном гальванометре легкая проволочная катушка помещена в магнитное поле между полюсами постоянного магнита и может поворачиваться вокруг оси, закрепленной в подшипниках. При прохождении измеряемого тока катушка поворачивается и закручивает спиральную пружину. Если со стороны подшипников на катушку действует момент сил сухого трения, стрелка прибора может остановиться в любой точке зоны застоя, окружающей с двух сторон деление шкалы, соответствующее измеряемой величине. Этим объясняется возникновение случайных ошибок, неизбежно сопутствующих измерениям, выполняемым при помощи стрелочных приборов. Чем сильнее сухое трение, тем больше погрешности измерений.

На вращающийся ротор торсионного пружинного осциллятора действуют одновременно возвращающий момент  $-D\varphi$  упругой силы закрученной пружины и момент  $N_{\text{тр}}$  силы трения скольжения. Дифференциальное уравнение вращения ротора с моментом инерции  $J$  имеет следующий вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + N_{\text{тр}}. \quad (118)$$

В соответствии с принятой идеализированной  $z$ -характеристикой сухого трения, момент силы трения скольжения  $N_{\text{fr}}$  направлен противоположно угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , и остается постоянным до тех пор пока продолжается вращение ротора в одном направлении. Однако момент сил трения может принимать любое значение из интервала от  $-N_{\text{max}}$  до  $N_{\text{max}}$ , если скорость ротора равна нулю:

$$N_{\text{fr}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} > 0, \\ N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \quad (119)$$

или  $N_{\text{fr}} = -N_{\text{max}} \text{sign}(\dot{\varphi})$ . Здесь  $N_{\text{max}}$  — предельное (максимальное) значение момента сил сухого трения. Удобно выразить  $N_{\text{max}}$  через максимальный угол отклонения маховика  $\varphi_m$ , при котором он еще может находиться в состоянии покоя:

$$N_{\text{max}} = D\varphi_m. \quad (120)$$

Очевидно, что угол  $\varphi_m$  соответствует границе зоны застоя.

Дифференциальное уравнение (118), описывающее осциллятор с сухим трением, вообще говоря *нелинейно*, потому что момент силы сухого трения  $N_{\text{fr}}(\dot{\varphi})$  изменяется (скачкообразно) в те моменты, когда изменяется знак угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , т. е. когда изменяется направление его вращения. Поэтому мы должны рассматривать по сути дела два линейных уравнения вместо одного:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi + \varphi_m) \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0, \quad (121)$$

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_m) \quad \text{при } \dot{\varphi} < 0. \quad (122)$$

Нелинейный характер задачи проявляется здесь в том, что мы должны переходить от одного из линейных уравнений (121)–(122) к другому всякий раз, когда изменяется направление вращения ротора.

Решение уравнений (121)–(122), соответствующее данным начальным условиям, можно найти методом поэтапного интегрирования каждого из линейных уравнений на интервале времени, соответствующем полуциклу колебаний, пока направление вращения ротора остается неизменным. Затем эти решения соединяются вместе («сшиваются») в моменты перехода от одного уравнения к другому таким образом, что угол отклонения и угловая скорость в конце очередного полуцикла выполняют роль начальных условий для следующего полуцикла колебаний ротора. Такая последовательность решений продолжается до тех пор, пока угол отклонения в конце очередного полуцикла не оказывается в пределах мертвой зоны.

Чтобы выявить основные особенности затухания колебаний, вызванного сухим трением, будем предполагать, что вязкое трение полностью отсутствует ( $\gamma = 0$ ).

Пусть в начальный момент  $t = 0$  ротор повернут вправо (по часовой стрелке) от положения равновесия, так что  $\varphi(0) > 0$ . Если это начальное отклонение выходит за границу зоны застоя, т. е.  $\varphi(0) > \varphi_m$ , ротор, будучи освобожденным без толчка, т. е. с нулевой начальной скоростью, начнет двигаться влево ( $\dot{\varphi} < 0$ ), и его движение будет описываться уравнением (122). Решение уравнения (122) представляет собой простое гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ . Среднее положение, около которого происходят эти колебания, совпадает с правой границей зоны застоя  $\varphi_m$ . Это смещение среднего положения колебаний ротора вызвано постоянным моментом силы сухого трения, который действует на ротор вправо (по часовой стрелке),

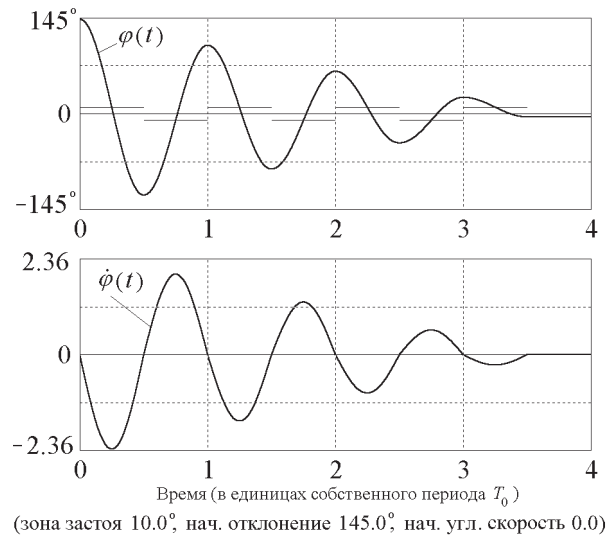


Рис. 40: Графики колебаний, затухающих под действием сухого трения.

пока он движется влево. При данных начальных условиях ( $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ) амплитуда колебания около средней точки  $\varphi_m$  равна  $\varphi_0 - \varphi_m$ . Первый отрезок графика таких колебаний на рис. 40 представляет собой часть синусоиды со средней точкой, смещенной вверх от оси абсцисс на расстояние  $\varphi_m$ . Крайнее отклонение ротора влево в конце первого полупериода колебаний равно  $\varphi(0) - 2\varphi_m$ .

Когда ротор достигает этого положения, его угловая скорость обращается в нуль. Затем он начинает двигаться вправо. Поскольку при этом его угловая скорость  $\dot{\varphi}$  положительна, мы должны перейти к уравнению (121). Значения  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  в конце предыдущего полупериода служат начальными условиями для дальнейшего движения. Это движение опять представляет собой половину цикла гармонического колебания той же самой частоты  $\omega_0$ , но средняя точка колебаний теперь смещена к левой границе зоны застоя  $-\varphi_m$ . Амплитуда соответствующего сегмента синусоиды равна  $\varphi_0 - 3\varphi_m$ .

Продолжая дальше такой анализ движения, мы заключаем, что в последующие полупериоды ротор совершает гармонические колебания около средних точек, поочередно смещенных к границам мертвой зоны  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$ . Каждому полупериоду соответствует одна и та же частота  $\omega_0$  (частота собственных колебаний в отсутствие трения). Поэтому длительность каждого цикла затухающих колебаний равна периоду  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения.

Сшивание синусоидальных сегментов, средние точки которых поочередно смещены к правой и левой границам мертвой зоны, дает всю кривую процесса затухания колебаний под действием сухого трения, показанную на рис. 40. После каждого полного цикла таких колебаний максимальное отклонение ротора уменьшается на одну и ту же величину, равную удвоенной ширине зон застоя (т. е. на величину  $4\varphi_m$ ). Колебания продолжаются до тех пор, пока конечная точка очередного сегмента синусоиды не окажется внутри зоны застоя ( $-\varphi_m, \varphi_m$ ).

Таким образом, в случае затухания под действием сухого трения максимальные отклонения ротора убывают по линейному закону. Последовательность макси-

мальных отклонений образует убывающую арифметическую прогрессию и колебания полностью прекращаются через конечное число циклов, в противоположность случаю вязкого трения, когда максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии (экспоненциально) и формально движение продолжается бесконечно долго.

Общие закономерности затухания колебаний под действием сухого трения отчетливо отражает фазовая траектория. При вязком трении фазовая траектория асимптотически приближается к фокусу, расположенному в начале координат, и состоит из бесконечного числа постепенно сближающихся, все более тесных витков уменьшающегося размера. В случае сухого трения фазовая кривая образована конечным числом эквидистантных витков: она заканчивается (обрывается), как только достигает оси абсцисс в пределах отрезка  $(-\varphi_m, \varphi_m)$ , соответствующего мертвой зоне.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен действию сравнительно небольшого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ), полуэллипсы фазовой траектории превращаются в отрезки слабо скручивающихся спиралей, соответствующих собственным затухающим колебаниям осциллятора с положением равновесия, поочередно смещенным к правой и левой границам зоны застоя. Витки фазовой траектории перестают быть эквидистантными. Но тем не менее скручивание фазовой траектории не продолжается до бесконечности: в этом случае она также обрывается после конечного числа оборотов вокруг начала координат, как только встречается с отрезком  $(-\varphi_m, \varphi_m)$  оси абсцисс, соответствующим мертвой зоне.

В противоположность случаю вязкого трения, после полного прекращения колебаний при сухом трении некоторая (небольшая) часть первоначальной энергии осциллятора может остаться в виде механической энергии. Так будет если окончательная остановка ротора произойдет не в средней точке зоны застоя. В таком случае пружина останется слегка деформированной, и потенциальная энергия упругой деформации не обратится в нуль. Остаточная механическая энергия осциллятора не может превышать значения  $D\varphi_m^2/2 = N_{\max}\varphi_m/2$ .

## Рекомендуемая литература

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 219–238).
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. 1 Механика. М., «Наука», 1974 (стр. 204–209).
3. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 432–437).
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (Пространство. Время. Движение). М., «Мир», 1966 (стр. 97–105).
5. Бутиков Е.И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. СПб, 2005. (стр. 9–20).

# 15 Вынужденные колебания осциллятора при синусоидальном внешнем воздействии

## Содержание темы

Вынужденные колебания осциллятора при синусоидальном воздействии. Силовое и кинематическое возбуждение колебаний. Резонанс смещения и скорости. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики. Средние значения кинетической и потенциальной энергии. Поглощаемая и рассеиваемая мощность. Лоренцевский контур. Устойчивость режима установившихся вынужденных колебаний. Переходные процессы. Установление вынужденных колебаний.

### 15.1 Введение

В соответствии с принятой классификацией колебаний по способу их возбуждения, колебания называют *вынужденными*, когда осциллятор подвергается внешнему периодическому воздействию, которое приводит к появлению в дифференциальном уравнении системы дополнительного члена в виде заданной периодической функции времени. Поведение колебательной системы под действием периодических внешних сил представляет собой один из наиболее важных вопросов в теории колебаний. Самая замечательная особенность вынужденных колебаний заключается в явлении *резонанса*, когда сравнительно слабое периодическое внешнее воздействие может вызвать чрезвычайно сильную реакцию осциллятора. Резонанс очень часто встречается в физике и находит множество различных интересных применений.

Резонанс определяется не значением внешней силы в какой-то момент, а всем видом функциональной зависимости внешнего воздействия от времени на большом интервале. В случае собственных колебаний в замкнутой системе внешнее воздействие, необходимое для выведения системы из равновесия и возбуждения колебаний, вообще не оставляет никаких следов в дифференциальном уравнении колебаний. Это воздействие лишь обеспечивает определенные начальные условия и заканчивается к некоторому моменту времени, рассматриваемому как начальный момент для дальнейших собственных колебаний. Этим начальным состоянием определяется амплитуда и фаза последующих собственных затухающих колебаний, а их частота (и быстрота затухания) определяются исключительно свойствами самого осциллятора, т. е. совершенно не зависят от характеристик возбуждающего внешнего воздействия. Напротив, вынужденные колебания, происходящие при постоянном действии периодической внешней силы, зависят не только и не столько от начальных условий, сколько от характеристик внешнего воздействия, а именно от амплитуды и (главным образом) от частоты внешней силы. Начальные условия сказываются только на протяжении переходного процесса, который можно рассматривать как наложение затухающих собственных колебаний осциллятора на установившиеся колебания. После полного затухания вклада собственных колебаний «выживают» только установившиеся колебания неизменной амплитуды.

## 15.2 Модель физической системы

Для изучения закономерностей вынужденных колебаний будем использовать такой же механический осциллятор, что и при изучении собственных колебаний — уравновешенный инертный маховик (стержень с грузами) на упругой спиральной пружине, обеспечивающей ему устойчивое положение равновесия. Такое устройство напоминает балансовый механизм механических наручных часов. Но теперь второй конец пружины не закреплен неподвижно, а соединен с шатуном, который можно поворачивать в одну и в другую сторону вокруг общей с маховиком оси (рис. 41).

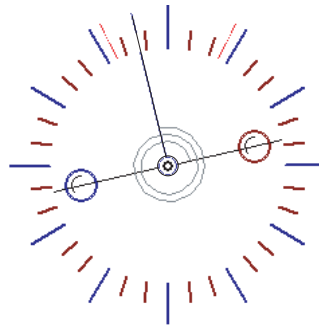


Рис. 41: Торсионный пружинный осциллятор, возбуждаемый заданным периодическим движением шатуна, к которому прикреплена спиральная пружина.

При повороте шатуна создаваемое пружиной положение равновесия ротора (маховика) смещается вместе с шатуном на такой же угол. Около нового положения равновесия ротор может совершать затухающие колебания на собственной частоте. При слабом и умеренном трении частота этих колебаний близка к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний маховика в отсутствие трения. Эта частота определяется жесткостью  $D$  пружины и моментом инерции  $J$  маховика:  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ .

Если шатуну принудительно сообщить периодическое колебательное движение, то на осциллятор будет действовать периодическая внешняя сила. Такое воздействие дает пример *кинематического возбуждения* колебаний, для которого характерно заданное движение какой-либо части колебательной системы. Кинематический способ возбуждения колебаний выбран здесь из-за своей наглядности: движение возбуждающего шатуна непосредственно наблюдается на экране. Компьютерное моделирование позволяет отчетливо видеть, скажем, сдвиг фаз между возбуждающим шатуном и ротором, соотношение их амплитуд, и многое другое.

В отличие от кинематического возбуждения, при *динамическом*, т. е. прямом силовом возбуждении, задается действующая на осциллятор внешняя сила, явно зависящая от времени и не зависящая от положения и скорости осциллятора. Прямой силовой способ возбуждения менее нагляден, но в большинстве учебников рассматривается именно силовое возбуждение вынужденных колебаний. Дифференциальные уравнения для силового и кинематического способов возбуждения колебаний одинаковы, но некоторые физические различия проявляются в характере энергетических превращений.



### 15.3 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Пусть возбуждающий шатун принудительно совершает гармонические колебания около среднего положения (вертикального на рис. 41) с некоторой амплитудой  $\phi_0$  и угловой частотой  $\omega$ , так что угол его отклонения  $\phi(t)$  синусоидально зависит от времени:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (123)$$

Если в некоторый момент времени  $t$  маховик осциллятора отклонен от среднего положения (принятого за начало отсчета углов на шкале на рис. 41) на угол  $\phi$ , а стержень в этот момент смещен на угол  $\phi$ , то со стороны пружины на маховик действует момент сил  $-D(\varphi - \phi) = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t$ . В самом деле, пружина в этот момент времени деформирована (закручена от равновесного состояния) на угол  $\varphi - \phi$ , а не на угол  $\varphi$ , как в случае свободных колебаний. Поэтому уравнение основного закона динамики для вращательного движения маховика с моментом инерции  $J$  в отсутствие трения имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t. \quad (124)$$

Это уравнение можно рассматривать и как дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием приложенного к нему заданного внешнего момента  $D\phi_0 \sin \omega t$ , изменяющегося синусоидально с частотой  $\omega$  и неизменной амплитудой  $D\phi_0$ . Таким образом, кинематический и силовой способы возбуждения действительно описываются одним и тем же дифференциальным уравнением.

Разделив обе части уравнения (4.1a) на момент инерции маховика  $J$  и вводя обозначение  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  для частоты собственных колебаний ( $\omega_0^2 = D/J$ ), переписываем уравнение в канонической форме:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (125)$$

При наличии вязкого трения, пропорционального скорости, мы должны добавить в уравнение движения тормозящий момент силы трения, пропорциональный  $\dot{\varphi}$ . Тогда вместо уравнения (4.2) будем иметь:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (126)$$

Постоянная затухания  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения. Как и в случае собственных колебаний, вместо нее можно использовать эквивалентную безразмерную величину — добротность  $Q$ , определяемую соотношением  $Q = \omega_0/2\gamma$ . Таким образом, вынужденные колебания осциллятора описываются *неоднородным* линейным дифференциальным уравнением второго порядка, в отличие от собственных колебаний, для которых дифференциальное уравнение однородно, т. е. не содержит происходящей от внешней силы правой части в виде заданной функции времени. Положение рассматриваемой системы в любой момент времени определяется двумя угловыми координатами — углами  $\varphi$  и  $\phi$ . Но координата  $\phi$  — положение возбуждающего стержня — задана внешними условиями, она не свободна, так что в сущности второй степенью свободы система не обладает. «Свободной» координатой, т. е. неизвестной функцией времени, является только угол  $\varphi$  отклонения

ротора от среднего положения. Для нахождения этой функции достаточно одного дифференциального уравнения (126). Дифференциальное уравнение, соответствующее второй координате  $\phi$ , можно использовать для нахождения момента внешней силы, необходимой для обеспечения заданного движения шатуна. Источник такой силы всегда испытывает реакцию (обратное воздействие) со стороны шатуна.

## 15.4 Установившиеся вынужденные колебания

В течение некоторого времени после включения синусоидальной внешней силы (на протяжении переходного процесса) осциллятор успевает «забыть» свое начальное состояние, его колебания приобретают стационарный характер, и осциллятор в конце концов совершает незатухающие синусоидальные колебания на частоте внешнего воздействия — *установившиеся* вынужденные колебания. Эти установившиеся колебания описываются *периодическим* частным решением неоднородного дифференциального уравнения (126):

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (127)$$

Установившиеся колебания характеризуются определенными постоянными значениями амплитуды  $a$  и сдвига фаз  $\delta$  между колебаниями ротора осциллятора и возбуждающего шатуна. Величины  $a$  и  $\delta$  зависят от близости частоты внешнего воздействия  $\omega$  к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ . Зависимости  $a(\omega)$  и  $\delta(\omega)$  от частоты внешнего воздействия называют соответственно *амплитудно-частотной* и *фазочастотной характеристиками* осциллятора. При сравнительно слабом трении (при  $\gamma \ll \omega_0$ , т. е.  $Q \gg 1$ ) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты имеет ярко выраженный *резонансный характер* — амплитуда резко возрастает при приближении  $\omega$  к собственной частоте  $\omega_0$ . График зависимости амплитуды установившихся колебаний от частоты  $\omega$  называют резонансной кривой. Чем выше добротность  $Q$  осциллятора, тем острее пик резонансной кривой, т. е. тем сильнее выражены резонансные свойства осциллятора.

