Е. И. Бутиков

# Движения космических тел в компьютерных моделях. II. Задача многих тел



## ***Введение. Аналитические и численные решения***

Точные аналитические решения дифференциальных уравнений движения замечательны тем, что описываемые такими решениями движения оказываются весьма простыми. В частности, классическая *задача Кеплера* о движении тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния, имеет аналитическое решение, которое описывает сравнительно простые возможные движения по коническим сечениям. К сожалению, точные решения редко встречаются в физике. При наличии возмущающих воздействий (тяготение других планет, отличие силы тяготения небесного тела от строгой сферической симметрии, и т.п.) уравнения движения становятся неинтегрируемыми. Присущее кеплеровым движениям «чудо» замкнутых орбит, равно как и замечательная их простота, бесследно исчезают. Математическое исследование возмущенных движений неизмеримо усложняется.

Когда возмущающие воздействия малы по сравнению с основной силой тяготения, можно использовать приближенные аналитические методы. В некоторых случаях допустимо принять кеплерово движение в качестве нулевого приближения, считая, что возмущения вызывают сравнительно медленные изменения параметров кеплеровой орбиты, и попытаться найти аналитические выражения для этих медленных изменений. В задачах о межпланетных перелетах можно применять приближенный аналитический метод сопряженных конических сечений (см. ниже). Когда же возмущения нельзя считать малыми, как, например, в общем случае так называемой *задачи трех тел*, даже приближенные решения получить не удается. Тогда остается полагаться только на численные методы решения уравнений движения.

Поясним идею численных методов расчета движения. Пусть для некоторого начального момента времени заданы положение и скорость рассматриваемого космического тела (планеты, космического аппарата), а также расположение всех небесных тел, сообщающих ему ускорение своими силами тяготения. На основе закона всемирного тяготения можно вычислить гравитационное ускорение, сообщаемое данному телу каждым небесным телом в отдельности, а значит, и полное ускорение как векторную сумму этих ускорений. Зная величину и направление скорости тела, можно, учитывая вычисленное ускорение и считая его постоянным, рассчитать положение и скорость тела через небольшой промежуток времени («шаг» интегрирования). Для найденного нового положения можно снова рассчитать ускорение тела, и затем по той же схеме рассчитать следующее положение тела и его скорость, и так далее. Таким путем можно шаг за шагом проследить все движение рассматриваемого тела.

Единственное приближение, которое при этом приходится допускать, заключается в том, что в течение каждого небольшого промежутка времени (шага расчета) ускорение тела считается постоянным, тогда как на самом деле оно все время изменяется. Но точность расчета можно повысить, уменьшая шаг интегрирования. Конечно, за повышение точности приходится платить увеличением объема вычислений.

Мы описали здесь так называемый алгоритм Эйлера численного интегрирования уравнений движения, известный также как метод ломаных. Этот метод дает сравнительно невысокую точность и приводит к накапливающимся ошибкам. Существует множество улучшенных модификаций алгоритма Эйлера. Например, можно предсказать для очередного шага новые положения тел (а значит и новые ускорения в конце этого шага), а затем повторить этот шаг еще раз, взяв для ускорения каждого из тел среднее между ускорением в начале данного шага и предсказанным ускорением для конца шага. При компьютерном моделировании обычно используют несколько более сложный метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности, лишенный недостатков, присущих простому методу Эйлера. Метод Рунге – Кутта использован и в пакете программ «Движения космических тел», прилагаемом к данной статье. На практике проверить качество используемого численного алгоритма можно, применяя его к задаче Кеплера, и сравнивая результат с известным аналитическим решением.

При добавлении еще одного тела к системе двух взаимодействующих тел задача в общем случае становится аналитически неразрешимой, в то время как при использовании численных методов никаких принципиальных трудностей не возникает, лишь несколько возрастает объем необходимых вычислений.

# *Прецессия экваториальной орбиты спутника планеты*

Нашу планету можно считать сферически симметричной лишь в первом приближении. Основное отклонение вызвано «сплюснутостью» земного шара, у которого полярный радиус на 21 км короче экваториального. Поэтому гравитационное поле Земли не имеет строгой сферической симметрии. В небесной механике Землю иногда представляют в виде шара с надетым на него по экватору массивным обручем, т.е. вместо полярного сжатия используют эквивалентное представление об экваториальном «вздутии» Земли. В выражении для силы тяготения, действующей на спутник Земли, благодаря экваториальному «обручу» присутствует дополнительный член с осевой симметрией. При учете таких искажений поля тяготения движение спутника происходит уже не по кеплерову эллипсу, а по весьма сложной траектории, в общем случае не замкнутой и не лежащей в одной плоскости. После совершения одного оборота спутник уже не попадает в прежнюю точку.