Когда частота вынуждающей силы  $\omega$  заметно отличается от собственной частоты  $\omega_0$ , можно пренебречь влиянием трения на амплитуду  $a$  и фазовый сдвиг  $\delta$  установившихся вынужденных колебаний. Другими словами, в таких условиях для описания поведения реальной системы с небольшим трением можно воспользоваться идеализированной моделью системы, в которой трение полностью отсутствует. (Отметим, что применимость физической модели к реальной системе зависит не только и не столько от свойств системы, сколько от характера решаемой задачи.) Таким образом, для описания установившихся колебаний в случае, когда  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ , можно воспользоваться уравнением (125), которое строго применимо к линейному осциллятору без трения. Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания, можно попытаться искать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin \omega t. \quad (128)$$

Подставляя это выражение в уравнение (125), находим, что (128) дает решение уравнения (125) если амплитуда  $a(\omega)$  как функция частоты  $\omega$  имеет вид:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (129)$$

Если частота  $\omega$  равна нулю, выражение (129) дает  $a = \phi_0$ : маховик покоится в смещенном положении равновесия. Когда  $\omega \ll \omega_0$ , из (129) получаем  $a \approx \phi_0$ : при очень медленном движении шатуна маховик квазистатически следует за ним, оставаясь все время в положении равновесия, которое смещается поочередно вправо и влево вместе с шатуном. Таким образом, при очень низкой частоте кинематически возбуждаемые вынужденные колебания осциллятора совершаются с той же амплитудой и в той же фазе, что и колебания шатуна.

Выражение (129) показывает, что по мере роста частоты возбуждения  $\omega$  растет амплитуда вынужденных колебаний осциллятора, и эти колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями шатуна. Двигаясь в одном направлении, они оба одновременно пересекают среднюю точку и одновременно достигают своих крайних положений. Однако крайнее отклонение маховика  $a$  больше, чем крайнее отклонение  $\phi_0$  шатуна. При  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда колебаний маховика  $a$  стремится к бесконечности. Это значит, что вблизи резонанса (при  $\omega \approx \omega_0$ ) трением пренебрегать нельзя (см. ниже).

При  $\omega > \omega_0$  значение  $a$ , как видно из (129), становится отрицательным. Это означает, что при  $\omega > \omega_0$  установившиеся вынужденные колебания происходят в противофазе с внешней силой: когда шатун движется в одну сторону, маховик поворачивается в противоположную сторону, и оба одновременно достигают своих крайних положений. Для этого случая решение также можно записать в форме (127), сохраняя положительные значения  $a$  для всех частот: просто под  $a$  в (127) нужно понимать модуль правой части выражения (129), а сдвиг фаз  $\delta$  положить равным нулю при  $\omega < \omega_0$  и  $-\pi$  при  $\omega > \omega_0$ .

Вблизи резонанса (в области частот  $\omega$ , удовлетворяющих условию  $|\omega - \omega_0| \leq \gamma$ ) необходимо учитывать трение в дифференциальном уравнении вынужденных колебаний, т. е. нужно решать уравнение (126). Установившиеся вынужденные колебания описываются его периодическим частным решением. Это решение можно искать в виде (127). Амплитуду  $a$  и фазу  $\delta$  можно найти, подставляя  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  в (126) и приравнявая коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  в левой и правой частях уравнения. Менее громоздкий способ определения  $a$  и  $\delta$  основан на использовании векторных диаграмм. Приведем здесь без вывода окончательные результаты:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (130)$$

Графики зависимости амплитуды от частоты  $a(\omega)$ , называемые также резонансными кривыми или амплитудно-частотными характеристиками осциллятора, показаны в левой верхней части рис. 42 для нескольких значений добротности. (По оси абсцисс отложена вынуждающая частота  $\omega$  в единицах собственной частоты  $\omega_0$ , т. е. отношение  $\omega/\omega_0$ , а по оси ординат — отношение амплитуды маховика к амплитуде вынуждающего шатуна  $a(\omega)/\phi_0$ ). Амплитуда установившихся колебаний достигает максимального значения на резонансной частоте  $\omega_{\text{res}}$ :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (131)$$

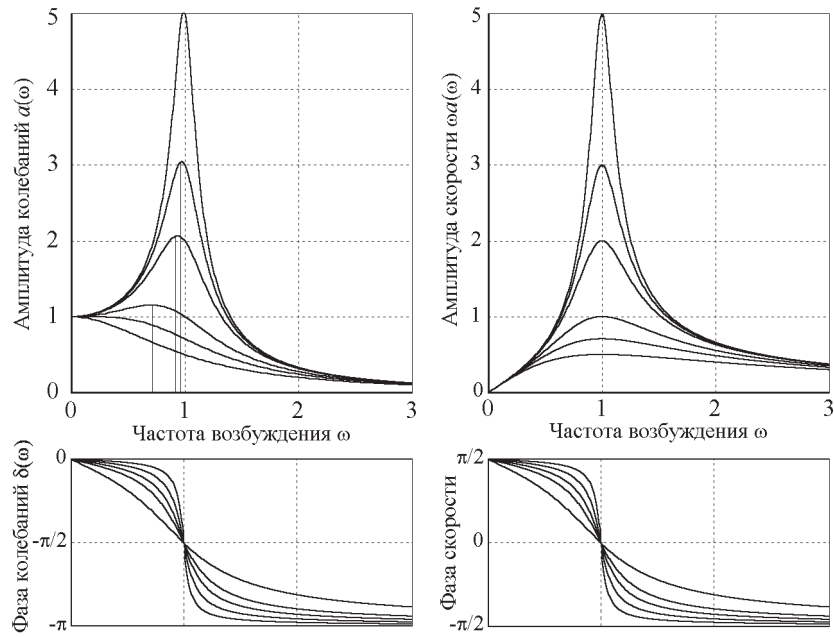


Рис. 42: Резонансные кривые линейного осциллятора.

Это выражение для  $\omega_{\text{res}}$  справедливо, если трение не слишком велико, а именно, если  $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ . При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$  или  $Q \gg 1$ , из (131) находим приближенное выражение:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right). \quad (132)$$

Из (132) видно, что при малом трении резонансная частота практически совпадает с собственной частотой осциллятора в отсутствие трения  $\omega_0$ : значение  $\omega_{\text{res}}$  отличается от  $\omega_0$  всего лишь на величину второго порядка по малому параметру  $\gamma/\omega_0$ . Например, при  $Q = 10$  (умеренное трение) резонансная частота отличается от частоты собственных колебаний только на 0.25%.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний на резонансе определяется следующим выражением:

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0 \phi_0}{2\gamma} = Q \phi_0. \quad (133)$$

Из (133) видно, что резонансная амплитуда  $a_{\text{max}}$  установившихся колебаний приблизительно в  $Q$  раз больше амплитуды  $\phi_0$  вынуждающего шатуна (при условии что добротность  $Q$  не слишком мала). Иначе об этом можно сказать так: амплитуда  $a_{\text{max}}$  установившихся колебаний маховика при резонансе в  $Q$  раз больше его амплитуды при очень низкой вынуждающей частоте  $\omega$  (при медленных колебаниях шатуна). Мы видим, что резонансный отклик осциллятора при вынужденных колебаниях характеризуется той же самой величиной — добротностью  $Q$ , — что и затухание собственных колебаний.

В отсутствие трения амплитуда  $a(\omega)$  установившихся вынужденных колебаний

осциллятора превышает амплитуду возбуждающего шатуна  $\phi_0$  при всех частотах в интервале между  $\omega = 0$  и  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ . Когда частота  $\omega = 0$  вынуждающей силы превышает собственную частоту  $\omega_0 = 0$  более чем в  $\sqrt{2}$  раз, амплитуда осциллятора становится меньше амплитуды шатуна  $\phi_0$  и стремится к нулю при дальнейшем увеличении частоты — инертный маховик не успевает следовать за быстрыми движениями шатуна. В этой области частот динамический эффект вынуждающей силы слабее, чем действие такой же, но статической силы. Все это справедливо и при наличии слабого трения, только граничная частота будет немного меньше чем  $\sqrt{2}\omega_0$ , о чем можно судить по графикам  $a(\omega)$  на рис. 42.

Фазочастотные характеристики осциллятора, т. е. графики зависимости фазы вынужденных колебаний от частоты (точнее, графики сдвига фаз  $\delta(\omega)$  между вынужденными колебаниями ротора и возбуждающего шатуна), полученные из (130) для разных значений добротности  $Q$ , показаны в левой нижней части рис. 42. Из этих графиков видно, что установившиеся колебания всегда отстают по фазе от возбуждающей силы, поскольку сдвиг фаз  $\delta(\omega)$  отрицателен при всех частотах.

Вдали от резонанса при низкой частоте  $\omega \ll \omega_0$  запаздывание почти исчезает, т. е. маховик совершает колебания в фазе с шатуном. В случае  $\omega = \omega_0$  при любом трении колебания маховика отстают от колебаний возбуждающего стержня на четверть периода ( $\delta = -\pi/2$ ): когда маховик достигает крайних отклонений, стержень проходит через среднее положение, и наоборот. Когда  $\omega$  значительно превосходит  $\omega_0$ , сдвиг фаз  $\delta$  приближается к  $-\pi$ : запаздывание маховика по фазе составляет почти  $180^\circ$ . В этом случае маховик и шатун в любой момент движутся в противоположных направлениях. Они почти одновременно пересекают нулевое деление шкалы, и почти одновременно достигают своих противоположных крайних точек.

Как следует из (130), в отсутствие трения сдвиг фаз либо равен нулю (при  $\omega < \omega_0$ ), либо  $180^\circ$  (при  $\omega > \omega_0$ ). Таким образом, при  $\omega = \omega_0$  происходит скачкообразный переход от режима колебаний маховика в фазе с шатуном к режиму колебаний в противофазе. (В отсутствие трения амплитуда маховика в точке этого перехода обращается в бесконечность.) При наличии трения, как можно видеть из рис. 42, переход от одного режима к другому происходит постепенно в некотором интервале частот в окрестности  $\omega_0$ . Ширина этого интервала частот пропорциональна постоянной затухания  $\gamma$ .

При установившихся колебаниях под действием синусоидальной внешней силы *угловая скорость* маховика  $\dot{\varphi} = a\omega \cos(\omega t + \delta)$  изменяется со временем также по гармоническому закону с частотой  $\omega$  вынуждающей силы. Выражение для амплитуды угловой скорости  $\Omega = a(\omega)\omega$  отличается от амплитуды угла отклонения  $a(\omega)$  (130) дополнительным множителем  $\omega$ :

$$\Omega(\omega) = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}. \quad (134)$$

Как видно из (134), максимум резонансной кривой для скорости расположен точно при  $\omega = \omega_0$  для любых значений постоянной затухания  $\gamma$ . Поэтому резонанс угловой скорости всегда (при любом трении) происходит при совпадении частоты вынуждающей силы  $\omega$  с собственной частотой  $\omega_0$ , несмотря на то, что резонанс угла отклонения происходит при  $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ . Резонансные кривые скорости для нескольких значений добротности приведены в правой верхней части рис. 42. В нижней правой части этого рисунка показаны кривые зависимости сдвига фаз

между колебаниями угловой скорости маховика и колебаниями шатуна. При резонансе скорости, т. е. при  $\omega = \omega_0$ , этот сдвиг обращается в нуль — изменения скорости происходят в фазе с изменениями вынуждающей силы, что соответствует наиболее эффективной передаче энергии осциллятору от внешнего источника, приводящего в движение возбуждающий шатун.

## 15.5 Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур

Несмотря на то, что в установившихся вынужденных колебаниях амплитуда постоянна, энергия осциллятора остается постоянной только в среднем. В течение некоторой четверти периода колебаний энергия передается от возбуждающего шатуна к осциллятору, а в течение следующей четверти цикла энергия передается обратно от осциллятора источнику внешнего воздействия, обеспечивающему заданное принудительное движение шатуна. Поэтому в отличие от случая собственных колебаний не только кинетическая и потенциальная энергии осциллятора, но и его полная энергия испытывает колебания. Эти колебания полной энергии происходят с частотой, вдвое превышающей частоту внешнего воздействия.

Мощность, рассеиваемая (превращаемая в теплоту) осциллятором при установившихся вынужденных колебаниях, определяется работой, совершаемой моментом силы вязкого трения в единицу времени:

$$P_{\text{расс}} = N_{\text{тр}}\dot{\varphi} = -2J\gamma\dot{\varphi}^2 = -2J\gamma\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta). \quad (135)$$

Здесь амплитуда  $a$  и сдвиг фаз  $\delta$  определяются выражениями (130). Как видно из (135), рассеяние энергии происходит неравномерно в течение периода: скорость диссипации максимальна в моменты прохождения ротора через среднее положение, и уменьшается до нуля в точках его наибольшего отклонения (в точках поворота), когда угловая скорость ротора обращается в нуль. Усредняя рассеиваемую мощность по периоду колебаний, получаем:

$$\langle P_{\text{расс}} \rangle = -J\gamma\omega^2 a^2 = -J\gamma\omega^2 \frac{\omega_0^4 \phi_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (136)$$

Поглощаемая осциллятором мощность, т. е. мощность, передаваемая осциллятору внешним источником, обеспечивающим принудительное движение шатуна, определяется совершаемой в единицу времени работой приложенного к шатуну момента внешней силы. Если не принимать во внимание момент инерции шатуна (считая его малым по сравнению с моментом инерции маховика), то внешний момент равен упругому моменту деформированной пружины:  $N_{\text{внеш}} = D(\varphi - \phi) = J\omega_0^2(\varphi - \phi)$ . Для нахождения мгновенного значения передаваемой осциллятору мощности нужно умножить этот момент, предварительно подставив в него  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  и  $\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t)$ , на угловую скорость шатуна  $\dot{\phi} = \omega\phi_0 \cos \omega t$ . Усредняя полученное выражение по периоду колебаний, получим:

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = -\frac{1}{2}J\omega_0^2 a \omega \sin \delta. \quad (137)$$

После подстановки в (137) значений  $a$  и  $\delta$  получим для среднего значения поглощаемой мощности выражение, совпадающее с (136) для средней рассеиваемой

осциллятором мощности: при установившихся колебаниях осциллятор рассеивает в среднем за период столько же энергии, сколько получает от внешнего источника. При этом мгновенные значения рассеиваемой и получаемой мощности не совпадают — кроме систематической подпитки осциллятора энергией, идущей на компенсацию потерь из-за трения, в течение периода происходит и двунаправленный обмен энергией.

В случае сравнительно слабого трения выражение (136) для средней рассеиваемой (и поглощаемой) осциллятором мощности можно упростить. При  $\gamma \ll \omega_0$  (или  $Q \gg 1$ ) пик резонансной кривой резкий и узкий: осциллятор избирательно реагирует на синусоидальное внешнее воздействие только в узкой полосе частот в окрестности частоты собственных колебаний. Когда нас интересует поглощаемая мощность на частотах  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , разность квадратов этих частот в знаменателе (136) можно записать следующим образом:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\Delta\omega, \quad (138)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  — расстройка частоты возбуждения относительно резонанса, т. е. частота, отсчитанная от резонансного значения  $\omega_0$ . После подстановки (138) в (136), получаем следующее приближенное выражение для средней поглощаемой мощности:

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = \frac{\gamma J \omega_0^4 \phi_0^2 / 4}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (139)$$

Эту зависимость средней поглощаемой мощности от частоты удобно представить в нормализованной форме  $F(\Delta\omega)$ , разделив  $\langle P_{\text{погл}}(\Delta\omega) \rangle$  на ее максимальное значение, достигаемое при  $\Delta\omega = 0$ :

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}, \quad (140)$$

где  $\tau = 1/\gamma$  — характерное время (время затухания) осциллятора. Описываемая выражением (140) спектральная зависимость часто встречается в различных физических проблемах и называется *лоренцевским контуром*. (Происхождение названия связано с тем, что такая спектральная зависимость поглощения энергии предсказывается развитой Г. Лоренцем электронной теорией.) В частности, спектры поглощения и испускания света атомами в определенных физических условиях описываются лоренцевским контуром. График этой функции показан на рис. 43. Он имеет вид симметричного пика, центр которого расположен при  $\Delta\omega = 0$ , т. е. при  $\omega = \omega_0$ . При смещении от этого положения (от максимума) в любую сторону на  $\Delta\omega = 1/\tau = \gamma$  поглощаемая мощность уменьшается до половины своего максимального значения. Таким образом, ширина лоренцевского контура на половине высоты (полуширина) составляет  $2\gamma = 2/\tau$ .

## 15.6 Переходные процессы

Амплитуда и фаза установившихся вынужденных колебаний не зависят от начальных условий: за время установления колебаний осциллятор их полностью “забывает”. Установившиеся колебания описываются периодическим частным решением (127) неоднородного дифференциального уравнения (126). Характеризующие

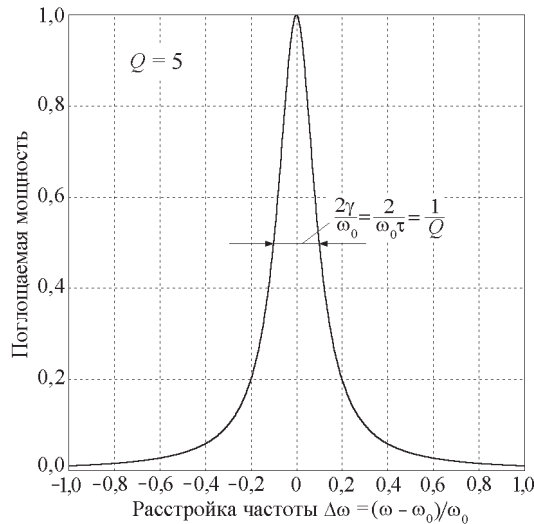


Рис. 43: Спектральная зависимость мощности, поглощаемой осциллятором в установившихся колебаниях (лоренцевский контур).

это решение амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики — резонансные кривые на рис. 42, как и лоренцевский спектральный контур поглощаемой мощности на рис. 43, — относятся только к режиму установившихся колебаний.

Начальные условия, т. е. угол отклонения  $\varphi(0)$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}(0)$  в момент  $t = 0$  включения внешнего воздействия, сказываются только во время *переходного процесса* установления колебаний. В течение переходного процесса затухающие собственные колебания накладываются на установившиеся вынужденные колебания. Математически этот процесс описывается суммой частного решения (127) неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения (126) с равной нулю правой частью. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (126) можно записать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta) + C e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (141)$$

содержащем произвольные постоянные  $C$  и  $\theta$ . Их значения определяются из начальных условий. Мы видим, что переходный процесс описывается суперпозицией синусоидальных колебаний неизменной амплитуды  $a$  на частоте внешнего воздействия  $\omega$ , и затухающих колебаний на частоте  $\omega_1$  с экспоненциально убывающей амплитудой (рис. 44).

Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, но практически его можно считать закончившимся к тому времени, когда вклад собственных колебаний с частотой  $\omega_1$  «вымирает», т. е. их амплитуда  $C e^{-\gamma t}$  становится пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой  $a$  установившихся колебаний. При нулевых начальных условиях  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  (осциллятор покоился в положении равновесия до включения периодической внешней силы) это происходит приблизительно через  $Q$  периодов собственных колебаний, где  $Q = \omega_0/2\gamma$  — добротность осциллятора, обратно пропорциональная постоянной затухания собственных колебаний. Вообще говоря, переходный процесс тем продолжительнее, чем меньше



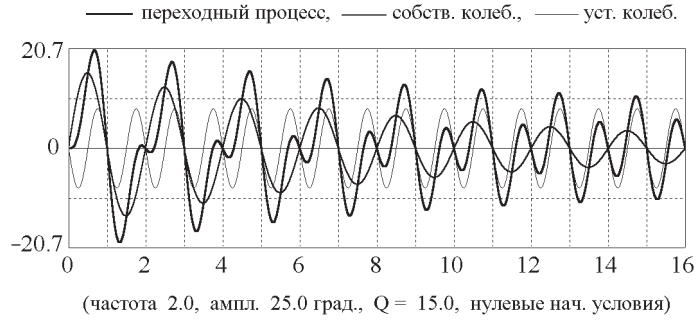


Рис. 44: Разложение переходного процесса на сумму установившихся вынужденных колебаний и затухающих собственных колебаний.

трение в системе. Однако возможны такие начальные условия, при которых переходного процесса не будет совсем (см ниже).

Частота  $\omega_1$  при слабом и умеренном трении очень близка к собственной частоте  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  (т. е. к частоте, с которой происходят собственные колебания осциллятора в отсутствие трения):

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right). \quad (142)$$

В большинстве практически важных случаев относительное различие этих частот  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  столь мало, что им можно пренебречь и положить  $\omega_1 = \omega_0$ . В самом деле, если  $Q = 5$ , эта относительная разность составляет всего лишь 0.5%:  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0 = 0.005$ .

Начальные условия можно задать так, чтобы переходного процесса не было совсем, т. е. чтобы сразу после включения периодического внешнего воздействия происходили установившиеся вынужденные колебания. Очевидно, что начальная амплитуда  $C$  вклада собственных колебаний в общее решение (141) будет равна нулю, если установившиеся колебания, описываемые вторым членом в (141), будут сами удовлетворять начальным условиям, без добавления собственных колебаний, т. е. первого члена в (141). Для этого начальное отклонение  $\varphi(0)$  должно быть равным  $a \sin \delta$ , а начальная скорость  $\dot{\varphi}(0)$  должна быть равна  $a\omega \cos \delta$ , где  $a$  и  $\delta$  — амплитуда и фаза установившихся колебаний, определяемые формулами (130). При таких начальных условиях в (141)  $C = 0$ , т. е. после включения внешнего воздействия колебания на собственной частоте вообще не возникают, и с самого начала происходят вынужденные колебания неизменной частоты и амплитуды.

Ограничимся далее рассмотрением переходных процессов при нулевых начальных условиях, т. е. при раскатке внешней периодической силой осциллятора, находившегося до ее включения в состоянии покоя в положении равновесия:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (143)$$

В момент времени  $t = 0$  шатун, раскачивающий осциллятор, начинает двигаться из своего среднего положения по закону:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (144)$$

Рассмотрим случай раскачки осциллятора с малым трением ( $\gamma \ll \omega_0$ ) синусоидальной внешней силой, настроенной в резонанс, т. е. на частоту собственных колебаний осциллятора  $\omega_1 \approx \omega_0$ . Как следует из (130), периодическое частное решение, описывающее установившиеся колебания, при  $\omega = \omega_0$  имеет вид:

$$\varphi(t) \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \phi_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -Q\phi_0 \cos \omega_0 t. \quad (145)$$

В рассматриваемом случае амплитуда колебаний маховика превосходит амплитуду шатуна в  $Q = \omega_0/2\gamma$  раз, а запаздывание по фазе составляет  $-\pi/2$  — движение маховика отстает на четверть цикла от колебаний шатуна.

Прибавим к периодическому частному решению (145) общее решение однородного уравнения с  $\omega_1 = \omega_0$ :

$$\varphi(t) = -Q\phi_0 \cos \omega_0 t + C e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (146)$$

Произвольные постоянные  $C$  и  $\theta$  определим так, чтобы для  $\varphi(t)$  в (146) удовлетворялись начальные условия (143). В рассматриваемом случае слабого трения ( $\gamma \ll \omega_0$ ) экспоненциальный множитель  $e^{-\gamma t}$  в (146) на протяжении периода колебаний почти не изменяется. Поэтому при дифференцировании (146) по времени этот множитель можно считать постоянным:

$$\dot{\varphi}(t) \approx Q\phi_0\omega_0 \sin \omega_0 t - C e^{-\gamma t} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (147)$$

Тогда из начального условия  $\dot{\varphi}(0) = 0$  находим  $\theta = 0$ , а из условия  $\varphi(0) = 0$  получаем  $C = Q\phi_0$ . Таким образом, при  $Q \gg 1$  и  $\omega = \omega_0$  решение дифференциального уравнения (127), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид:

$$\varphi(t) = -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t = -b(t) \cos \omega_0 t, \quad (148)$$

где

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}). \quad (149)$$

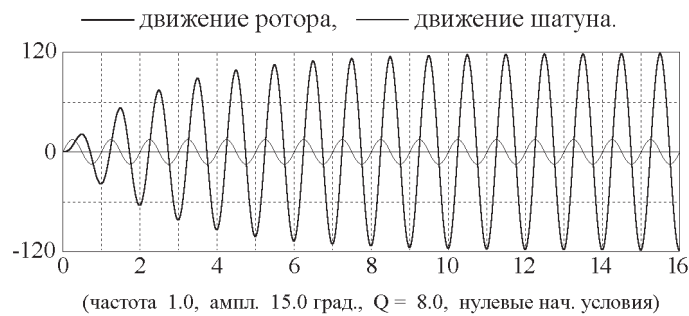


Рис. 45: Переходный процесс при резонансе (графики угла отклонения для возбуждающего шатуна и маховика осциллятора при нулевых начальных условиях).

Такая суперпозиция вынужденных и слабо затухающих собственных колебаний той же частоты может рассматриваться как одно «почти гармоническое» колебание с частотой  $\omega_0$ , амплитуда которого  $b(t)$  медленно нарастает со временем, монотонно приближаясь к постоянному значению  $Q\phi_0$ , соответствующему установившимся колебаниям (рис.45). Характерное время установления амплитуды  $\tau = 1/\gamma$  совпадает со временем жизни собственных колебаний в этой же системе.

Качественно такое поведение осциллятора легко объяснить с помощью энергетических соображений. При большой добротности  $Q$  осциллятор при резонансе раскачается до амплитуды  $Q\phi_0$ , значительно (в  $Q$  раз) превосходящей амплитуду шатуна. Чем выше добротность, тем большую энергию запасет осциллятор и, следовательно, тем больше времени (большее число колебаний шатуна) требуется для того, чтобы сообщить ему эту энергию.

При слабом трении продолжительность резонансной раскачки составляет много периодов колебаний:  $\tau \gg T_0$ . Рост амплитуды на начальном этапе раскачки происходит почти по линейному закону. Это можно увидеть из уравнения (149), полагая в нем  $\gamma t \ll 1$ . Разлагая экспоненту в степенной ряд и ограничиваясь линейным по  $\gamma t$  членом, получаем:

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) = \frac{\omega_0}{2\gamma}\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \approx \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t. \quad (150)$$

Независимость полученного выражения от постоянной затухания  $\gamma$  означает, что на начальном этапе резонансной раскачки осциллятора из состояния покоя рост амплитуды происходит практически с такой же скоростью, как и в отсутствие трения. В идеализированном случае полного отсутствия трения линейный рост амплитуды продолжался бы неограниченно. Это значит, что при отсутствии трения такая идеализированная система «идет вразнос» и установление вынужденных колебаний при  $\omega = \omega_0$  невозможно. Фактически это означает, что принятая модель в данном случае неприменима: при описании резонанса трение необходимо учитывать, сколь бы слабым они ни было. В реальной системе при достаточно больших амплитудах либо становится недопустимым пренебрежение трением, либо зависимость восстанавливающего упругого момента становится нелинейной (при больших деформациях пружины проявляются отклонения от закона Гука). В последнем случае нелинейность системы приводит к неизохронности колебаний и связанному с этим нарушению условий резонанса при колебаниях с большими амплитудами. Это обстоятельство ограничивает рост амплитуды даже в отсутствие трения. Которая из этих причин проявляет себя раньше и в действительности ограничивает резонансный рост амплитуды в реальной физической системе, зависит от свойств конкретной системы, не учитываемых в рассматриваемой упрощенной модели осциллятора.

## 15.7 Переходные процессы вблизи резонанса

Если частота вынуждающего воздействия близка к частоте собственных затухающих колебаний осциллятора, то в переходном процессе установления колебаний, пока собственные колебания не затухли, происходит сложение колебаний с близкими частотами  $\omega$  и  $\omega_1$ . (Как уже отмечалось, частота  $\omega_1$  почти равна собственной частоте  $\omega_0$  в практически важных случаях, когда трение не слишком велико

[(см. (142)], так что в дальнейшем мы не будем делать различия между  $\omega_0$  и  $\omega_1$ .) Такое наложение колебаний порождает *модулированное колебание*, т. е. почти синусоидальное колебание со средней частотой, амплитуда которого медленно поочередно возрастает и убывает со сравнительно низкой *частотой биений*  $|\omega - \omega_0|$ , равной модулю разности собственной и вынуждающей частот.

Сначала вынуждающая сила раскачивает осциллятор до амплитуды, превышающей установившееся значение. Затем разность фаз, накопившаяся между колебаниями маховика и шатуна, приводит к обратной передаче энергии от осциллятора к источнику внешнего воздействия, и амплитуда начинает убывать. Дальнейшее изменение разности фаз двух колебаний снова приведет к росту амплитуды, которое через некоторое время опять сменится убыванием, и так далее.

При наличии трения эти процессы модуляции, т. е. чередования медленного роста и убывания амплитуды (*переходные биения*) становятся все менее выраженными по мере затухания вклада колебаний на собственной частоте. На рисунке 46 приведен график переходных биений для случая, когда первоначально маховик покоился в положении равновесия, а частота вынуждающей силы  $\omega = 0.8\omega_0$ , т. е. четыре цикла ее изменения совершаются на протяжении пяти периодов собственных колебаний. (На графике время отложено в единицах периода вынуждающей силы  $T$ .) Таким образом, один период биений  $T_b = 2\pi/|\omega - \omega_0|$  равен четырем периодам внешнего воздействия  $T = 2\pi/\omega$  и пяти периодам собственных колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

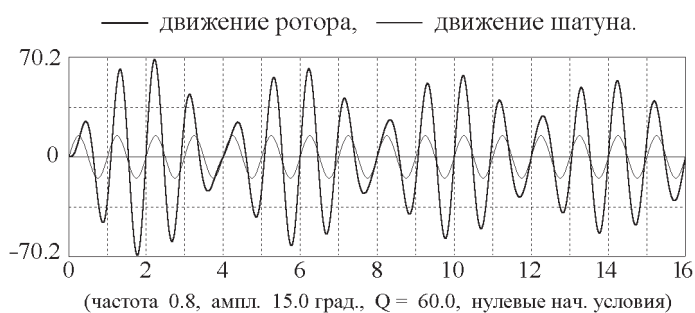


Рис. 46: Постепенно затухающие переходные биения в переходном процессе вблизи резонанса (при нулевых начальных условиях).

В отсутствие трения вклад колебаний на собственной частоте не затухает, и на протяжении переходного процесса происходит сложение двух близких по частоте гармонических колебаний с неизменными амплитудами. При нулевых начальных условиях их амплитуды относятся как  $\omega/\omega_0$ . В результате возникают незатухающие биения, т. е. почти гармонические колебания на средней частоте с амплитудой, медленно изменяющейся со временем по синусоидальному закону. В идеализированном случае полного отсутствия трения установившихся колебаний не существует, за исключением рассмотренного выше случая специфических начальных условий, при которых переходный процесс отсутствует).

## 15.8 Переходные процессы вдали от резонанса

Далее мы рассмотрим случаи, когда частота внешнего воздействия значительно отличается от собственной частоты осциллятора.

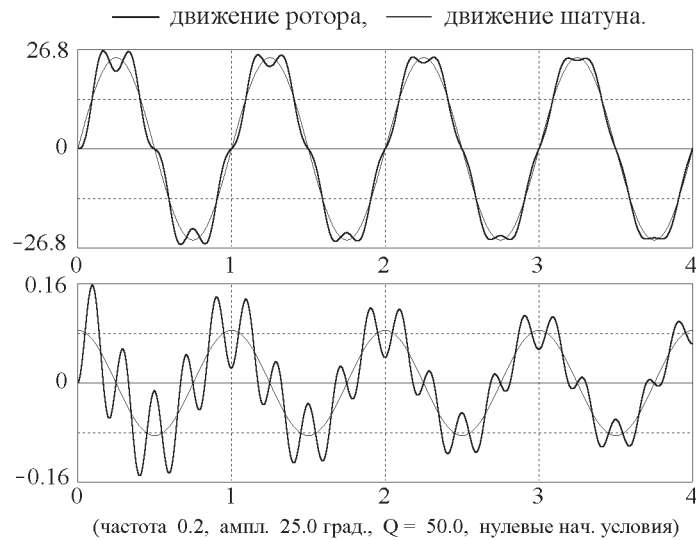


Рис. 47: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при низкой частоте возбуждения ( $\omega \ll \omega_0$ ).

Если внешняя частота много меньше собственной частоты ( $\omega \ll \omega_0$ ), положение равновесия осциллятора медленно смещается вместе с шатуном поочередно вправо и влево, а ротор совершает около такого медленно движущегося положения равновесия сравнительно быстрые постепенно затухающие колебания на собственной частоте. В результате на медленные установившиеся колебания неизменной амплитуды накладываются искажающие их быстрые собственные колебания постепенно уменьшающейся амплитуды.

Пример такого переходного процесса с  $\omega = 0.8 \omega_0$  показан на рис. 47. По мере затухания собственных колебаний высокочастотные искажения графика уменьшаются, и в конце концов медленные вынужденные колебания принимают правильную синусоидальную форму.

В противоположном случае высокой частоты принудительного движения шатуна на протяжении переходного процесса быстрые вынужденные колебания неизменной амплитуды происходят около некоторого движущегося среднего положения, которое совершает медленные затухающие колебания на собственной частоте осциллятора.

Графики угла отклонения и угловой скорости для такого переходного процесса показаны на рис. 48 вместе с графиками составляющих его быстрых вынужденных синусоидальных колебаний неизменной амплитуды и медленных затухающих собственных колебаний. Когда медленные собственные колебания затухают, остаются только быстрые колебания, симметричные относительно точки  $\phi = 0$  (т. е. относительно среднего положения шатуна). Эти быстрые колебания маховика происходят в противофазе с принудительными колебаниями шатуна. Амплитуда устано-

вившихся колебаний значительно меньше амплитуды вынуждающего шатуна.

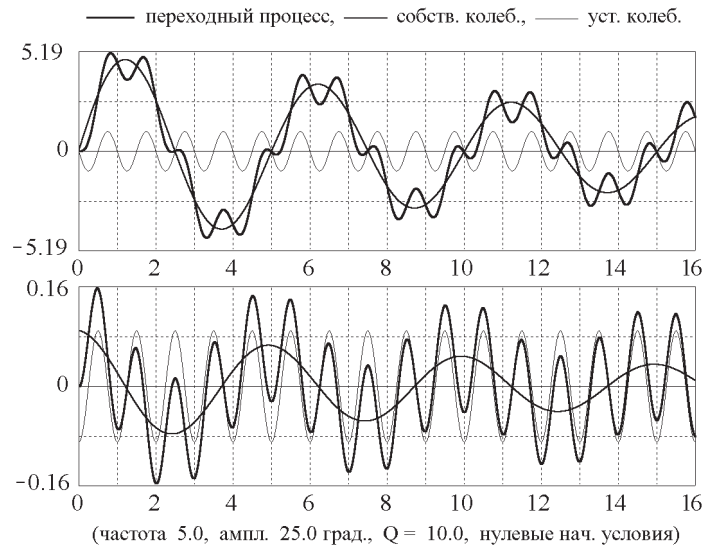


Рис. 48: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при высокой частоте возбуждения ( $\omega \gg \omega_0$ ).

## Рекомендуемая литература

1. Горелик Г.С. Колебания и волны (3-е издание). М., «Физматлит», 2007 (стр. 100–118).
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 239–246).
3. Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975 (стр. 437–445).
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (Пространство. Время. Движение). М., «Мир», 1966 (стр. 97–105).
5. Бутиков Е.И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. СПб, 2005. (стр. 70–91).
6. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. М., «Наука», 1978 (стр. 80–87).

# 16 Собственные колебания нелинейных систем (на примере маятника)

## Содержание темы

Собственные колебания нелинейного осциллятора. Жесткий маятник в поле тяжести. Потенциальная яма и фазовые траектории колебаний и переворотов. Зависимость периода колебаний от амплитуды. Колебания с большими амплитудами. Перевороты маятника. Движение по сепаратрисе. Влияние трения на фазовый портрет маятника.

### 16.1 Введение. Физическая система

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями.

В лекции рассматриваются возможные движения математического маятника в виде точечной массы в однородном поле тяготения, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Мы рассматриваем именно стержень, а не гибкую нить, чтобы можно было изучать полные перевороты и колебания с амплитудой, приближающейся к  $180^\circ$ . Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, т. е. закрепленного на горизонтальной оси произвольного твердого тела (а не только точечной массы), так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением.

В положении устойчивого равновесия центр масс маятника расположен ниже точки подвеса на одной вертикали с ней. При отклонении маятника из этого положения на угол  $\varphi$  сила тяжести создает возвращающий момент, пропорциональный  $\sin \varphi$ . При малых углах отклонения  $\varphi$  (т. е. при малых колебаниях маятника) значения синуса угла и самого угла практически совпадают ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ), и маятник ведет себя подобно линейному осциллятору. В частности, в отсутствие трения маятник совершает простое гармоническое колебание. При больших амплитудах консервативный маятник совершает периодические колебания, которые, однако, уже не

будут гармоническими. Графики таких колебаний заметно отличаются от синусоиды, а период колебаний существенно зависит от амплитуды.

На рис. 49 приведены графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях с амплитудой  $179^\circ$ .