Для спутника, находящегося на очень большом расстоянии от Земли, фактическое распределение массы Земли несущественно. Другими словами, на очень большом расстоянии поле тяготения Земли можно считать таким, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре: сила тяготения убывает обратно пропорционально *квадрату* расстояния. Искажение центрального поля тяготения планеты, вызванное ее сплюснутостью вдоль оси, описывается малым дополнительным членом, убывающим гораздо быстрее – обратно пропорционально *четвертой* степени расстояния до центра планеты. Дополнительная сила тяготения, действующая на спутник со стороны массивного экваториального «обруча», в общем случае не направлена к центру обруча. Поэтому полная сила тяготения характеризуется только осевой (а не сферической) симметрией.

Когда искажения сферически симметричного поля тяготения невелики, удобно считать, что спутник движется по эллипсу, но сам этот эллипс непрерывно изменяется. Такую кеплерову орбиту с постепенно изменяющимися параметрами Лагранж назвал *оскулирующей*. Из-за отсутствия сферической симметрии плоскость оскулирующей орбиты постепенно поворачивается в пространстве. При этом угол между осью Земли и плоскостью орбиты остается неизменным, т.е. плоскость орбиты медленно *прецессирует* вокруг земной оси.

При движении в экваториальной плоскости планеты задача упрощается, ибо дополнительная сила притяжения спутника «обручем» направлена к центру, т.е. как и в случае сферически симметричной планеты зависит только от расстояния $r$ до центра планеты. Но эта зависимость становится более сложной: к главному члену, обратно пропорциональному квадрату расстояния, добавляется небольшой член, обратно пропорциональный четвертой степени расстояния $r$:

$$F = -G\frac{mM}{r^2}\left(1 + b\frac{R^2}{r^2}\right).$$

В этой формуле $G$ – гравитационная постоянная, $m$ – масса спутника, $M$ – масса планеты, $R$ – ее экваториальный радиус. Значение безразмерной константы $b$ зависит от степени «сплюснутости» планеты: оно равно отношению дополнительного члена силы тяготения к главному (ньютоновскому) члену на расстоянии $R$ от центра планеты.

В случае осевого сжатия планеты константа $b$ положительна ($b > 0$). У Земли «сплюснутость» невелика: значение безразмерной постоянной $b$ составляет всего лишь 0,0016. Для гипотетической планеты, вытянутой вдоль оси (похожей на мяч для регби), константа $b$ отрицательна ($b < 0$). В последнем случае можно представлять себе планету в виде шара с дополнительными точечными массами на полюсах – своего рода полярными «шапками». В первом случае дополнительный член усиливает притяжение экваториального спутника к планете на малых расстояниях, а во втором – ослабляет (по сравнению со случаем сферически симметричного распределения масс, когда всю массу планеты можно считать сосредоточенной в ее центре).

Наличие дополнительного члена у силы тяготения, быстрее (по сравнению с основным) убывающего с расстоянием, особенно заметно сказывается на сильно вытянутых орбитах спутников, вызывая постепенный поворот большой оси эллипса вокруг фокуса при неизменных максимальном и минимальном расстояниях от центра планеты. Такой непрерывный поворот орбиты обычно называют *прецессией.*

Качественное объяснение прецессии вытянутой орбиты заключается в следующем. На больших расстояниях от планеты поле тяготения почти не отличается от кулоновского, и можно считать, что движение спутника происходит по кеплерову эллипсу. По мере приближения к планете роль дополнительного члена силы тяготения возрастает (он сильнее зависит от расстояния). Вблизи планеты сила тяготения в экваториальной плоскости больше, чем в случае шарообразной планеты такой же массы, и соответственно сообщаемое этой силой спутнику ускорение больше, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу. В результате вблизи планеты траектория искривляется сильнее, что можно трактовать как поворот большой оси эллипса вокруг центра планеты. Такой поворот, как легко видеть, происходит в направлении орбитального движения спутника. У Земли реальная сплюснутость мала, поэтому большая ось эллиптической орбиты за один оборот спутника поворачивается на очень малый угол, однако этот эффект накапливается за большое число оборотов по орбите.

Наблюдаемая в моделирующем эксперименте прецессия экваториальной орбиты в поле тяготения «сплюснутой» планеты иллюстрируется на рис. 1. Чтобы эффект был более заметен, при моделировании можно задавать утрированно большие значения (порядка единицы) безразмерного параметра $b$, характеризующего несферичность планеты и входящего в дополнительный член силы притяжения.

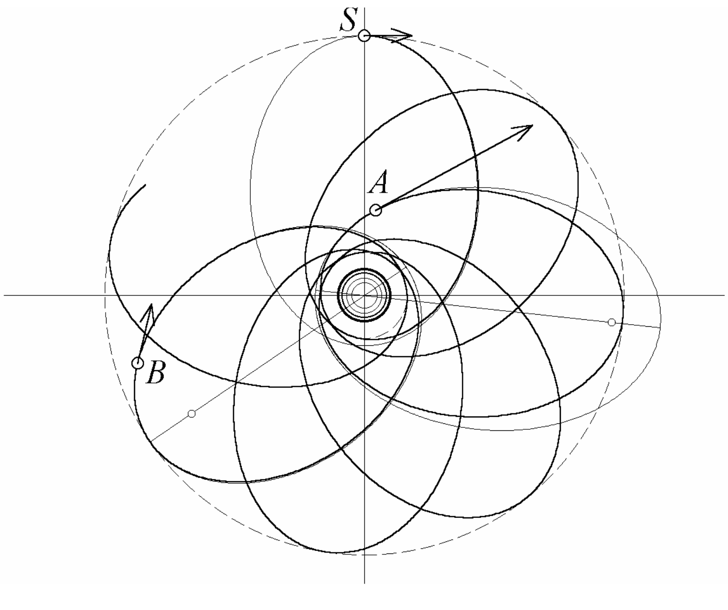


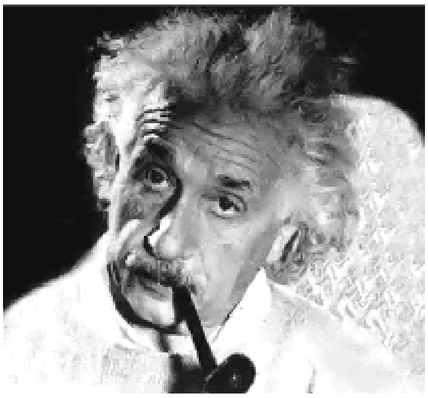

Рис. 1. Прецессия орбиты спутника, который обращается в экваториальной плоскости вокруг планеты, «сплюснутой» вдоль оси.

На рис. 1 тонкими линиями показаны оскулирующие эллипсы для трех точек ($S$, $A$ и $B$) траектории. Если бы дополнительный член в выражении для силы тяготения внезапно исчез, все параметры оскулирующего эллипса в дальнейшем оставались бы неизменными, и движение спутника происходило бы по эллипсу, касающемуся действительной траектории в рассматриваемой точке. Этот эллипс дает представление о характере истинной траектории по крайней мере для некоторой окрестности данной точки.

Действительное движение спутника характеризуется двумя периодами: одним для радиального движения между максимальным и минимальным удалениями от центра (для периодических изменений модуля радиуса-вектора), и другим – для полного оборота радиуса-вектора. В общем случае эти периоды несоизмеримы, и многолепестковая траектория всюду плотно заполняет кольцевую область между окружностями, показанными штриховыми линиями на рис. 1. «Чудо» замкнутых кеплеровых эллиптических орбит обусловлено точным совпадением этих двух периодов при движении под действием центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния.

В случае осевого «растяжения» планеты (или при наличии полярных «шапок») дополнительный член силы тяготения в экваториальной плоскости отрицателен ($b < 0$), так как на малых расстояниях от планеты сила тяготения меньше, чем при сферически симметричном распределении масс. В самом деле, при приближении к планете расстояние до полярных «шапок» уменьшается медленнее, чем расстояние до ее центра. В этом случае при приближении к планете сила тяготения сообщает спутнику меньшее ускорение, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу, и этот эллипс как бы «распрямляется» вблизи перигея. В результате прецессия орбиты происходит в направлении, противоположном орбитальному движению спутника.

Деформация центрального тела (т.е. отклонение поля тяготения от сферической симметрии) – не единственная причина возможной прецессии орбиты спутника. Прецессия большой оси эллиптической орбиты планеты может быть вызвана гравитационными возмущениями со стороны других планет. В нашей планетной системе этот эффект наиболее значителен для Меркурия – самой близкой к Солнцу планеты. Расчеты показывают, что поля тяготения других планет действительно должны вызывать наблюдаемую астрономами прецессию орбиты Меркурия, но остается крошечное расхождение между расчетами и наблюдениями. Это расхождение составляет всего 43″ (43 угловых секунды!) за столетие, и ему не находится объяснения в рамках ньютоновской теории тяготения. Исчерпывающее количественное объяснение прецессия перигелия эллиптической орбиты Меркурия получила лишь в созданной Эйнштейном релятивистской теории тяготения.