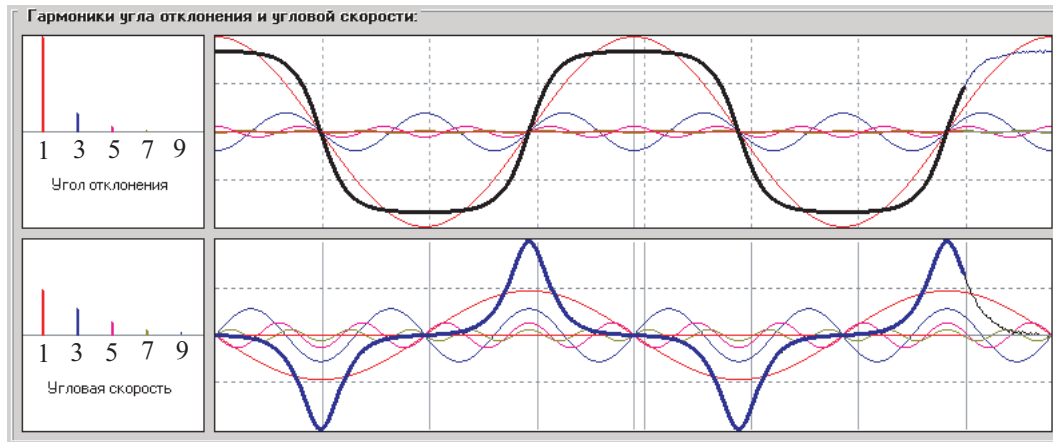


Рис. 49: Графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях маятника с амплитудой  $179^\circ$  вместе с гармониками этих колебаний.

Метки на шкале времени (т. е. вертикальные деления) проведены в соответствии с естественной для маятника единицей времени, равной периоду колебаний бесконечно малой амплитуды. Обратите внимание на то, что период  $T$  несинусоидальных колебаний маятника с амплитудой  $179^\circ$  почти в четыре раза больше периода малых колебаний.

Вместе с графиками на рис. 49 показан также *спектр*, т. е. синусоидальные составляющие (гармоники) этих колебаний. Период основной (фундаментальной) гармоники равен периоду колебаний  $T$ . Ее круговая частота обратно пропорциональна периоду:  $\omega = 2\pi/T$ . Частоты высших гармоник  $3\omega, 5\omega \dots$  кратны основной частоте. Спектр колебаний маятника образован только нечетными гармониками.

Если при начальном возбуждении маятник получит достаточно большую энергию, сначала он будет совершать полные перевороты. Из-за трения маятник постепенно теряет энергию, и с некоторого момента вращательное движение сменяется колебательным.

Дифференциальное уравнение физического маятника можно получить, основываясь на основном уравнении динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Применительно к физическому маятнику в однородном поле тяжести в отсутствие трения это уравнение принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi. \quad (151)$$

Здесь  $J$  — момент инерции маятника относительно оси вращения,  $a$  — расстояние от оси до центра масс,  $g$  — ускорение свободного падения. Левая часть уравнения (151) представляет собой скорость изменения момента импульса маятника, правая — момент силы тяжести. Этот момент равен произведению силы  $mg$  (приложенной в центре масс) на плечо этой силы  $a \sin \varphi$ . После деления обеих частей уравнения (151) на  $J$  получаем:



$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (152)$$

где введено обозначение  $\omega_0^2 = mga/J$ . Для простого маятника  $a = l$ ,  $J = ml^2$ , и поэтому  $\omega_0^2 = g/l$ . Для физического маятника  $\omega_0^2$  можно представить в таком же виде, если ввести по определению величину  $l = J/(ma)$ . Эта величина имеет размерность длины и называется *приведенной длиной* физического маятника. Поскольку физический маятник с приведенной длиной  $l$  описывается тем же дифференциальным уравнением, что и математический маятник такой же длины  $l$ , эти две системы динамически эквивалентны.

При малых углах отклонения от положения устойчивого равновесия можно заменить в уравнении (152)  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ , и тогда уравнение (152) совпадет с дифференциальным уравнением колебаний гармонического осциллятора (см. лекцию 28). Поэтому величина  $\omega_0$  в уравнении (152) для маятника имеет физический смысл угловой частоты предельно малых колебаний маятника в отсутствие трения.

При наличии вязкого трения в правую часть уравнения (152) следует добавить член, пропорциональный угловой скорости  $\dot{\varphi}$ . Поэтому уравнение маятника с трением принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (153)$$

Таким образом, маятник как динамическая система характеризуется всего двумя независимыми параметрами: *угловой частотой малых колебаний*  $\omega_0$  и *постоянной затухания*  $\gamma$ , которая также имеет размерность частоты (или угловой скорости). Как и в случае линейного осциллятора, вместо постоянной затухания удобно использовать эквивалентный безразмерный параметр — *добротность*  $Q = \omega_0/(2\gamma)$ . В случае малых колебаний величина  $Q/\pi$  равна числу полных циклов, на протяжении которых амплитуда уменьшается в  $e \approx 2.72$  раза.

Принципиальное различие между уравнением (153) для маятника и соответствующим дифференциальным уравнением для пружинного осциллятора (который рассматривался в лекции 28) заключается в том, что уравнение (153) *нелинейно*. Трудности нахождения аналитического решения этого уравнения как раз и обусловлены его нелинейностью. В общем случае решение уравнения (153) в элементарных функциях не выражается. В частном случае отсутствия трения решение уравнения (152) можно выразить через специальные функции (эллиптические интегралы).

## 16.2 Фазовый портрет маятника

Общее представление о возможных движениях маятника при разных значениях сообщенной ему энергии дают фазовые траектории, т. е. кривые зависимости угловой скорости от угла отклонения. Особенно важно, что фазовые траектории могут рассказать многое о возможном поведении нелинейной физической системы в тех случаях, когда аналитического решения не существует.

Для консервативной системы можно построить семейство фазовых траекторий, не решая дифференциального уравнения, описывающего ее поведение. Уравнения фазовых траекторий непосредственно следуют из закона сохранения энергии. По-

Потенциальная энергия маятника в поле тяготения  $E_{\text{pot}}(\varphi)$  зависит от угла отклонения маятника  $\varphi$  из положения равновесия:

$$E_{\text{pot}}(\varphi) = mga(1 - \cos \varphi). \quad (154)$$

График  $E_{\text{pot}}(\varphi)$  показан в верхней части рис. 50. Потенциальная энергия имеет минимальное (нулевое) значение в положении устойчивого равновесия, расположенном при  $\varphi = 0$  (дно потенциальной ямы). Потенциальная энергия маятника имеет максимальное значение  $2mga$  в перевернутом положении (при  $\varphi = \pm\pi$ ), которое соответствует неустойчивому равновесию. Это вершина потенциального барьера. Потенциальная энергия маятника периодически зависит от угла  $\varphi$  (с периодом  $2\pi$ ).

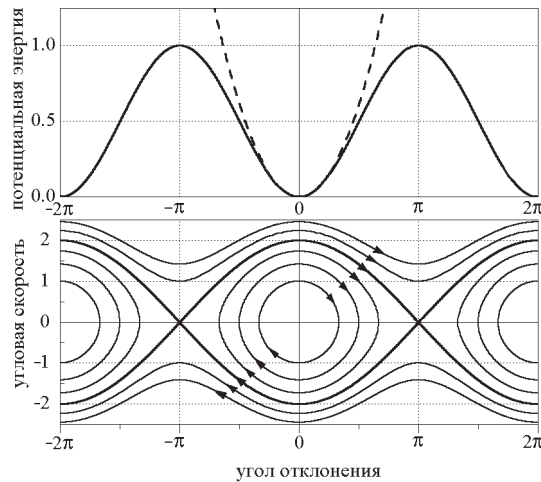


Рис. 50: Потенциальная яма и фазовый портрет консервативного маятника.

Штриховой линией на рис. 50 для сравнения показана параболическая потенциальная яма линейного (гармонического) осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды. Так как вблизи минимума обе потенциальные ямы имеют одинаковую кривизну, малые колебания маятника имеют такой же период, как и колебания соответствующего линейного осциллятора.

В отсутствие трения полная энергия маятника  $E$ , т. е. сумма его кинетической энергии  $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$  и потенциальной энергии (154), остается постоянной во время движения:

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mga(1 - \cos \varphi) = E. \quad (155)$$

Это уравнение связывает между собой угол отклонения  $\varphi$  и угловую скорость  $\dot{\varphi}$ . Поэтому (155) представляет собой уравнение фазовой траектории, соответствующей определенному значению полной энергии маятника  $E$ . Для дальнейшего удобно представить уравнение (155) в несколько иной форме. Вспоминая, что  $mga/J = \omega_0^2$ , и вводя по определению величину  $E_0 = J\omega_0^2/2$  (которая имеет физический смысл кинетической энергии тела с моментом инерции  $J$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_0$ ), уравнение (155) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos \varphi) = \frac{E}{E_0}. \quad (156)$$

Когда полная энергия маятника  $E$  меньше, чем максимально возможное значение его потенциальной энергии (когда  $E < 2mga = 4E_0$ ), т. е. когда полная энергия меньше высоты потенциального барьера, показанного на рис. 50, маятник совершает колебания, качаясь туда и обратно между симметричными положениями максимального отклонения  $\varphi_m$  и  $-\varphi_m$ . В этих крайних положениях (точках поворота) потенциальная энергия маятника  $E_{\text{pot}}(\varphi)$  сравнивается с его полной энергией  $E$ , а значит кинетическая энергия и угловая скорость обращаются в нуль. Если амплитуда мала ( $\varphi_m \ll \pi/2$ ), колебания почти синусоидальны, а соответствующая им фазовая траектория имеет почти эллиптическую форму. Эллиптическая форма фазовой траектории малых колебаний получается из уравнения (156), если подставить в него приближенное значение косинуса:  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ , справедливое для малых углов  $\varphi$ :

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{E\omega_0^2/E_0} + \frac{\varphi^2}{E/E_0} = 1. \quad (157)$$

Это уравнение определяет эллипс в фазовой плоскости ( $\varphi, \dot{\varphi}$ ). Его горизонтальная полуось равна максимальному угловому отклонению маятника  $\varphi_m = \sqrt{E/E_0}$ . Если угловую скорость  $\dot{\varphi}$  откладывать на оси ординат в единицах угловой частоты малых колебаний  $\omega_0$ , задаваемый уравнением (157) эллипс вырождается в окружность.

Чем больше полная энергия  $E$  (т. е. чем больше амплитуда колебаний  $\varphi_m$ ), тем значительнее движение маятника отличается от простого гармонического колебания, и тем сильнее фазовая траектория отличается от эллипса. При увеличении полной энергии  $E$  и приближении ее к значению  $2mga$  фазовая траектория вытягивается в горизонтальном направлении (вдоль оси  $\varphi$ ) сильнее, чем в вертикальном (вдоль оси  $\dot{\varphi}$ ). Так происходит потому, что склоны потенциальной ямы маятника с увеличением амплитуды колебаний поднимаются не столь круто, как склоны параболической ямы линейного осциллятора (см. рис. 50). Так как возвращающий момент силы тяжести у маятника растет с углом отклонения медленнее, чем у осциллятора, маятник называют системой с «мягкой» возвращающей силой. Поэтому в отличие от осциллятора, период колебаний которого не зависит от амплитуды, период колебаний маятника растет по мере увеличения амплитуды.

Когда маятник отклонен из равновесия на угол, близкий к  $90^\circ$ , возвращающий момент силы тяжести почти постоянен (слабо зависит от угла  $\varphi$  в окрестности  $90^\circ$ ). Это можно увидеть и из графика зависимости потенциальной энергии от  $\varphi$  (см. рис. 50), наклон которого почти неизменен вблизи точек перегиба  $\varphi = \pm 90^\circ$ . Поэтому маятник движется здесь с почти постоянным угловым ускорением, а угловая скорость линейно зависит от времени, что отчетливо проявляется на графиках угловой скорости. Для колебаний с большими амплитудами ( $110 - 140^\circ$ ) эти графики принимают пилообразную форму с почти прямолинейными зубцами. Прямолинейным участкам графиков скорости на графиках угла отклонения соответствуют зубцы параболической формы. Весь график угла отклонения  $\varphi(t)$  состоит из таких почти параболических сегментов, выпуклости которых поочередно обращены в противоположные стороны.

При больших амплитудах маятник большую часть периода колебаний проводит в окрестности точек максимального отклонения (точек поворота), где направление его движения изменяется на противоположное. С увеличением размаха колебаний на графике угла отклонения  $\varphi(t)$  вершины становятся более плоскими, а на графике угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  — более острыми. Такие изменения формы графиков ясно видны на рис. 51.

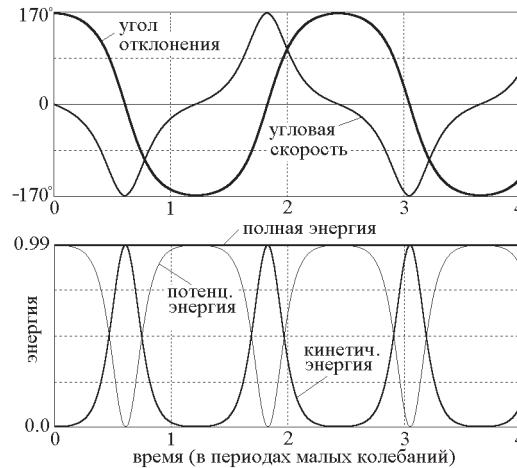


Рис. 51: Графики больших колебаний маятника в отсутствие трения ( $\varphi_{\max} = 170^\circ$ ).

В нижней части рис. 51 показаны графики потенциальной, кинетической и полной энергий маятника. Совершая большие колебания, маятник проводит на пологих склонах потенциальной ямы в среднем больше времени нежели вблизи ее дна. Поэтому с увеличением амплитуды колебаний вершины графика потенциальной энергии  $E_{\text{pot}}(t)$  растягиваются и становятся шире, чем долины между ними, в противоположность гармоническому осциллятору, для которого максимумы и минимумы графика имеют одинаковую ширину. Противоположные изменения происходят на графике кинетической энергии  $E_{\text{kin}}(t)$ . Это значит, что при колебаниях большого размаха среднее по времени значение потенциальной энергии маятника больше среднего значения кинетической энергии. Напомним, что при малых колебаниях маятника средние значения двух видов энергии одинаковы (как и у гармонического осциллятора).

Если полная энергия маятника превышает потенциальную энергию в перевернутом положении, т. е. если  $E > 2mga$ , то угловая скорость маятника не обращается в нуль даже при  $\varphi = \pm\pi$ . В противоположность режиму колебаний знак угловой скорости теперь остается неизменным. Маятник совершает полные обороты, т. е. *вращается* в определенном направлении. Это вращение происходит неравномерно: когда он проходит через низшую точку своего кругового пути, т. е. через положение устойчивого равновесия, угловая скорость максимальна. В моменты прохождения через верхнюю точку (через положение неустойчивого равновесия) угловая скорость маятника минимальна.

В фазовой плоскости вращение маятника представлено траекторией, которая выходит за пределы вертикальных линий  $\varphi = \pm\pi$ , продолжаясь периодически с каждым новым оборотом, как показано на рис. 50. Для верхних кривых, лежащих

выше оси  $\varphi$ , значения угловой скорости  $\dot{\varphi}$  положительны и угол  $\varphi$  возрастает со временем. Это значит, что они соответствуют вращению маятника в положительном направлении (против часовой стрелки). Изображающая точка движется вдоль этих кривых слева направо.

Для любой консервативной системы уравнение фазовой траектории (в частности, уравнение (156) в случае маятника) всегда выражается четной функцией аргумента  $\dot{\varphi}$ , так как кинетическая энергия зависит только от  $\dot{\varphi}^2$ . Отсюда следует, что фазовая траектория симметрична относительно горизонтальной оси  $\varphi$ . Эта симметрия означает, что движение системы в одном направлении (скажем, по часовой стрелке) механически эквивалентно движению в обратном направлении (против часовой стрелки). Другими словами, движение консервативной системы *обратно во времени*: если в произвольный момент времени знак скорости мгновенно изменить на противоположный, изображающая точка в фазовой плоскости перескакивает на ту же самую фазовую траекторию в новое положение, расположенное симметрично по другую сторону горизонтальной оси  $\varphi$ . Двигаясь в обратном направлении, система проходит через те же пространственные точки с той же самой скоростью (по модулю), что и в прямом движении. Поскольку обращение знака скорости ( $\dot{\varphi} \rightarrow -\dot{\varphi}$ ) эквивалентно изменению направления времени ( $t \rightarrow -t$ ), отмеченное свойство консервативных систем называют также симметрией по отношению к *обращению времени*.

Дополнительная симметрия фазовых траекторий консервативного маятника относительно вертикальной оси  $\dot{\varphi}$  (симметрия по отношению к замене  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ) следует из симметрии потенциальной ямы:  $E_{\text{pot}}(-\varphi) = E_{\text{pot}}(\varphi)$ . При включении трения в модель маятника движение системы становится необратимым во времени. Поэтому отмеченная выше симметрия фазовых траекторий системы относительно координатных осей фазовой плоскости исчезает.

Углы  $\varphi$  и  $\varphi \pm 2\pi$ ,  $\varphi \pm 4\pi$ , ... эквивалентны, так как соответствуют одному и тому же положению маятника. Поэтому достаточно рассматривать только часть фазовой плоскости, например, полосу, заключенную между вертикальными прямыми  $\varphi = -\pi$  и  $\varphi = \pi$  (см рис. 50). Эти прямые можно отождествить и считать, что когда изображающая точка покидает выделенную область, пересекая правую ее границу  $\varphi = \pi$ , эта точка одновременно входит с противоположной стороны через левую границу  $\varphi = -\pi$  (если маятник совершает переворот против часовой стрелки).

Двумерное фазовое пространство жесткого маятника можно представлять себе не только как часть плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , заключенную между вертикальными прямыми  $\varphi = +\pi$  и  $\varphi = -\pi$ , но и как некоторую поверхность, не имеющую границ. Это возможно потому, что противоположные точки вертикальных прямых, соответствующие одинаковым значениям  $\dot{\varphi}$ , описывают физически эквивалентные состояния маятника. Принимая во внимание также периодичность зависимости потенциальной энергии маятника и возвращающего момента силы тяжести от угла  $\varphi$ , можно вырезать эту часть плоскости и свернуть ее в цилиндр, соединив граничные прямые  $\varphi = +\pi$  и  $\varphi = -\pi$ . Образованную таким образом цилиндрическую поверхность можно рассматривать как фазовое пространство маятника. Фазовые траектории, охватывающие этот цилиндр, соответствуют полным переворотам (неравномерному вращению) маятника. Такое вращение, как уже отмечалось, происходит при значениях полной энергии, превосходящих высоту потенциального барьера  $2mga$ , разделяющего соседние минимумы потенциальной энергии.

Период вращения быстро уменьшается при увеличении энергии. Асимптотическое поведение периода при  $E \gg 2mga$  можно найти следующим образом.

Когда полная энергия маятника  $E$  значительно превосходит высоту потенциального барьера  $2mga$ , можно приближенно считать, что вся энергия маятника — это кинетическая энергия его вращения. Иными словами, в этом случае можно пренебречь влиянием поля тяжести на поведение маятника и в первом приближении считать, что он совершает равномерное вращение. Если возбуждение маятника совершалось сообщением ему в положении устойчивого равновесия некоторой угловой скорости  $\Omega$ , то дальнейшее вращение и происходит приблизительно с этой угловой скоростью. Поэтому при  $E = J\Omega^2/2 \gg 2mga$  период вращения обратно пропорционален угловой скорости  $\Omega$ , сообщенной маятнику при возбуждении:  $T = 2\pi/\Omega$ .