Альберт Эйнштейн

## *Спутник планеты, обращающейся вокруг звезды*

Движение планет вокруг Солнца почти целиком определяется силами их притяжения к Солнцу. Из-за того, что массы планет малы по сравнению с массой Солнца, действующие между планетами силы тяготения приводят лишь к сравнительно небольшим отклонениям от законов Кеплера. В случае звезды с единственной планетой движение планеты было бы в точности кеплеровым.

Но что можно сказать о движении спутника планеты? В какой мере это движение можно считать кеплеровым? Ведь помимо силы притяжения к планете на спутник действует сила притяжения к Солнцу. Например, сила притяжения к Солнцу нашего естественного спутника – Луны, как легко подсчитать, превосходит силу притяжения к Земле. В каком же смысле можно говорить об обращении Луны вокруг Земли?

Дело в том, что при описании движения спутника планеты мы рассматриваем его движение *относительно планеты*, а не относительно Солнца. А система отсчета, связанная с планетой, не является инерциальной: она вместе с планетой подвержена ускорению, направленному к Солнцу. Когда спутник находится близко к планете, солнечное притяжение сообщает ему почти такое же ускорение, как и самой планете. Поэтому вмешательство Солнца в движение спутника относительно планеты оказывается незначительным: в главных чертах это движение описывается законами Кеплера. Тяготение к Солнцу проявляется в *возмущающем ускорении*, которое равно не ускорению, сообщаемому спутнику Солнцем, а *разности ускорений*, сообщаемых Солнцем спутнику и планете. Кеплерово движение спутника относительно Земли возмущается не самим по себе солнечным тяготением, а лишь его *неоднородностью*. В земных делах неоднородность поля тяготения Солнца обнаруживает себя (вместе с неоднородностью поля тяготения Луны) в морских приливах.

На протяжении околоземной орбиты спутника неоднородность поля тяготения Солнца незначительна. Поэтому при расчете движения спутника вблизи планеты оказывается возможным в первом приближении учитывать его притяжение только планетой. Для спутника, масса которого много меньше массы планеты, это будет просто кеплерово движение в центральном поле тяготения планеты. Орбита спутника относительно планеты может быть эллипсом или окружностью, а пролетная траектория космического аппарата – параболой или гиперболой. Сложная петлеобразная или волнообразная траектория спутника в системе отсчета, связанной со звездой, объясняется сложением двух движений: движения по большой окружности (или эллипсу) вместе с планетой вокруг звезды и обращения вокруг звезды по малой окружности (или малому эллипсу).

Будем называть кеплерово движение спутника относительно планеты *невозмущенным* движением. Движение спутников по орбитам, пролегающим сравнительно недалеко от планеты, с хорошей точностью можно считать невозмущенным, но при значительном удалении спутника от планеты возмущающее влияние неоднородности поля солнечного тяготения становится существенным. Для каждой планеты можно указать окружающую ее область невозмущенного движения спутников. В небесной механике и космической динамике такую область называют *сферой действия* планеты относительно Солнца.

При приближенном анализе движения спутника (космического корабля и вообще тела пренебрежимо малой массы) под действием сил тяготения планеты и Солнца (т.е. при приближенном решении *ограниченной* задачи трех тел) можно использовать так называемый *метод сопряженных конических сечений*. Идея его заключается в следующем. Пока спутник движется в окрестности планеты в пределах сферы ее действия, движение рассматривается как кеплерово *планетоцентрическое* (в частности, геоцентрическое), происходящее по эллипсу, параболе или гиперболе. При переходе через границу сферы действия спутник (космический аппарат) попадает во власть Солнца, и его движение естественнее рассматривать как кеплерово *гелиоцентрическое* с фокусом в центре Солнца. На границе сферы действия планетоцентрическая и гелиоцентрическая траектории сопрягаются («склеиваются», «сшиваются») по определенным правилам (с пересчетом скорости при переходе от одной системы отсчета к другой).

Приближенный метод сопряженных конических сечений широко используется в механике космического полета при предварительном проектировании орбит межпланетных перелетов. В частности, его применяют при отборе возможных траекторий в задаче достижения Луны.

Когда орбита спутника лежит глубоко внутри сферы действия планеты, движение спутника устойчиво, т.е. он обречен вечно обращаться вокруг планеты. В случае орбиты спутника, приближающейся к границе сферы действия планеты, возможны разнообразные варианты неустойчивых движений, оканчивающихся падением спутника на планету или на звезду, либо «выбрасыванием» спутника за пределы системы.

Возможны также очень интересные движения, сопровождающиеся переходом спутника от обращения вокруг планеты к обращению вокруг звезды (когда спутник превращается в самостоятельную планету). Может оказаться, что через некоторое время такой потерянный планетой спутник снова окажется захваченным планетой. Подобная «перепасовка» спутником между планетой и звездой в этом «космическом баскетболе» может повторяться неоднократно. Рис. 2 дает пример такого хаотического движения спутника некоторой планеты, обращающейся вокруг звезды по эллиптической орбите с небольшим эксцентриситетом.

В пакете программ «Движения космических тел» (и в «Коллекции замечательных движений в системах трех тел») можно найти много подобных примеров необычайно сложного поведения систем, подчиняющихся простым и строгим физическим законам.

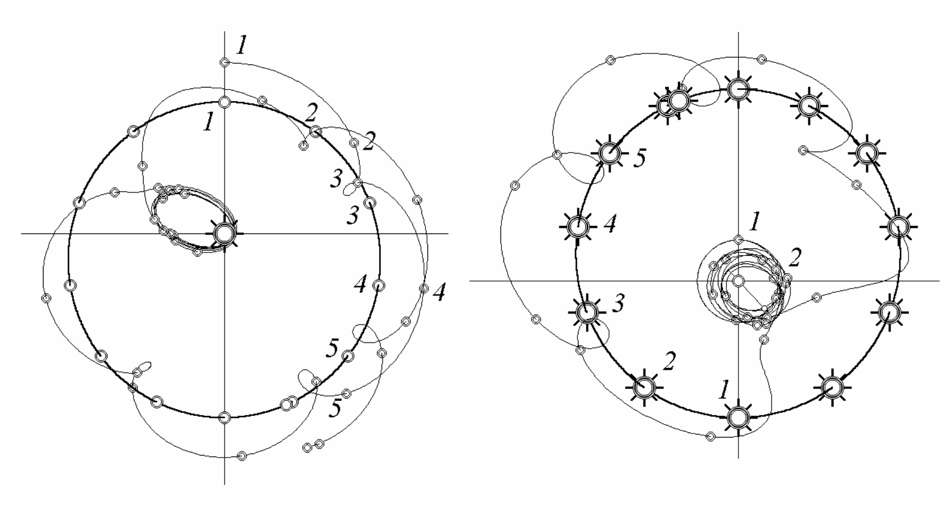



Рис. 2. Траектория спутника, поочередно обращающегося вокруг планеты и вокруг звезды. Слева движение показано в «гелиоцентрической» (связанной со звездой) системе отсчета, справа – в «геоцентрической» (связанной с планетой) системе отсчета. Совпадающие цифры соответствуют одновременным положениям небесных тел.

Для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих хаотическое движение спутника, которое наблюдается в приведенном примере, характерна чрезвычайно сильная чувствительность к начальным условиям: ничтожное изменение начального состояния может привести к радикальным изменениям в долговременном поведении системы. Небесная механика дает нам один из многочисленных примеров хаотических движений в физике. Можно думать, что отсутствие аналитических решений в подобных случаях отражает не столько бессилие математики, сколько возможную сложность движений в системах, описываемых нелинейными уравнениями.

# *Двойная звезда – задача двух тел*

До сих пор мы говорили о движении тела под действием центральной силы тяготения в предположении, что масса центрального тела значительно превосходит массу тела, обращающегося по орбите. В этом случае массивное центральное тело (Солнце в задаче о движении планет или Землю в задаче о движении спутников) можно приближенно считать неподвижным, и задача сводится к нахождению движения легкого тела в заданном стационарном поле тяготения.

В общем случае, когда массы взаимодействующих тел сопоставимы, такое приближение несправедливо, так как ни одно из тел не будет неподвижным в инерциальной системе отсчета. Гравитация – это взаимодействие, и если Земля притягивает Луну, то и Луна в такой же мере притягивает Землю. Поэтому, строго говоря, не следует говорить, что Луна обращается вокруг Земли – на самом деле оба тела движутся, обращаясь вокруг общего центра масс.

Благодаря тому, что силы взаимодействия между телами подчиняются третьему закону Ньютона (т.е. эти силы равны по модулю и противоположно направлены), *задачу двух тел* можно математически свести к задаче о движении единственного «виртуального» тела с так называемой *приведенной массой* $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, движущегося под действием стационарной силы, равной силе взаимодействия «настоящих» тел. В результате удается найти движение одного тела относительного другого. Когда тела взаимодействуют с силой тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния, это относительное движение происходит по коническим сечениям в соответствии с законами Кеплера.