Чтобы улучшить полученную оценку зависимости периода от начальной угловой скорости  $T(\Omega)$ , нужно принять во внимание вариации угловой скорости вращения маятника из-за действия силы тяжести. Угловая скорость осциллирует между максимальным значением  $\Omega$  в нижней точке и некоторым минимальным значением  $\Omega_{\min}$  в верхней точке траектории. Минимальную угловую скорость можно найти с помощью закона сохранения энергии:

$$\Omega_{\min} = \sqrt{\Omega^2 - 4\omega_0^2} \approx \Omega \left( 1 - 2\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

При сравнительно быстром вращении маятника осцилляции угловой скорости почти синусоидальны. Это можно увидеть из графиков угловой скорости, которые строит моделирующая программа. Поэтому в следующем приближении среднее значение угловой скорости можно получить как полусумму максимального и минимального значений:

$$\Omega_{\text{av}} \approx (\Omega + \Omega_{\min})/2 = \Omega(1 - \omega_0^2/\Omega^2),$$

что для периода вращения маятника дает следующую оценку:

$$T(\Omega) = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{av}}} \approx T_0 \frac{\omega_0}{\Omega} \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right).$$

Отличие маятника от линейного осциллятора проявляется прежде всего в зависимости периода колебаний от амплитуды. Чтобы получить приближенную теоретическую формулу для этой зависимости, нужно удержать следующий член в разложении  $\sin \varphi$  в дифференциальном уравнении (152):

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3, \quad (158)$$

и в результате получаем следующее приближенное нелинейное дифференциальное уравнение для консервативного маятника с  $\gamma = 0$ :

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \frac{1}{6}\omega_0^2\varphi^3 = 0, \quad (159)$$

Приближенное решение уравнения (159) можно искать в виде суперпозиции синусоидального колебания  $\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega t$  и его третьей гармоники  $\epsilon \varphi_m \cos 3\omega t$ ,

частота которой равна  $3\omega$  (мы принимаем, что момент  $t = 0$  соответствует максимальному отклонению маятника). Такое решение приведено во многих учебниках, см., например, [2], стр. 224 – 227. Относительный вклад третьей гармоники  $\epsilon$  оказывается равным  $\varphi_m^2/192$ , где  $\varphi_m$  – амплитуда основной гармоники, частота которой получается меньшей, чем частота  $\omega_0$  предельно малых колебаний на величину, пропорциональную квадрату амплитуды  $\varphi_m^2$ :

$$\omega \approx \omega_0(1 - \varphi_m^2/16), \quad T = 2\pi/\omega \approx T_0(1 + \varphi_m^2/16). \quad (160)$$

Рекомендуется получить это решение самостоятельно, либо по крайней мере проследить за всеми деталями вывода, приведенного в учебниках, чтобы составить представление о приближенных методах, используемых в теории колебаний. Ту же самую приближенную формулу (160) для зависимости периода колебаний маятника от амплитуды можно получить из точного решения, выраженного через эллиптические интегралы, разлагая точное решение в ряд по степеням амплитуды  $\varphi_m$ .

Уравнение (160) показывает, что, например, при амплитуде  $\varphi_m = 30^\circ$  (0.52 рад) относительное увеличение периода колебаний (по сравнению с периодом колебаний бесконечно малой амплитуды) составляет 0.017 (1.7%). Относительный вклад третьей гармоники в это несинусоидальное колебание составляет 0.14%, т. е. ее амплитуда равна лишь  $0.043^\circ$ .

В следующей таблице приведены значения периода  $T$  (для нескольких значений амплитуды), рассчитанные по формуле (160) и измеренные в вычислительном эксперименте. Сравнивая эти значения, приходим к заключению, что приближенная формула (160) для амплитуды  $45^\circ$  дает значение периода с относительной ошибкой лишь  $(1.0400 - 1.0386)/1.04 = 0.0013 = 0.13\%$ . Однако при  $90^\circ$  ошибка составляет уже 2.24%. Ошибка не превышает 1% для амплитуд вплоть до  $70^\circ$ .

Амплитуда $\varphi_m$	$T/T_0$ (теория)	$T/T_0$ (эксперимент)
$30^\circ$ ( $\pi/6$ )	1.0171	1.0175
$45^\circ$ ( $\pi/4$ )	1.0386	1.0400
$60^\circ$ ( $\pi/3$ )	1.0685	1.0732
$90^\circ$ ( $\pi/2$ )	1.1539	1.1804
$120^\circ$ ( $2\pi/3$ )	1.2742	1.3730
$135^\circ$ ( $3\pi/4$ )	1.3470	1.5279
$150^\circ$ ( $5\pi/6$ )	1.4284	1.7622

### 16.3 Лимитационное движение маятника

Фазовая траектория движения консервативного маятника с полной энергией  $E$ , равной максимально возможному значению потенциальной энергии маятника, а именно,  $E_{\text{pot}}(\pi) = 2mga = E_{\text{max}}$ , представляет особый интерес. Она отделяет центральную область фазовой плоскости, занятую замкнутыми траекториями колебательных движений, от внешних областей, занятых фазовыми траекториями вращательных движений. Эта граница называется *сепаратрисой*. На рис. 50 она выделена жирной линией. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость маятника на об-

ласти, соответствующие разным типам движения. Уравнение сепаратрисы следует из уравнения (155) или (156), если подставить туда  $E = 4E_0 = 2J\omega_0^2$ :

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (161)$$

Лимитационное движение консервативного маятника (движение с полной энергией  $E = 2mga$ ) заслуживает детального обсуждения. В этом случае изображающая точка в фазовой плоскости движется вдоль сепаратрисы. Когда маятник с энергией  $E = 2mga$  приближается к перевернутому положению  $\varphi = \pi$  или  $\varphi = -\pi$ , его угловая скорость стремится к нулю, обращаясь в нуль при  $\varphi = \pm\pi$ . В фазовой плоскости это состояние представлено седловыми точками  $\varphi = \pm\pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , в которых встречаются верхняя и нижняя ветви сепаратрисы (161). Обе эти точки соответствуют одному и тому же механическому состоянию, в котором перевернутый маятник находится в покое в неустойчивом положении равновесия. Малейшее смещение маятника из этого положения в ту или другую сторону приведет к колебаниям с амплитудой, приближающейся к  $\pi$ , а малейший толчок приведет к вращательному движению (к полным переворотам). При таких колебаниях (как и при переворотах) маятник надолго задерживается в окрестности перевернутого положения.

Замечательно, что для лимитационного движения маятника, т. е. движения с полной энергией  $E = 4E_0 = 2mga$ , существует аналитическое решение, в котором зависимость от времени для угла отклонения  $\varphi(t)$  и для угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  выражается через элементарные функции. Интегрирование дифференциального уравнения (161) с начальным условием  $\varphi(0) = 0$  (при положительном знаке квадратного корня) дает:

$$-\omega_0 t = \ln \tan[(\pi - \varphi)/4], \quad (162)$$

и мы приходим к следующему выражению для  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (163)$$

Это решение описывает движение маятника в направлении против часовой стрелки, начинающееся при  $t = -\infty$  из положения  $\varphi = -\pi$ . При  $t = 0$  груз маятника проходит через нижнюю точку своей круговой траектории, и затем продолжает движение, асимптотически приближаясь к перевернутому положению  $\varphi = +\pi$ . График  $\varphi(t)$  для этого движения показан на рис. 52.

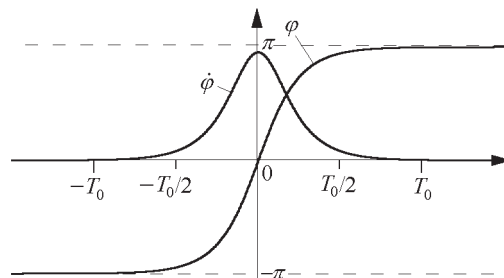


Рис. 52: Графики движения маятника с энергией  $E = 2mga = E_{\max} = 4E_0$ .



Второе решение, соответствующее вращению маятника по часовой стрелке (т. е. движению вдоль второй ветви сепаратрисы в фазовой плоскости), можно получить из уравнения (163) преобразованием обращения времени, т. е. заменой  $t \rightarrow -t$ . Решения, соответствующие другим начальным условиям, можно получить из уравнения (163) простым сдвигом начала отсчета времени (т. е. заменой  $t$  на  $t - t_0$ ).

Чтобы получить зависимость угловой скорости от времени  $\dot{\varphi}(t)$  для лимитационного движения маятника в отсутствие трения, можно выразить  $\cos(\varphi/2)$  в уравнении (163) следующим образом:

$$\cos(\varphi/2) = \frac{1}{\cosh(\omega_0 t)}.$$

После подстановки этого значения в (161) получаем:

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (164)$$

Эта зависимость угловой скорости от времени  $\dot{\varphi}(t)$  для лимитационного движения также показана на рис. 52. График  $\dot{\varphi}(t)$  имеет вид уединенного импульса. Характеристическая ширина его профиля, т. е. продолжительность импульса скорости, по порядку величины равна  $1/\omega_0$ . Это значит, что время, необходимое маятнику для прохождения почти полного кругового пути в лимитационном движении, из окрестности перевернутого положения через нижнее положение равновесия вновь почти до перевернутого положения, по порядку величины равно периоду малых колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . В самом деле, для моментов времени  $t = T_0/2$  по обе стороны от пика значение угловой скорости, как следует из (164), составляет лишь  $0.17\omega_0$ . Используя аналитическое выражение (163) для  $\varphi(t)$ , можно точно рассчитать промежуток времени  $\tau$ , в течение которого маятник проходит через нижнее положение равновесия от одного горизонтального положения ( $\varphi = -\pi/2$ ) до другого ( $\varphi = \pi/2$ ):  $\tau = 0.28 T_0$ . На протяжении этого промежутка времени кинетическая энергия маятника больше потенциальной. Поэтому время  $\tau$  равно полуширине (ширине на половине высоты) одиночного импульса на графике кинетической энергии для лимитационного движения.

На крыльях графика  $\dot{\varphi}(t)$ , т. е. при  $t \rightarrow \pm\infty$ , угловая скорость спадает экспоненциально. В самом деле, при больших положительных значениях  $t$  в знаменателе выражения (164) можно пренебречь вторым слагаемым  $\exp(-\omega_0 t)$ , что дает

$$\dot{\varphi}(t) \approx \pm 4\omega_0 e^{-\omega_0 t}. \quad (165)$$

Таким образом, в случае лимитационного движения, когда полная энергия маятника в точности равна высоте потенциального барьера  $2mga$ , скорость маятника неограниченно уменьшается по мере его приближения к перевернутому положению. Маятник асимптотически движется к неустойчивому равновесию, затрачивая на это движение бесконечно большое время. Значит, при  $E = 2mga$  движение консервативного маятника не будет периодическим.

Если энергия маятника близка к значению  $2mga$ , его движение почти всюду будет очень мало отличаться от лимитационного. Графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  для движений маятника с энергией, немного меньшей и немного большей  $2mga$ , показаны на рис. 53.

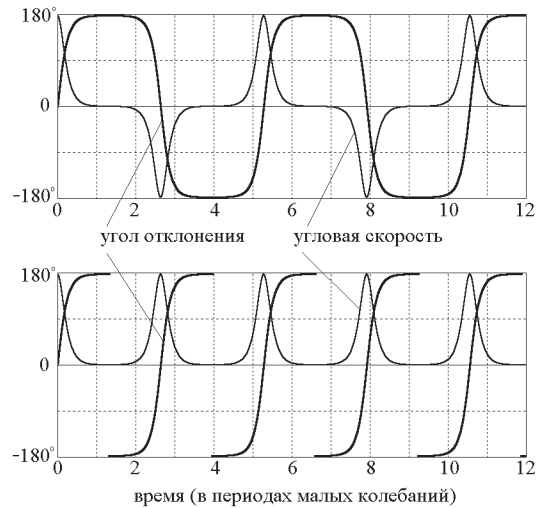


Рис. 53: Графики  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  при колебаниях и переворотах консервативного маятника с энергией, близкой к значению  $2mga$ .

Заметные отличия в характере движения проявляются лишь в непосредственной близости перевернутого положения, для достижения которого при  $E = 2mga$  потребовалось бы бесконечно большое время. Если энергия превышает  $2mga$  на сколь угодно малую величину, маятник достигнет перевернутого положения за конечное время и будет продолжать движение далее в прежнем направлении, набирая скорость по мере приближения к нижнему положению. Если же энергия меньше, чем  $2mga$ , маятник за конечное время достигнет точки своего максимального отклонения, и затем начнет двигаться обратно. И в том, и в другом случае движение маятника периодическое, причем его период неограниченно возрастает при  $E \rightarrow 2mga$ . Рис. 54 показывает зависимость периода колебаний и вращений от полной энергии  $T(E)$ , полученную с помощью компьютерного моделирования.

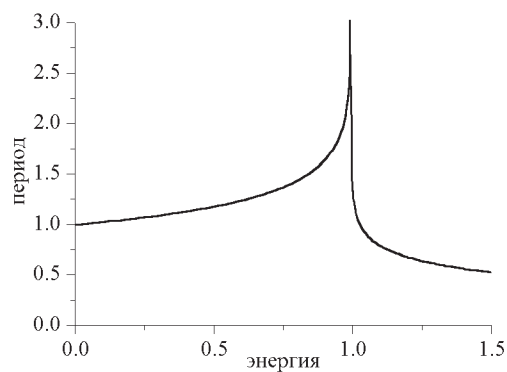


Рис. 54: Период как функция полной энергии  $E$  для колебаний и переворотов маятника в отсутствие трения.

Начальный участок графика показывает почти линейный рост периода с энергией, что соответствует приближенной формуле 160, так как при малых колебаниях

полная энергия маятника приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды:  $E \sim \varphi_m^2$ .

Рассмотренные выше математические соотношения, относящиеся к лимитационному движению маятника, играют важную роль в современной физике, в частности, в теории солитонов (уединенных волновых импульсов, распространяющихся в нелинейной среде с дисперсией).

## 16.4 Средние значения потенциальной и кинетической энергий

Малые колебания маятника почти синусоидальны, и средние за период значения потенциальной и кинетической энергий маятника равны. При колебаниях большого размаха, как уже отмечалось, маятник больше времени проводит на пологих склонах потенциальной ямы, поэтому в среднем потенциальная энергия преобладает над кинетической. В случае движения с энергией  $E \approx 2mga$ , рассмотренного в предыдущем разделе, большую часть периода маятник медленно движется в окрестности перевернутого положения, где потенциальная энергия имеет почти максимальное значение  $2mga = 2J\omega_0^2$ , и только на сравнительно короткое время, пока маятник быстро проходит нижнюю часть своего кругового пути, потенциальная энергия превращается в кинетическую.

Для теоретической оценки отношения средних за период значений потенциальной и кинетической энергий маятника при  $E \approx 2mga$  можно принять, что большую часть времени угловая скорость маятника практически равна нулю, а на протяжении сравнительно короткого времени движения угловая скорость  $\varphi(t)$  зависит от времени почти так же, как и при лимитационном движении, т. е. в соответствии с (164). Поэтому для острого импульса кинетической энергии на графике  $E_{\text{kin}}(t)$  можно взять аналитическую зависимость от времени, характерную для лимитационного движения. Так как крылья этого импульса спадают экспоненциально, среднее за период значение кинетической энергии можно вычислять, распространяя пределы интегрирования до  $\pm\infty$ :

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\varphi}^2(t) dt \approx \frac{J}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}^2(t) dt = \frac{J}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi. \quad (166)$$

Здесь учтено, что на период колебаний  $T$  приходятся два импульса кинетической энергии. Интегрирование по времени в (166) заменено интегрированием по углу отклонения. Из (166) следует, что средняя кинетическая энергия  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  в этом движении пропорциональна площади  $S$  фазовой плоскости, ограниченной сепаратрисой:  $2\langle E_{\text{kin}} \rangle = JS/T$ . Для  $\dot{\varphi}(\varphi)$  можно воспользоваться выражением (161), справедливым для движения по сепаратрисе:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{J}{T} 2\omega_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{4}{\pi} J\omega_0^2 \frac{T_0}{T}. \quad (167)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом движении полная энергия  $E$  приблизительно равна  $2mga = 2J\omega_0^2$  и что  $E_{\text{pot}} = E - E_{\text{kin}}$ , для отношения средних энергий получаем:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{2J\omega_0^2}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} - 1 = \frac{\pi T}{2 T_0} - 1. \quad (168)$$

В случае  $\varphi_m = 179.99^\circ$  период колебаний равен  $6.83 T_0$ . Из (166) находим, что при колебаниях с такой амплитудой отношение средней потенциальной энергии маятника к средней кинетической энергии равно 9.7.

## 16.5 Влияние трения на фазовый портрет маятника

При наличии вязкого трения фазовый портрет маятника претерпевает качественные изменения. Становится другой топология фазовых траекторий — сравните рисунки 55 и 50.

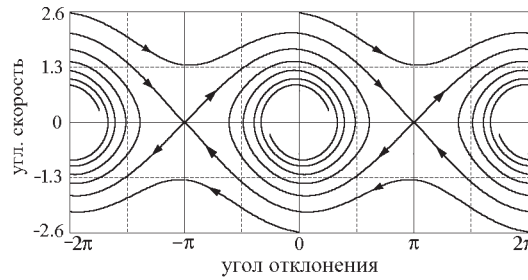


Рис. 55: Фазовый портрет маятника с трением.

Проходящая выше сепаратрисы фазовая траектория, соответствующая вращению маятника против часовой стрелки, с каждым проходом (с каждым оборотом маятника) снижается и приближается к сепаратрисе. Траектория, которая у консервативного маятника проходила вдоль верхней ветви сепаратрисы, теперь не достигает седловой точки  $(\pi, 0)$ , и превращается в спираль, навивающуюся на фокус, расположенный в начале координат. Внутренняя часть этой спирали, соответствующая малым затухающим колебаниям, подобна фазовой траектории линейного осциллятора с вязким трением.

## Рекомендуемая литература

1. Горелик Г.С. Колебания и волны (третье издание). М., «Физматлит», 2007 (стр. 64–69).
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971 (стр. 220–227, стр. 251–252).
3. Бутиков Е.И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. Спб, 2005. (стр. 35–60).
4. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. М., «Наука», 1978 (стр. 23–28).

# 17 Параметрическое возбуждение колебаний

## Содержание темы

Вынужденные и параметрические колебания. Особенности параметрического резонанса. Энергетические превращения. Порог резонанса и параметрическая регенерация. Частотные интервалы параметрической неустойчивости.

### 17.1 О классификации колебаний

В соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу их возбуждения колебания называют *вынужденными*, если осциллятор подвержен периодическому внешнему воздействию, влияние которого на осциллятор можно выразить в дифференциальном уравнении отдельным членом, имеющим вид заданной периодической функции времени. Более сложен для изучения случай параметрического возбуждения колебаний, когда внешнее воздействие выражается в периодическом изменении (модуляции) какого-либо параметра системы. Пусть, например, при отклонении от положения равновесия возникает восстанавливающая сила  $F = -kx$ , но в отличие от стационарного случая параметр  $k$  в результате какого-либо периодического воздействия изменяется со временем:  $k = k(t)$ . В дифференциальном уравнении такой системы,

$$m\ddot{x} = -k(t)x, \quad (169)$$

коэффициент при  $x$  не постоянен: он явно зависит от времени. Колебания в такой системе существенно отличаются как от собственных колебаний в системе, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами, так и от вынужденных колебаний под действием внешней силы, зависящей только от времени.

В случае периодического изменения параметра  $k$ , когда  $k(t + T) = k(t)$ , где  $T$  — период, дифференциальное уравнение (169) называется *уравнением Хилла*. Колебания в системе, описываемой уравнением Хилла, называются параметрически возбуждаемыми или просто *параметрическими*. Когда колебательный процесс, вызываемый периодической модуляцией какого-либо параметра, принимает нарастающий характер, говорят о *параметрическом резонансе*. В случае параметрического резонанса состояние равновесия системы становится неустойчивым и уход из него имеет характер колебаний с прогрессивно растущей амплитудой.

Широко известный пример параметрического резонанса — раскачивание на качелях, когда размах колебаний нарастает при периодических приседаниях и выпрямлениях ног качающегося. Здесь по сути дела происходит периодическое изменение момента инерции (а тем самым и приведенной длины) физического маятника, каковым являются качели вместе с находящимся на них человеком.

Параметрическое возбуждение возможно в любых колебательных системах. Например, в колебательном  $LCR$ -контуре из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора можно возбудить колебания, изменяя емкость конденсатора периодическим сближением и разведением его пластин, либо изменяя индуктивность катушки периодическим вдвиганием и выдвиганием сердечника. Наиболее интенсивные колебания возбуждаются в том случае,

когда цикл таких изменений повторяется два раза за один период собственных колебаний в контуре, т. е. когда частота модуляции параметра вдвое превышает собственную частоту системы.

Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров системы (емкости  $C$  или индуктивности  $L$  в случае колебательного контура, жесткости пружины или инертности ротора в случае механического осциллятора). Модуляция сопротивления  $R$  или коэффициента затухания может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может привести к их нарастанию.

## 17.2 Особенности параметрического резонанса

По ряду признаков параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса, вызываемого прямым силовым воздействием на колебательную систему. Параметрический резонанс наступает при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра и собственной частотой возбуждаемой системы, отличных от характерного для обычного резонанса соотношения между частотой внешнего воздействия и собственной частотой системы. Параметрический резонанс, в отличие от обычного резонанса, представляет собой *пороговый эффект*, так как при наличии трения он возможен при достаточно большой амплитуде изменения параметра, превосходящей некоторое пороговое значение.

Далее параметрическое возбуждение рассматривается на примере крутильных колебаний механического торсионного пружинного осциллятора. Параметрическое возбуждение колебаний обеспечивается периодическими изменениями (модуляцией) момента инерции ротора (маховика) пружинного осциллятора. Схематическое изображение торсионного осциллятора показано на рис. 56. Ротор осциллятора представляет собой стержень с двумя одинаковыми грузами, который может поворачиваться вокруг оси, проходящей через его середину. При повороте ротора прикрепленная к нему спиральная пружина создает восстанавливающий момент, пропорциональный углу закручивания. Второй конец пружины закреплен неподвижно. В положении равновесия стержень ротора одним из своих концов указывает на нулевое деление шкалы.

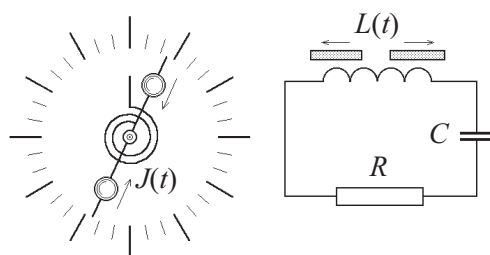


Рис. 56: Схематическое изображение торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью.

Грузы ротора можно одновременно сдвигать вдоль стержня в противоположных направлениях так, что центр масс системы остается на оси вращения. При таком

смещении грузов изменяется момент инерции ротора: момент инерции возрастает при раздвигании грузов (при удалении от оси вращения) и убывает при приближении грузов к оси ротора. Изменение момента инерции ротора приводит к изменению частоты собственных крутильных колебаний осциллятора. Принудительными периодическими перемещениями грузов вдоль стержня туда и обратно создается модуляция момента инерции, необходимая для параметрического возбуждения крутильных колебаний осциллятора. В данной модели предполагается модуляция момента инерции по прямоугольному кусочно-постоянному закону, когда перемещения грузов вдоль стержня происходят скачкообразно. Вызванные смещениями грузов резкие, почти мгновенные увеличения и уменьшения момента инерции ротора происходят поочередно через равные промежутки времени. Обозначим эти промежутки через  $T/2$ , так что  $T$  — это полный период изменений момента инерции (*период модуляции*).

Такие принудительные изменения параметра, описываемые прямоугольной зависимостью от времени, могут вызвать заметное раскачивание ротора при условии, что период модуляции выбран должным образом. Предположим, например, что грузы приближаются к оси ротора в момент, когда ротор проходит через положение равновесия и имеет почти максимальную угловую скорость. При скачкообразном радиальном смещении грузов момент импульса ротора остается прежним. Поэтому результирующее уменьшение момента инерции сопровождается увеличением угловой скорости ротора, и ротор получает дополнительную энергию. Чем больше была угловая скорость ротора, тем значительнее возрастание его кинетической энергии. Эта дополнительная энергия поставляется источником, вызывающим модуляцию параметра, т. е. принудительные радиальные перемещения грузов вдоль стержня.

С другой стороны, когда грузы мгновенно раздвигаются в стороны от оси вращающегося ротора, угловая скорость вращения ротора и его кинетическая энергия уменьшаются. При этом энергия передается назад от ротора источнику модуляции. Чтобы приращения энергии происходили регулярно и в целом превышали энергию, возвращаемую источнику, систематически «подпитывая» ротор энергией, период и фаза модуляции момента инерции должны удовлетворять определенным условиям.

Пусть, например, грузы сдвигаются к оси вращения и затем раздвигаются в прежние положения дважды на протяжении одного среднего периода собственных колебаний. Пусть также грузы придвигаются к оси вращения в моменты, когда угловая скорость ротора максимальна. Тогда их возвращение в прежние положения придется на момент почти максимального отклонения от равновесия, когда угловая скорость ротора близка к нулю. Такие фазовые соотношения выполняются для колебаний, графики которых показаны на рис. 57.

Напомним, что угловая скорость ротора возрастает при сближении грузов и убывает при их раздвижении, и эти изменения скорости пропорциональны самой скорости. Но поскольку в момент раздвижения грузов угловая скорость ротора близка к нулю, такое раздвижение не вызывает практически никакого изменения угловой скорости и кинетической энергии ротора. Таким образом, модуляция момента инерции с периодом, вдвое меньшим собственного среднего периода осциллятора, приводит к максимально возможному росту амплитуды при условии, что фаза модуляции выбрана так, как описано выше.

Очевидно, что эффективный рост энергии осциллятора возможен не только то-

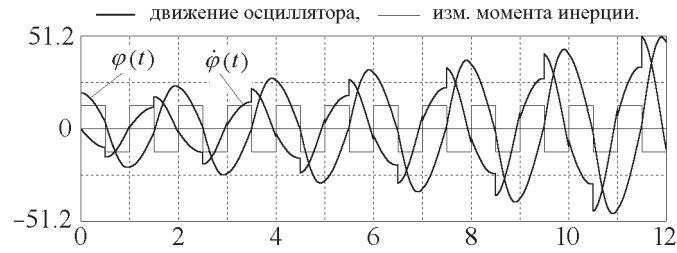


Рис. 57: Графики угла отклонения и угловой скорости при параметрическом возбуждении колебаний модуляцией момента инерции осциллятора по кусочно-постоянному закону.

гда, когда два полных цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний, но также когда два цикла модуляции происходят на протяжении трех, пяти или другого нечетного числа периодов собственных колебаний.

Ниже будет показано, что возрастание энергии осциллятора, хотя и менее значительное, может происходить и тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на протяжении четного числа периодов собственных колебаний.

Если принудительные изменения параметра совершаются с указанной выше периодичностью, но не скачкообразно, их влияние на осциллятор качественно оказывается аналогичным, хотя эффективность вложения энергии (при той же амплитуде модуляции параметра) максимальна при модуляции по прямоугольному закону, потому что именно такой закон модуляции может обеспечить наиболее оптимальные условия передачи энергии осциллятору. Случай плавной (синусоидальной) модуляции параметра важен для практических приложений.

Ниже мы рассмотрим более строгий математический подход к описанию параметрического резонанса, вызываемого кусочно-постоянной модуляцией параметра по прямоугольному закону.

### 17.3 Порог параметрического возбуждения

Для оценки глубины модуляции, соответствующей порогу параметрического возбуждения, можно воспользоваться соображениями, основанными на законе сохранения энергии. Прежде всего рассчитаем приращение кинетической энергии ротора, происходящее при скачкообразном смещении грузов в направлении оси вращения, когда момент инерции ротора уменьшается от значения  $J_1 = J_0(1 + m)$  до  $J_2 = J_0(1 - m)$ . Ограничимся случаем малых значений глубины модуляции  $m$  ( $m \ll 1$ ). При радиальном смещении грузов момент импульса ротора  $L = J\omega = J\dot{\varphi}$  остается неизменным:  $J_1\dot{\varphi}_1 = J_2\dot{\varphi}_2$ , откуда для отношения угловых скоростей до и после изменения момента инерции получаем  $\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1 = J_1/J_2 = (1 + m)/(1 - m)$ . Для происходящего при этом приращения  $\Delta E$  кинетической энергии ротора  $E_{\text{kin}} = J\dot{\varphi}^2/2 = L^2/2J$  можно написать:

$$\Delta E = \frac{L^2}{2J_0} \left( \frac{1}{1 - m} - \frac{1}{1 + m} \right) \approx 2mE_{\text{kin}} \quad (\text{для } m \ll 1). \quad (170)$$



Когда такое событие происходит вблизи положения равновесия ротора, т. е. в момент, когда полная энергия осциллятора  $E$  практически совпадает с кинетической энергией ротора  $E_{\text{kin}}$ , из выражения (170) следует, что относительное приращение полной энергии  $\Delta E/E$  при однократном сближении грузов примерно равно удвоенному значению глубины модуляции  $m$ :  $\Delta E/E \approx 2m$ .

Если период и фаза модуляции имеют те значения, что наиболее благоприятны для эффективной передачи энергии осциллятору, скачкообразное смещение грузов назад к концам стержня происходит в тот момент, когда ротор находится в положении наибольшего отклонения (точнее, очень близок к этому положению). В этот момент угловая скорость и кинетическая энергия ротора имеют почти нулевые значения, и поэтому обратное радиальное смещение грузов в прежние положения к концам стержня почти не приводит к уменьшению энергии осциллятора.

В случае основного параметрического резонанса (резонанса 1-го порядка  $n = 1$ ) вложение энергии происходит дважды на протяжении одного периода  $T_0$  собственных колебаний. Таким образом, относительное приращение энергии  $\Delta E/E$  за один период колебаний составляет приблизительно  $4m$ . Процесс, в котором приращение энергии  $\Delta E$  за период пропорционально запасенной энергии  $E$  ( $\Delta E \approx 4mE$ ), характеризуется экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t). \quad (171)$$

В данном случае показатель роста  $\alpha$  пропорционален глубине модуляции  $m$  момента инерции:  $\alpha = 4m/T_0$ . В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс ( $T = T_0/2$ ) уменьшение энергии осциллятора происходит главным образом из-за трения. Рассеяние энергии при линейном (пропорциональном скорости) трении дается следующим выражением (см. комментарии к теме «Собственные колебания линейного осциллятора»):

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (172)$$

Для относительного уменьшения  $\Delta E/E$  механической энергии из-за трения за промежуток времени, равный целому числу периодов колебаний, выражение (172) дает  $\Delta E/E \approx -2\gamma t$ . Приравнявая найденное выше относительное увеличение энергии  $4m$  за период, вызванное прямоугольной модуляцией момента инерции, относительному уменьшению энергии из-за трения  $2\gamma T_0$ , получаем следующее пороговое (минимальное) значение  $m_{\text{min}}$  глубины модуляции, соответствующее основному ( $n = 1$ ) параметрическому резонансу:

$$m_{\text{min}} = \gamma T_0/2 = \pi/(2Q). \quad (173)$$

График угловой скорости и фазовая траектория колебаний, происходящих в условиях порога параметрического возбуждения, приведены на рис. (58). Такой режим стационарных колебаний, амплитуда которых остается неизменной несмотря на диссипацию энергии, называется *параметрической регенерацией*. Стационарный характер колебаний оказывается возможным благодаря тому, что потери энергии из-за трения в среднем компенсируются поступлением энергии от источника, который приводит в движение грузы вдоль стержня, обеспечивая периодическую модуляцию момента инерции ротора.

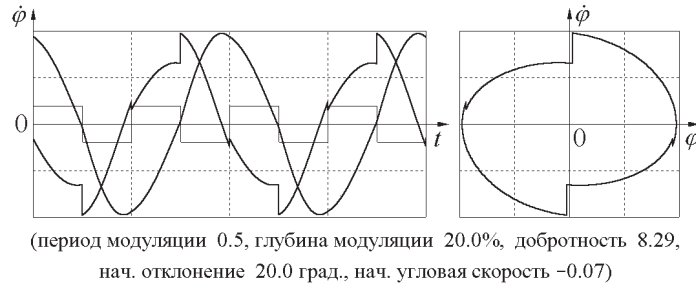


Рис. 58: Графики и фазовая траектория стационарных колебаний в условиях порога  $m = \pi/2Q$  при  $T \approx T_0/2$ .

Для резонанса третьего порядка, когда  $T = 3T_0/2$ , пороговое значение глубины модуляции в три раза больше, чем для основного резонанса:  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ . В этом случае два цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех полных периодов собственных колебаний. Радиальные перемещения грузов вдоль стержня ротора здесь также происходят в моменты, наиболее благоприятные для передачи энергии осциллятору, поэтому то же самое вложение энергии происходит в течение втрое большего интервала времени, чем в случае основного резонанса.

Если глубина модуляции превосходит пороговое значение, энергия осциллятора растет со временем экспоненциально. Рост энергии и здесь описывается уравнением (171). Однако теперь показатель скорости роста энергии  $\alpha$  определяется превышением энергии, сообщаемой осциллятору благодаря модуляции параметра, над потерями энергии из-за трения за то же время:  $\alpha = 4m/T_0 - 2\gamma$ . Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний тоже экспоненциально растет со временем:  $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$ . Показатель  $\beta$  скорости роста амплитуды равен половине показателя скорости роста энергии. В условиях основного резонанса, когда вложения энергии происходят дважды на протяжении периода собственных колебаний, для показателя скорости роста амплитуды получаем  $\beta = 2m/T_0 - \gamma = m\omega_0/\pi - \gamma$ .

Графики экспоненциального роста колебаний в условиях основного резонанса показаны на рис. 57 на стр. 161, а также на рис. 59 вместе с фазовой траекторией. Затухающим собственным колебаниям на интервалах постоянства момента инерции соответствуют участки фазовой траектории в виде отрезков спиралей, скручивающихся к фокусу. Вертикальные сегменты соответствуют скачкообразным изменениям угловой скорости в моменты радиальных смещений грузов ротора. В совокупности образуется раскручивающаяся фазовая траектория, соответствующая нарастающим колебаниям.

## 17.4 Дифференциальное уравнение параметрических колебаний

Допустим, что периодические изменения момента инерции ротора  $J$  происходят по прямоугольному кусочно-постоянному закону. Пусть максимальное и минимальное значения момента инерции равны соответственно  $J_1 = J_0(1 + m)$  и  $J_2 = J_0(1 - m)$ , где  $J_0$  — значение момента инерции при некотором среднем положении

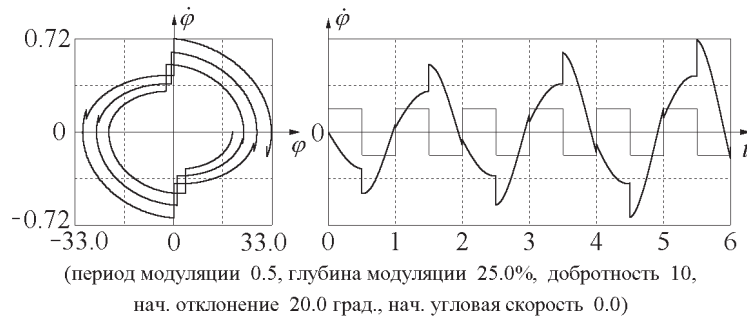


Рис. 59: Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в условиях основного параметрического резонанса ( $n = 1$ ).

грузов на стержне, а  $m$  – глубина модуляции. На протяжении интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$  значение момента инерции постоянно, и движение ротора может рассматриваться как свободное колебание, описываемое линейным дифференциальным уравнением. Однако коэффициенты в этом уравнении различны для соседних интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$ :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1+m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } 0 < t < T/2, \quad (174)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1-m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } T/2 < t < T. \quad (175)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{D/J_0}$  – собственная частота осциллятора, а  $\gamma$  – постоянная затухания, характеризующая интенсивность вязкого трения в системе. Обе эти величины относятся к среднему значению момента инерции  $J_0 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)$ . Для малых и умеренных значений  $m$  момент инерции равен  $J_0$ , когда грузы находятся приблизительно на полпути между их крайними положениями на стержне ротора. При больших  $m$  это не так, потому что момент инерции определяется квадратом расстояния грузов от оси вращения ротора.

Для интервалов постоянства момента инерции дифференциальные уравнения (174) – (175) линейны и имеют точные аналитические решения. Развиваемый ниже теоретический подход опирается на «сшивание» этих решений в моменты скачкообразных изменений параметра, когда мы должны совершить переход от одного из этих линейных уравнений к другому. Уравнения (174) – (175) сменяют друг друга в моменты времени  $t = nT/2$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Начальные условия для каждого промежутка выбираются в соответствии с принятой физической моделью следующим образом. Каждое начальное значение угла отклонения  $\varphi$  берется равным углу  $\varphi(t)$ , достигнутому ротором к концу предшествующего промежутка времени. Начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}$  связана с угловой скоростью в конце предыдущего интервала времени законом сохранения момента импульса:

$$(1+m)\dot{\varphi}_1 = (1-m)\dot{\varphi}_2. \quad (176)$$

В уравнении (176)  $\dot{\varphi}_1$  – угловая скорость в конце предшествующего интервала времени, на протяжении которого момент инерции ротора был равен  $J_1 =$

$J_0(1 + m)$ , а  $\dot{\varphi}_2$  — начальное значение для следующего интервала, на протяжении которого момент инерции равен  $J_2 = J_0(1 - m)$ . Изменение угловой скорости при следующем скачкообразном изменении момента инерции от значения  $J_2$  до  $J_1$  можно рассчитать точно так же.