Зная, как одно из тел движется вокруг другого по эллипсу (скажем, в системе двойной звезды), можно показать, что оба гравитационно связанных тела движутся синхронно по геометрически подобным эллипсам вокруг общего центра масс всей системы. Пример такого движения показан на рис. 3. В каждый момент времени компоненты двойной звезды находятся на противоположных концах отрезка, проходящего через центр масс, и делят этот отрезок в отношении, обратно пропорциональном своим массам.

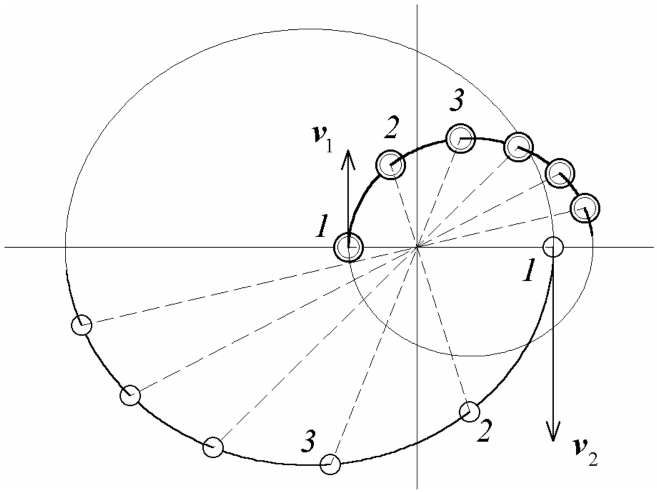



Рис. 3. Траектории компонент двойной звезды в системе отсчета, связанной с центром масс системы. Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами.

Традиционный подход к задаче двух тел, основанный на концепции приведенной массы, будучи вполне корректным и достаточно простым в математическом отношении, может тем не менее вызывать определенные логические трудности у учащихся, так как позволяет рассматривать связанную с одним из тел неинерциальную систему отсчета как инерциальную. Объяснение этого кажущегося несоответствия может оказаться для учащихся слишком тонким моментом при первоначальном изучении предмета. Более того, переход от одной системы отсчета к другой в этой задаче может также показаться непростым делом. Ведь в свое время и Галилей, и Коперник столкнулись с немалыми трудностями в попытках донести такие идеи до человечества. Поэтому здесь мы предложим несколько иной подход к задаче двух тел, свободный от вышеупомянутых трудностей. Аналогичный подход будет использован в этой статье и для объяснения возможных простых движений в системах многих тел.

Будем относить движение каждого из тел (каждой из компонент двойной звезды) к инерциальной системе отсчета, в которой центр масс всей системы покоится. Направление силы тяготения, приложенной к каждому из тел со стороны другого, всегда проходит через неподвижный центр масс системы. Чтобы объяснить, почему движения тел происходят по коническим сечениям и подчиняются законам Кеплера, достаточно показать, что каждое из тел можно рассматривать как движущееся не под действием силы тяготения другого движущегося тела, а под действием центральной силы тяготения, создаваемой некоторым неподвижным источником, расположенным в центре масс системы. Этот воображаемый источник характеризуется определенной эффективной массой $M_{эфф}$. Действительно, пусть $r_1$ и $r_2$ обозначают расстояния тел с массами $m_1$ и $m_2$ соответственно от центра масс системы. Тогда, очевидно, $m_1r_1 = m_2r_2$, и, следовательно, $r_1 + r_2 = (1 + m_1/m_2)\, r_1$. Последнее соотношение позволяет выразить приложенную к первому телу со стороны второго силу тяготения $F_1$ только через расстояние $r_1$ первого тела от центра масс:

$$F_1 = -G\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_1^2(1+m_1/m_2)^2} = -G\frac{m_1 M_{эфф}}{r_1^2}, \quad \text{где } M_{эфф} = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}.$$

Таким образом, в инерциальной системе отсчета движение первого из тел будет в точности таким, как если бы на него действовала обратно пропорциональная квадрату расстояния $r_1$ от центра масс сила тяготения $F_1$, создаваемая неподвижным источником с массой $M_{эфф}$, а не другим движущимся телом. Как мы знаем, такое движение происходит в соответствии с законами Кеплера. Аналогичные соображения применимы и ко второму телу. Остается лишь показать, что кеплеровы движения обоих тел происходят синхронно по геометрически подобным коническим сечениям, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. Последнее утверждение немедленно следует из соотношения $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ между радиусами-векторами тел относительно центра масс, которое связывает положения движущихся тел в каждый момент времени.