Применение закона сохранения момента импульса для нахождения выражаемой формулой (176) связи угловой скорости до и после изменения момента инерции здесь допустимо, несмотря на то, что вращение маховика, строго говоря, не является свободным: на него действует момент силы упругости пружины. Действительно, влиянием пружины можно пренебречь, если перемещение грузов вдоль стержня ротора происходит за время, значительно меньшее периода собственных колебаний. В принятой модели физической системы предполагается, что это перемещение грузов происходит мгновенно.

На протяжении каждой половины периода модуляции  $T/2$  вращение ротора осциллятора описывается линейным дифференциальным уравнением (174) или (175). Таким образом, это движение представляет собой отрезок некоторого гармонического или затухающего колебания. График такого движения на отдельном интервале постоянства момента инерции — это отрезок синусоиды (или затухающей синусоиды). Аналитическое исследование параметрического возбуждения колебаний при кусочно-постоянной модуляции параметра можно выполнять «сшиванием» («припасовкой» по выражению академика Л. И. Мандельштама) известных решений линейных уравнений для последовательных интервалов времени.

## 17.5 Частотные интервалы параметрической неустойчивости

Обычно аналитическое исследование проблемы параметрического резонанса ограничивается определением интервалов частоты модуляции  $\omega$  при заданной глубине модуляции  $m$ , в пределах которых состояние покоя в положении равновесия становится неустойчивым. В таких *интервалах неустойчивости* сколь угодно малого отклонения от состояния покоя уже достаточно для того, чтобы колебания нарастали прогрессивно со временем. Задача состоит в том, чтобы для любого заданного значения глубины модуляции  $m$  определить те интервалы частоты модуляции  $\omega$  в окрестности значений  $\omega_n = 2\omega_0/n$ , в пределах которых возможен параметрический резонанс, т. е. колебания с нарастающей амплитудой. Границы этих интервалов можно находить как те частоты модуляции, при которых существуют стационарные решения уравнений (174) — (175), описывающие колебания неизменной амплитуды.

Интервалы неустойчивости для первых пяти параметрических резонансов показаны на диаграмме рис. 60 для разных значений глубины модуляции  $m$ . Диаграмма получена численным решением обсуждавшихся выше уравнений. Отметим, насколько узки интервалы для резонансов четных порядков ( $n = 2, 4$ ) при малых значениях  $m$ . С ростом  $m$  эти интервалы расширяются и становятся сравнимыми с интервалами нечетных порядков.

Из диаграммы на рис. 60 видно, что для некоторых значений глубины модуляции  $m$  обе границы интервалов с  $n > 2$  совпадают (можно считать, что при таких  $m$  они *пересекаются*). Это значит, что при таких значениях глубины модуляции соответствующие интервалы параметрического возбуждения исчезают. Этому исчезновению интервалов параметрического возбуждения можно дать простое физи-

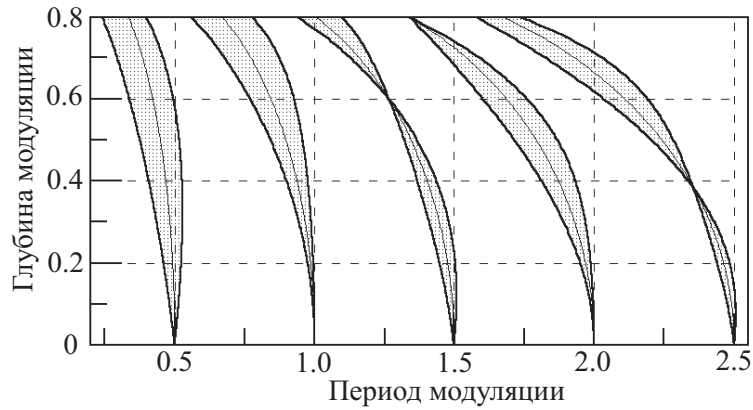


Рис. 60: Интервалы параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции момента инерции в отсутствие трения.

ческое объяснение, если обратить внимание на соотношение периодов собственных колебаний  $T_1$  и  $T_2$  (при раздвинутых и сдвинутых грузах) для соответствующих значений  $m$ . Оказывается, что  $T_1$  и  $T_2$  относятся как 2:1, 3:1, и 3:2. В случае первого пересечения (с отношением собственных периодов 2:1) за первую половину цикла модуляции происходит ровно половина собственного колебания ротора с периодом  $T_1$ , а за вторую — целое колебание с периодом  $T_2$  (три полных собственных колебания за один цикл модуляции). Ясно, что в таких условиях модуляции процесс колебаний будет периодическим всегда, при любых начальных условиях. Следовательно, для соответствующих значений глубины модуляции  $m$  и периода модуляции  $T$  не будет ни роста, ни убывания амплитуды: при любых начальных условиях происходят стационарные колебания.

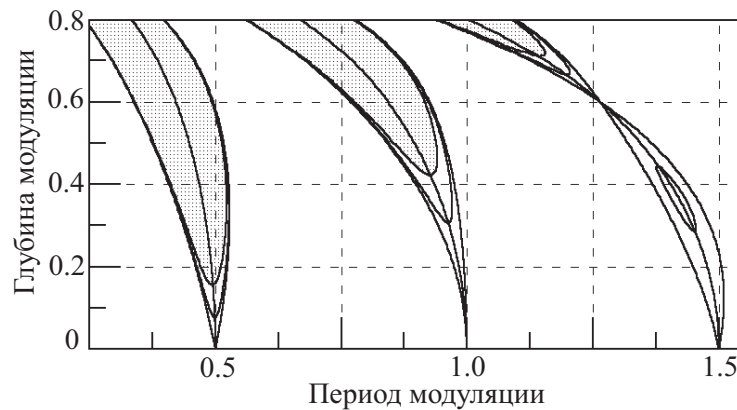


Рис. 61: Интервалы параметрического возбуждения для первых трех резонансов при модуляции момента инерции (в отсутствие трения, для  $Q = 20$  и для  $Q = 10$ ).

При наличии трения в системе интервалы параметрического резонанса становятся уже и при достаточно сильном трении исчезают совсем. Когда глубина модуляции  $m$  равна пороговому значению  $m_{\min}$ , соответствующий интервал параметрического возбуждения исчезает.

Диаграмма на рис. 61 показывает границы первых трех интервалов параметрического резонанса в отсутствие трения, для  $Q = 20$ , и для  $Q = 10$ . Обратите внимание на «островок» параметрического резонанса для  $n = 3$  и  $Q = 20$ . Этот резонанс пропадает, когда глубина модуляции достигает значения 45% и появляется снова, когда  $m$  превышает примерно 66%.

Для каждого данного значения глубины модуляции  $m$  могут существовать лишь несколько первых интервалов параметрического возбуждения, для которых  $m$  превышает пороговое значение.

Подчеркнем еще раз, что даже в том случае, когда положение равновесия системы неустойчиво вследствие периодической модуляции параметра (т. е. когда выполняются необходимые условия для возбуждения параметрического резонанса), осциллятор будет оставаться в покое в положении равновесия, если заданы нулевые начальные условия, т. е.  $\varphi(0)$  и  $\dot{\varphi}(0)$  в точности равны нулю. В этом заключается одно из отличий параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях, для которого амплитуда растет даже при нулевых начальных условиях. Для возбуждения параметрического резонанса, кроме выполнения условия превышения порога, в системе должны обязательно существовать хотя бы слабые собственные колебания. В реальных системах такие колебания всегда существуют из-за флуктуаций.

В линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний неограниченно растет со временем по экспоненциальному закону. В противоположность случаю вынужденных колебаний, вязкое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе. В реальных системах рост амплитуды ограничивается нелинейными явлениями, приводящими к зависимости периода собственных колебаний от амплитуды. По мере роста амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний изменяется собственный период колебаний и поэтому нарушаются условия резонанса. Рост амплитуды сменяется ее уменьшением. При малых амплитудах условия резонанса восстанавливаются, и амплитуда снова начинает расти. При наличии трения такие переходные биения в нелинейной системе постепенно затухают, и устанавливается стационарный режим колебаний с конечной амплитудой.

## 17.6 Параметрические колебания при плавной модуляции

Общие характеристики параметрического возбуждения колебаний в линейной системе, а также условия возникновения и отличительные особенности параметрического резонанса были рассмотрены выше на примере прямоугольной кусочно-постоянной модуляции параметра. С точки зрения практических приложений более важен случай плавной модуляции момента инерции. Такая модуляция может осуществляться в изучаемой модели при синусоидальном принудительном перемещении грузов в радиальном направлении вдоль стержня ротора.

Чтобы обеспечить рост энергии осциллятора и параметрическое возбуждение колебаний при плавной модуляции момента инерции, движение грузов в направлении оси ротора должно в целом происходить при большей угловой скорости ротора, чем обратное движение грузов к концам стержня от оси вращения. В сравнении с прямоугольной кусочно-постоянной модуляцией, плавная модуляция менее эффективна для передачи энергии осциллятору, так как радиальные перемещения

грузов здесь растянуты во времени, в то время как при прямоугольном законе модуляции эти перемещения могут происходить в оптимальные (с точки зрения обмена энергией) моменты времени.

Пусть принудительное радиальное движение грузов вдоль стержня синусоидальное, т. е. их расстояние  $l$  от оси вращения изменяется в соответствии с выражением:

$$l(t) = l_0(1 + \tilde{m} \sin \omega t). \quad (177)$$

Здесь  $l_0$  — среднее расстояние грузов от оси вращения, а  $\tilde{m}$  — безразмерная амплитуда их гармонического движения вдоль стержня ( $\tilde{m} < 1$ ). Из (177) следует, что грузы движутся относительно стержня со скоростью, изменяющейся со временем как  $\cos \omega t$ :

$$v(t) = dl/dt = \omega l_0 \tilde{m} \cos \omega t. \quad (178)$$

Для простоты будем считать сам стержень очень легким, так что момент инерции ротора обусловлен только перемещаемыми вдоль него массивными грузами:  $J = 2Ml^2(t)$ . Изменение момента импульса  $J\dot{\varphi}(t)$  со временем описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) = -D\varphi, \quad (179)$$

где  $-D\varphi$  — приложенный к ротору восстанавливающий момент силы упругости. Подставляя в (179)  $l(t)$  из (177) и принимая во внимание выражение для частоты собственных колебаний через параметры осциллятора  $\omega_0^2 = D/J_0$  (здесь  $J_0 = 2Ml_0^2$  — момент инерции ротора при грузах в средних положениях), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt} [(1 + \tilde{m} \sin \omega t)^2 \dot{\varphi}] = -\omega_0^2 \varphi - 2\gamma \dot{\varphi}. \quad (180)$$

В правую часть уравнения (180) добавлен момент силы вязкого трения, пропорциональный угловой скорости ротора.

Отметим, что синусоидальное движение грузов вдоль стержня ротора, описываемое выражением (177), вообще говоря не обеспечивает синусоидальной модуляции момента инерции. Действительно, момент инерции  $J$  пропорционален квадрату расстояния  $l(t)$  грузов от оси вращения. Поэтому зависимость момента инерции  $J(t)$  от времени содержит вторую гармонику основной частоты  $\omega$  движения грузов. Только при малых значениях амплитуды  $\tilde{m}$  (когда  $\tilde{m} \ll 1$ ) модуляцию момента инерции ротора можно приближенно считать синусоидальной:

$$\begin{aligned} J(t) &= 2Ml^2(t) = 2Ml_0^2(1 + \tilde{m} \sin \omega t)^2 \approx \\ &2Ml_0^2(1 + 2\tilde{m} \sin \omega t) = J_0(1 + m \sin \omega t), \end{aligned} \quad (181)$$

где  $J_0 = 2Ml_0^2$  — среднее значение момента инерции, а  $m = 2\tilde{m}$  — глубина модуляции. Таким образом, при  $\tilde{m} \ll 1$  модуляция момента инерции почти синусоидальна, а ее глубина  $m$  вдвое больше безразмерной амплитуды  $\tilde{m}$  синусоидального движения грузов вдоль стержня ротора.

Если интересоваться только приближенным решением, справедливым в первом порядке по малому параметру  $\tilde{m}$ , то вместо точного дифференциального уравнения движения (180) можно решать следующее приближенное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(1 - 2\tilde{m} \sin \omega t)\varphi = 0. \quad (182)$$

Мы здесь пренебрегаем модуляцией коэффициента при  $\varphi$ , поскольку для возбуждения параметрического резонанса существенны периодические изменения во времени только энергоемких параметров (в механическом осцилляторе это момент инерции ротора и коэффициент жесткости пружины). Модуляция постоянной затухания  $\gamma$  не может привести к возбуждению колебаний.

Уравнение (182) при  $\gamma = 0$  представляет собой частный случай уравнения Хилла (169) (см. стр. 158) с синусоидальной зависимостью параметра  $k$  от времени. Оно называется уравнением Матье. Теория уравнения Матье подробно разработана, и все наиболее существенные свойства его решений хорошо известны. Полный анализ решений математически довольно сложен, и обычно ограничиваются нахождением областей значений частоты  $\omega$  и глубины модуляции  $\tilde{m}$ , в которых состояние покоя осциллятора в положении равновесия становится неустойчивым: достаточно сколь угодно малого отклонения от этого состояния, чтобы амплитуда появившихся малых колебаний стала прогрессивно нарастать со временем. Иначе говоря, для каждого значения глубины модуляции  $\tilde{m}$  из условия существования нарастающих во времени решений уравнения (182) определяют интервалы частоты модуляции (в окрестностях значений  $\omega_n = 2\omega_0/n$ ), в которых возможен параметрический резонанс, т. е. нарастающие колебания. Такая задача для линеаризованной системы с затуханием, описываемой уравнением (182), была решена еще в 1927 году А.А. Андроновым и М.А. Леонтовичем.

Отметим, что даже в случае неустойчивости состояния покоя в положении равновесия (т. е. при выполнении условий параметрического возбуждения), при строго равных нулю начальных значениях  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  они оставались бы равными нулю и в дальнейшем. Этим, в частности, параметрический резонанс отличается от обычного резонанса в вынужденных колебаниях, где возрастание амплитуды колебаний со временем происходит и при нулевых начальных условиях (из состояния покоя в положении равновесия).

Наиболее благоприятные условия для параметрического возбуждения колебаний складываются, когда грузы совершают два полных цикла принудительного радиального перемещения на протяжении одного периода собственных крутильных колебаний ротора. Другими словами, частота  $\omega$  синусоидального движения грузов в выражении (177) должна быть примерно вдвое больше средней частоты собственных колебаний ротора  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . (Здесь  $\omega_0$  — это частота колебаний ротора при условии, что грузы закреплены на нем на среднем расстоянии  $l_0$  от оси вращения.) Частота модуляции  $\omega$  в (177), равная удвоенному значению средней частоты собственных колебаний ( $\omega = 2\omega_0$ ), соответствует точной настройке на основной резонанс ( $n = 1$ ) при малых значениях безразмерной амплитуды  $\tilde{m}$ . Графики колебаний ротора при выполнении условий, оптимальных для вложения энергии, приведены на рис. 62.

Помимо определенного соотношения между частотой модуляции и собственной частотой, для параметрического возбуждения осциллятора необходимо, чтобы между крутильными колебаниями ротора и принудительными движениями грузов



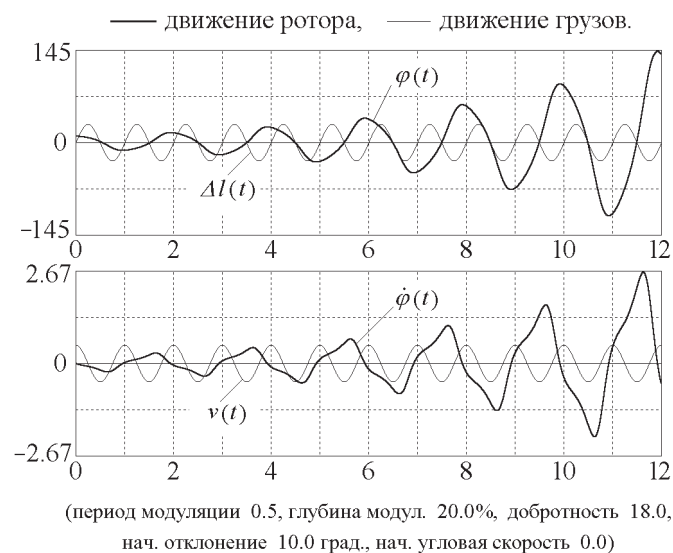


Рис. 62: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора при крутильных колебаниях, вызванных радиальным синусоидальным движением грузов с частотой  $\omega = 2\omega_0$  (основной параметрический резонанс).

выполнялись определенные фазовые соотношения: грузы должны двигаться в направлении оси вращения с максимальной скоростью в те моменты, когда максимальна величина угловой скорости ротора, совершающего крутильные колебания (т. е. когда ротор проходит вблизи своего положения равновесия). Порогу параметрического резонанса соответствует случай, когда потери энергии из-за трения как раз компенсируются вложением энергии, обусловленным принудительным периодическим движением грузов вдоль стержня.

## Рекомендуемая литература

1. Горелик Г.С. Колебания и волны (3-е издание). М., «Физматлит», 2007 (стр. 118–121).
2. Бутиков Е.И. Физика колебаний. Лаборатория компьютерного моделирования. Спб, 2005. (стр. 108–150).
3. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. М., «Наука», 1978 (стр. 129–143).

# **Приложение. Программа курса общей физики (Механика, 1 семестр)**

## **Тема 1. Введение. Принципы классической физики**

Введение. Место физики среди естественных наук. Соотношение эксперимента и теории в физике. Опыт как источник знаний и критерий истины. Эвристическая сила физических теорий. Границы применимости физических теорий. Принцип соответствия. Абстракции классической механики. Абсолютизация физического процесса (независимость от средств наблюдения) и возможность неограниченной детализации его описания. Соотношения неопределенностей и границы применимости классического описания. Роль математики в физике. Различие понятий, с которыми имеет дело чистая математика и экспериментальная наука. Физические модели и абстракции.

## **Тема 2. Пространство и время. Системы отсчета и системы координат**

Измерения промежутков времени и пространственных расстояний. Современные эталоны времени и длины. Классические (нерелятивистские) представления о пространстве и времени — предположения об абсолютном характере одновременности событий, промежутков времени и пространственных расстояний. Свойства пространства и времени. Однородность времени. Однородность и изотропность пространства. Классические (нерелятивистские) представления о пространстве и времени — предположения об абсолютном характере одновременности событий, промежутков времени и пространственных расстояний. Соотношение евклидовой геометрии и геометрии реального физического пространства.