В какой-либо иной инерциальной системе отсчета, относительно которой центр масс системы находится в движении, тела описывают замысловатые волнообразные или петлеобразные траектории. Пример такого движения показан на рис. 4. Кажущаяся сложность траекторий порождается здесь сложением сравнительно простых периодических кеплеровых движений каждого из тел относительно центра масс с равномерным прямолинейным движением системы как целого.

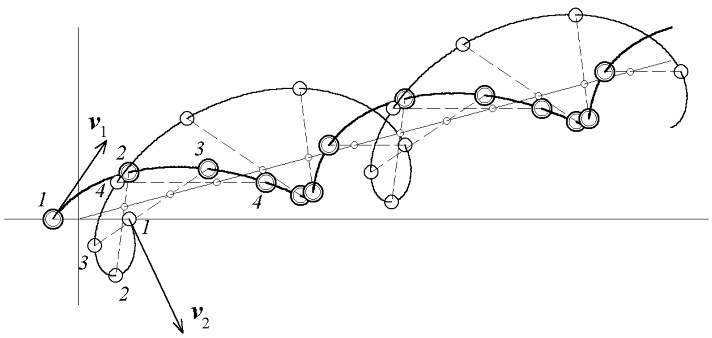



Рис. 4. Траектории компонент двойной звезды в произвольной инерциальной системе отсчета. Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами. Тонкой прямой линией показана траектория центра масс.

Двойная звезда называется *визуальной* двойной, если ее компоненты находятся на угловом расстоянии, достаточном для их разрешения (раздельного наблюдения) с помощью оптического телескопа. Измеряя период обращения и размер орбиты относительного движения, можно определить сумму масс компонент. Чтобы определить массы отдельных компонент, нужно измерить орбиты, описываемые ими относительно центра масс. В настоящее время известны тысячи визуальных двойных с периодами обращения от нескольких лет до многих тысяч лет.

Звезду называют *астрометрической* двойной, когда свечение одной из ее компонент слишком слабое для наблюдения в телескоп, а о ее присутствии можно судить по сложному движению видимой компоненты на фоне далеких неподвижных звезд. Таким способом были впервые обнаружены *белые карлики* – компактные звездные объекты, возникающие как конечный продукт эволюции звезд сравнительно небольшой массы. В частности, сложная волнообразная траектория Сириуса, измеренная по отношению к другим звездам, свидетельствовала о присутствии невидимого спутника, который впоследствии удалось зарегистрировать и оптическими средствами.

В *спектроскопических* двойных звездах компоненты настолько близки, что обычно не поддаются раздельному наблюдению в оптический телескоп, но их относительное движение можно зарегистрировать по периодическим изменениям в спектре излучения. Вариации спектра вызываются доплеровским сдвигом спектральных линий. Этот сдвиг возникает тогда, когда в периодическом относительном движении отличны от нуля проекции скоростей компонент на направление луча, распространяющегося в сторону Земли. В последние годы таким способом удалось обнаружить в нашей Галактике множество звезд с обращающимися вокруг них массивными планетами.

# *Планета в системе двойной звезды*

Наша Земля входит в планетную систему одиночной звезды – Солнца, причем планеты Солнечной системы находятся одна от другой на достаточно больших расстояниях. Массы планет намного меньше массы центрального тела – Солнца. Благодаря этим особенностям строения Солнечной системы движение планет в главных чертах оказывается весьма простым. Основное влияние на движение каждой из планет оказывает сила тяготения Солнца, а влиянием тяготения других планет в первом приближении можно пренебречь. Поэтому с хорошей точностью движение планет описывается законами Кеплера. Как резонно отмечает В. В. Белецкий в книге «Очерки о движении космических тел» (издательство «Наука», Москва, 1977), в этом отношении человечеству повезло: за сравнительно короткий срок ему удалось, во-первых, постичь законы движения планет (Кеплер) и, во-вторых, объяснить их (Ньютон).