Система отсчета. Системы координат. Связь цилиндрических и сферических координат с декартовыми координатами. Элемент длины в криволинейных координатах. Единичные векторы (орты) для декартовых, цилиндрических и сферических координат. Преобразование координат точки при переходе от одной системы координат к другой.

## **Тема 3. Кинематика материальной точки**

Физические модели. Примеры идеализированных объектов и абстракций, используемых в физике. Материальная точка как физическая модель. Механическое движение и его описание. Предмет кинематики. Основные понятия кинематики материальной точки. Радиус-вектор. Перемещение. Траектория. Путь. Средняя скорость. Скорость. Вектор скорости как производная радиус-вектора. Направление вектора скорости и траектория. Годограф вектора скорости. Ускорение. Ускорение при криволинейном движении. Центр кривизны и радиус кривизны траектории. Разложение ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие.

Координатная форма описания движения. Определение скорости и ускорения по заданной зависимости координат от времени. Определение координат по заданной зависимости скорости от времени. Движение при наличии связей. Одномерное

криволинейное движение. Число степеней свободы механической системы.

#### **Тема 4. Основы классической динамики материальной точки**

Основы динамики. Первый закон Ньютона и его физическое содержание. Динамическая эквивалентность состояния покоя и движения с постоянной скоростью. Связь закона инерции с принципом относительности. Второй закон Ньютона. Сила и механическое движение. Физическая сущность понятия силы в механике. Силы разной физической природы и фундаментальные взаимодействия в физике. Свойства силы и способы измерения сил. Понятие инертной массы. Способы измерения массы. Физическое содержание второго закона Ньютона. Одновременное действие нескольких сил и принцип суперпозиции. Взаимодействие тел и третий закон Ньютона. Логическая схема законов Ньютона и разные возможности ее построения.

#### **Тема 5. Прямая и обратная задачи динамики.**

Интегрирование уравнений движения Второй закон Ньютона как основное уравнение динамики материальной точки. Понятие механического состояния. Прямая задача динамики — определение сил по известному движению. Нахождение закона тяготения из законов Кеплера. Обратная задача динамики — определение движения по известным силам и начальному состоянию. Примеры интегрирования уравнений движения (движение частицы в постоянном и в зависящем от времени однородном поле, движение в вязкой среде, движение заряженной частицы в однородном магнитном поле и в скрещенных электрическом и магнитном полях, движение под действием сил, зависящих от положения частицы — пространственный осциллятор и кулоново поле). Алгоритмы численного интегрирования уравнений движения. Движение материальной точки при наличии связей. Силы реакции идеальных связей.

#### **Тема 6. Измерения в физике. Физические величины и системы единиц. Анализ размерностей**

Измерения в физике. Требования к эталону физической величины. Единицы физических величин. Системы единиц в механике. Принципы построения систем единиц. Основные и производные единицы. Эталоны. Размерность физической величины. Метод анализа размерностей и его применения в физических задачах.

#### **Тема 7. Предпосылки и постулаты частной теории относительности**

Инерциальные системы отсчета. Физическая эквивалентность инерциальных систем отсчета (принцип относительности). Преобразования Галилея и преобразование скорости. Ограниченный характер классических представлений о пространстве и времени. Принцип относительности и электродинамика. Экспериментальные факты, свидетельствующие об универсальном характере скорости света в ва-

кууме. Частная теория относительности – физическая теория пространства и времени. Постулаты теории относительности и их физическое содержание.

## **Тема 8. Релятивистская кинематика**

Измерение промежутков времени и пространственных расстояний с точки зрения теории относительности. Понятие события. Относительность одновременности событий. Синхронизация часов. Преобразование промежутков времени между событиями при переходе в другую систему отсчета. Собственное время. Экспериментальные подтверждения релятивистского закона преобразования промежутков времени. Относительность пространственных расстояний между событиями. Собственная длина. Лоренцево сокращение как следствие постулатов теории относительности. Релятивистский эффект Доплера. Преобразования Лоренца. Релятивистский закон преобразования скорости. Относительная скорость и скорость сближения. Аберрация света.

## **Тема 9. Преобразования Лоренца и следствия из них**

Преобразования Лоренца. Релятивистский закон преобразования скорости. Относительная скорость и скорость сближения. Аберрация света. Кинематические следствия преобразований Лоренца.

## **Тема 10: Геометрия пространства-времени**

Интервал между событиями. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Четырехмерное пространство-время Минковского. Световой конус. Мировые линии. Времениподобные и пространственноподобные интервалы между событиями. Причинность и классификация интервалов. Абсолютное прошлое, абсолютное будущее и абсолютно удаленное. Интерпретация относительности одновременности событий, относительности промежутков времени и расстояний с помощью диаграмм Минковского. Четырехвекторы в пространстве Минковского. Четырехмерный радиус-вектор события.

## **Тема 11. Основы релятивистской динамики**

Релятивистский импульс частицы. Релятивистская энергия. Кинетическая энергия и энергия покоя. Масса и энергия. Эквивалентность энергии и релятивистской массы. Энергия связи атомных ядер. Превращения энергии покоя в ядерных реакциях. Реакции деления тяжелых ядер и синтеза легких ядер. Связь энергии и импульса частицы. Преобразование энергии и импульса частицы при переходе в другую систему отсчета. Четырехвектор энергии-импульса частицы. Простые задачи релятивистской динамики. Движение частицы в однородном постоянном поле, движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

## **Тема 12. Импульс, момент импульса, энергия. Законы сохранения**

Импульс материальной точки и закон его изменения. Импульс силы. Момент импульса материальной точки. Момент силы. Закон изменения момента импульса. Сохранение момента импульса при движении частицы в центральном силовом поле. Секториальная скорость и закон площадей (второй закон Кеплера).

Понятие работы силы в механике. Свойства работы как физической величины. Мощность силы. Кинетическая энергия частицы. Работа полной силы и изменение кинетической энергии частицы. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия частицы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности. Связь силы и потенциальной энергии. Примеры потенциальных силовых полей. Механическая энергия материальной точки. Закон изменения механической энергии частицы при ее движении в потенциальном силовом поле.

Диссипативные и консервативные механические системы. Работа сил реакции идеальных связей. Связь сохранения механической энергии консервативной системы с обратимостью ее движения во времени и с однородностью времени. Примеры применения закона сохранения механической энергии в физических задачах.

## **Тема 13. Динамика системы материальных точек**

Центр масс системы. Импульс системы частиц. Связь импульса системы со скоростью центра масс. Внешние и внутренние силы. Закон изменения импульса системы. Сохранение импульса замкнутой системы взаимодействующих тел. Закон движения центра масс. Движение тела переменной массы. Уравнение Мещерского. Реактивное движение. Формула Циолковского. Идея многоступенчатых ракет.

Задача двух тел. Приведенная масса. Момент импульса системы тел. Связь моментов импульса системы в разных системах отсчета и относительно разных точек. Закон изменения момента импульса системы взаимодействующих тел. Моменты внутренних и внешних сил. Уравнение моментов относительно движущегося полюса. Сохранение момента импульса замкнутой системы.

Законы сохранения и принципы симметрии в физике. Связь законов сохранения для замкнутой системы тел со свойствами симметрии физического пространства. Сохранение импульса и однородность пространства. Сохранение момента импульса и изотропность пространства.

## **Тема 14. Энергия механической системы. Столкновения частиц**

Кинетическая энергия системы частиц. Разложение кинетической энергии системы на сумму кинетической энергии движения системы как целого и кинетической энергии движения относительно центра масс. Неупругие столкновения и кинетическая энергия относительного движения. Изменение кинетической энергии системы и работа всех сил, действующих на входящие в нее частицы.

Потенциальные силы взаимодействия между частицами системы. Работа внешних и внутренних потенциальных сил при изменении конфигурации системы. Потенциальная энергия частиц во внешнем поле и потенциальная энергия взаимодействия частиц системы. Механическая энергия системы взаимодействующих тел и

закон ее изменения. Консервативные и диссипативные системы взаимодействующих тел.

Упругие столкновения частиц. Применение законов сохранения энергии и импульса к процессам столкновений. Столкновения макроскопических тел и атомные столкновения. Лабораторная система отсчета и система центра масс. Предельный угол рассеяния налетающей частицы на более легкой неподвижной частице. Угол рассеяния и угол разлета частиц после столкновения. Передача энергии при упругих столкновениях. Замедление нейтронов. Роль столкновений в процессах релаксации и установления теплового равновесия. Ограничения на возможности передачи энергии при большом различии масс сталкивающихся частиц.

## **Тема 15. Тяготение. Движение под действием гравитационных сил. Космическая динамика**

Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения. Гравитационная масса. Напряженность гравитационного поля. Принцип суперпозиции. Силовые линии и поток напряженности гравитационного поля. Непрерывность силовых линий. Теорема Гаусса. Поле тяготения сферической оболочки и сплошного шара. Гравитационное взаимодействие шарообразных тел. Экспериментальное определение гравитационной постоянной. Опыт Кавендиша. Потенциальная энергия точки в гравитационном поле. Гравитационная энергия шарообразного тела.

Движение в поле тяготения. Законы движения планет, комет и искусственных спутников. Законы Кеплера. Годограф вектора скорости. Применение законов сохранения энергии и момента импульса к исследованию кеплерова движения. Космические скорости. Круговая скорость. Скорость освобождения.

Возмущенные кеплеровы движения. Влияние атмосферного торможения и формы планеты на орбиту искусственного спутника. Прецессия экваториальной орбиты. Задача трех тел — точные частные решения и приближенные решения (сопряженные конические сечения). Сфера гравитационного действия планеты. Основы космической динамики. Третья и четвертая космические скорости.

## **Тема 16. Кинематика абсолютно твердого тела**

Число степеней свободы твердого тела. Параллельный перенос и поворот. Теорема Эйлера. Эйлеровы углы. Частные виды движения твердого тела. Поступательное движение. Вращение вокруг фиксированной оси. Винтовое движение. Плоское движение твердого тела. Разложение плоского движения на поступательное движение и вращение. Вектор угловой скорости. Мгновенная ось вращения. Выражение линейной скорости точек твердого тела через радиус-вектор и вектор угловой скорости. Ускорение точек твердого тела. Вращение вокруг неподвижной точки. Сложение вращений. Разложение угловой скорости на составляющие. Общий случай движения твердого тела.

## **Тема 17. Основы динамики абсолютно твердого тела**

Моменты внешних сил и условия равновесия (статика). Нахождение сил реакции и статически неопределимые системы. Принцип виртуальных перемещений. Ди-

динамика вращения вокруг фиксированной оси. Момент инерции. Моменты инерции однородных тел (стержня, диска, шара, конуса, бруска и т.п.). Моменты инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера).

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Физический маятник. Приведенная длина и центр качаний. Свойство обратимости. Динамика плоского движения твердого тела. Применение уравнения моментов относительно движущегося полюса. Скатывание цилиндра с наклонной плоскости. Маятник Максвелла. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении.

## **Тема 18. Свободное вращение симметричного волчка**

Момент импульса абсолютно твердого тела и его связь с вектором угловой скорости. Тензор инерции. Главные оси инерции. Свободное вращение вокруг главных осей инерции. Устойчивость свободного вращения вокруг главных осей инерции. Свободное вращение симметричного волчка. Регулярная прецессия (нутация). Геометрическая интерпретация свободной прецессии для вытянутого и сплющенного симметричного волчка. Подвижный и неподвижный аксоиды.

## **Тема 19. Вынужденная прецессия гироскопа**

Влияние внешних сил на вращающееся твердое тело. Гироскоп. Приближенная теория гироскопа. Вынужденная прецессия гироскопа (псевдoreгулярная прецессия и нутация). Применения гироскопов. Гироскопический маятник. Прецессия земной оси.

## **Тема 20. Силы инерции и тяготение. Принцип эквивалентности**

Законы движения в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции в поступательно движущихся неинерциальных системах. Принцип относительности, первый закон Ньютона и происхождение сил инерции. Системы отсчета, свободно падающие в гравитационном поле. Невесомость. Принцип эквивалентности. Пропорциональность инертной и гравитационной масс. Опыты Галилея, Ньютона, Бесселя, Этвеша и Дикке. Локальный характер принципа эквивалентности. Приливные силы в неоднородном гравитационном поле.

## **Тема 21. Вращающиеся системы отсчета**

Законы движения во вращающихся системах отсчета. Осестремительное и кориолисово ускорения. Центробежная и кориолисова силы инерции. Отклонение отвеса от направления на центр Земли. Динамика движения материальной точки вблизи поверхности Земли при учете вращения Земли. Интегрирование уравнений свободного движения методом последовательных приближений. Отклонение свободно падающего тела от вертикали. Маятник Фуко. Угловая скорость поворота плоскости качаний на полюсе и в произвольной точке Земли.

## **Тема 22. Основы механики деформируемых тел**

Деформации сплошной среды. Однородная и неоднородная деформация. Упругая и пластическая деформация. Предел упругости и остаточная деформация. Деформации и механические напряжения. Упругие постоянные. Закон Гука. Виды упругих деформаций. Одноосное растяжение и сжатие. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Деформация изгиба. Энергия упруго деформированного тела. Суперпозиция деформаций. Деформация сдвига. Связь модуля сдвига материала с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Деформация кручения цилиндрического стержня (упругой нити). Модуль кручения. Деформация всестороннего (гидростатического) сжатия. Выражение модуля всестороннего сжатия через модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

## **Тема 23. Механика жидкостей и газов**

Законы гидростатики. Давление в жидкости и газе. Массовые и поверхностные силы. Гидростатика несжимаемой жидкости. Равновесие жидкости и газа в поле тяжести. Барометрическая формула. Равновесие тела в жидкости и газе. Устойчивость равновесия. Плавание тел. Устойчивость плавания. Метацентр.

Стационарное течение жидкости. Поле скоростей движущейся жидкости. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности. Идеальная жидкость. Закон Бернулли. Динамическое давление. Истечение жидкости из отверстия. Формула Торричелли. Вязкость жидкости. Стационарное ламинарное течение вязкой жидкости по трубе. Формула Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса. Гидродинамическое подобие. Обтекание тел жидкостью и газом. Лобовое сопротивление и подъемная сила. Парадокс Даламбера. Разрывные течения. Пограничный слой. Потенциальные и вихревые течения. Отрыв потока и образование вихрей. Подъемная сила крыла самолета. Эффект Магнуса.

## **Тема 24. Основы физики колебаний**

Колебания. Предмет теории колебаний. Классификация колебаний по кинематическим признакам. Классификация по физической природе процессов. Классификация по способу возбуждения (собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания). Кинематика гармонического колебания. Векторные диаграммы. Связь гармонического колебания и равномерного движения по окружности. Сложение гармонических колебаний. Биения. Фигуры Лиссажу. Свободные колебания гармонического осциллятора. Превращения энергии при колебаниях. Фазовый портрет линейного осциллятора. Изохронность линейного осциллятора. Затухание колебаний при вязком трении. Декремент затухания. Добротность. Критическое затухание. Аперiodический режим. Затухание колебаний при сухом трении. Зона застоя. Погрешности стрелочных измерительных приборов.

## **Тема 25. Вынужденные колебания линейного осциллятора**

Вынужденные колебания осциллятора при синусоидальном внешнем воздействии. Силовое и кинематическое возбуждение колебаний. Резонанс смещения и скоро-



сти. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики. Средние значения кинетической и потенциальной энергии. Поглощаемая и рассеиваемая мощность. Лоренцевский контур. Устойчивость режима установившихся вынужденных колебаний. Переходные процессы. Установление вынужденных колебаний. Несинусоидальное периодическое внешнее воздействие. Гармонический анализ. Преобразование осциллятором спектра входного воздействия.

## **Тема 26. Колебания нелинейных систем (на примере маятника)**

Собственные колебания нелинейного осциллятора. Жесткий маятник в поле тяжести. Потенциальная яма и фазовые траектории колебаний и переворотов. Зависимость периода колебаний от амплитуды. Перевороты маятника. Движение по сепаратрисе. Влияние трения на фазовый портрет маятника.

## **Тема 27. Параметрическое возбуждение колебаний. Параметрический резонанс**

Вынужденные и параметрические колебания. Особенности параметрического резонанса. Энергетические превращения. Порог параметрического резонанса и параметрическая регенерация. Частотные интервалы параметрической неустойчивости. Параметрические колебания при плавной модуляции. Хаотические движения в нелинейных системах при периодическом воздействии.

## **Тема 28. Колебания систем с несколькими степенями свободы**

Собственные колебания линейных систем с несколькими степенями свободы. Связанные маятники. Парциальные и нормальные колебания (моды). Разложение произвольного колебания в спектр. Вынужденные колебания. Резонансы. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики связанных осцилляторов. Динамическое демпфирование.

## **Тема 29. Кинематика и динамика волнового движения**

Кинематика волнового движения. Волновое уравнение. Классификация волн. Поляризация волн. Монохроматические волны. Волновые поверхности. Уравнения плоской, цилиндрической и сферической волн. Волны в упругих средах. Динамика поперечных волн в натянутой струне, продольных и поперечных волн в упругом стержне. Скорость распространения волн. Энергия волн в упругой среде. Поток энергии в монохроматической бегущей волне.

Интерференция монохроматических волн. Стоячие волны при разных граничных условиях. Стоячие волны как нормальные колебания распределенных систем. Превращения энергии в стоячей волне. Возбуждение стоячих волн синусоидальным внешним воздействием. Резонансы.

Дисперсия волн. Волны на поверхности воды. Фазовая и групповая скорость. Формула Рэлея. Расплывание волнового пакета. Эффект Доплера при движении источника волн или приемника относительно среды. Элементы акустики. Высота и тембр звука. Звуковые колебания в замкнутых объемах. Акустические резонаторы.

**Примечание.** Весь материал, указанный в программе, не может быть полностью изложен в лекциях, предусмотренных учебным планом. Программа может быть выполнена только при полном использовании лекций, семинарских занятий, лабораторного практикума, а также времени для самостоятельной работы студентов. Наиболее важные темы курса сопровождаются подробными комментариями и компьютерным моделированием.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Д.В. Сивухин. Общий курс физики, т. 1. Механика. М., «Наука», 1989.
2. Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. БКФ, т. 1. Механика. М., «Наука», 1971.
3. С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. Курс общей физики, т. 1. М., «Физматлит», 1962.
4. С.П. Стрелков. Механика. М., «Наука», 1975.
5. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М., «Высшая школа», 1986.
6. Е.И. Бутиков. Релятивистские представления в курсе общей физики. СПбГУ, 2006.
7. Г.С. Горелик. Колебания и волны. 3-е издание, М., «Физматлит», 2007.

## **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике, вып. 1 – 4. М., «Мир», 1966.
2. Л.И. Мандельштам. Лекции по теории колебаний. М., «Наука», 1972.
3. С.Э. Хайкин. Физические основы механики. М., «Наука», 1971.
4. В.А. Угаров. Специальная теория относительности. М., «Наука», 1977.
5. Э.Ф. Тэйлор, Дж.А. Уилер. Физика пространства-времени. М., «Мир», 1969.