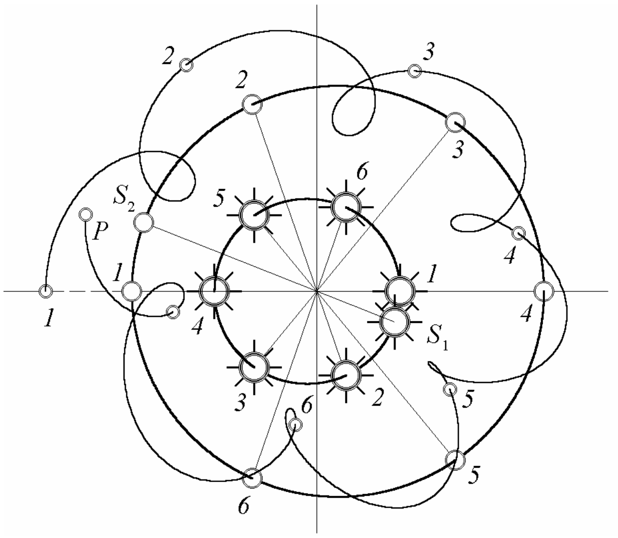



Рис. 5. Траектория планеты $P$, обращающейся вокруг одной из компонент ($S_2$) двойной звезды $S_1 - S_2$. Совпадающие цифры соответствуют одновременным положениям тел.

Большое число звезд в Галактике представляет собой кратные системы –двойные и тройные, в отличие от одиночных звезд, подобных нашему Солнцу. Компоненты двойной звезды под действием сил взаимного тяготения совершают орбитальные движения вокруг центра масс по геометрически подобным эллиптическим (или круговым) кеплеровым орбитам. В системе кратных звезд также возможно существование планет, в том числе и с устойчивыми орбитами. Траектории таких планет будут очень сложными. Рис. 5 дает пример возможного движения планеты, обращающейся вокруг одной из компонент двойной звезды. По наблюдениям за такими планетами было бы совсем не просто выявить закономерности их движений, и уж совсем трудно было бы понять, что эти закономерности обусловлены простым законом притяжения планеты к каждой из звезд. Можно думать, что развитие цивилизации на планете, входящей в систему двойной звезды, происходило бы медленнее, чем на Земле, так как там ученые находились бы в значительно худших условиях для познания законов Природы. Земному человечеству удалось сравнительно быстро пройти этот тяжкий путь познания.

Более того, можно без большой иронии предположить, что открытие закона всемирного тяготения было бы намного более трудным делом, если бы вскоре после установления Кеплером закономерностей планетных движений появились бы данные более точных астрономических наблюдений по сравнению с наблюдениями Тихо Браге. В самом деле, в более точных наблюдениях с неизбежностью обнаружились бы отклонения от законов Кеплера. Эту страницу в истории науки можно рассматривать как свидетельство в пользу парадоксального утверждения, что увеличение точности экспериментальных данных, достигнутое слишком рано, может стать тормозом прогресса в науке. Гете в своих заметках под названием «Размышления в духе странников» пишет, что запас наблюдений приносит науке сначала пользу, потом вред, так как благодаря множеству наблюдений замечают не только правило, но также исключения, а истину как среднее между ними не выведешь.

Если масса планеты много меньше масс компонент двойной звезды, ее влиянием на движение этих компонент можно пренебречь. В таком случае мы здесь имеем дело с *ограниченной задачей трех тел*, когда компоненты двойной звезды обращаются вокруг центра масс по кеплеровым эллипсам только под действием сил притяжения друг к другу (как в задаче двух тел), в то время как движение планеты определяется силами притяжения обеих звезд. В математическом отношении даже ограниченная задача трех тел чрезвычайно трудна, и в общем случае не имеет аналитического решения. Другими словами, не существует формул, представляющих движение планеты и позволяющих вычислить ее положение в пространстве при произвольных начальных условиях, несмотря на то, что звезды движутся по простым кеплеровым эллипсам. Конечно, дело здесь не только в математической сложности задачи, но и в исключительной сложности самих движений. Между тем, при численном решении такой задачи никаких принципиальных математических затруднений не возникает. Задача трех тел численно решается так же просто, как и задача двух тел; лишь увеличивается объем необходимых вычислений. Однако следует иметь в виду, что численные методы далеко не всесильны. Для расчета движения и предсказания положения планеты через большой промежуток времени требуется очень точно знать ее начальное состояние. И тем более численные методы не позволяют изучать наиболее общие свойства движений небесных тел.

Задача трех тел во многих курсах механики приводится как пример чрезвычайной сложности возможных движений в механических системах, подчиняющихся простым и точным законам физики. Однако еще со времен Лагранжа хорошо известно, что для неразрешимой в общем случае задачи многих тел существует несколько частных решений, описывающих простые кеплеровы движения тел, входящих в систему. Поразительно, что конечное множество неожиданно простых движений, описываемых лагранжевыми решениями, выпадает из бесконечного разнообразия необычайно сложных движений, характерных для общего случая задачи трех тел. И эти простые движения несомненно должны допускать в равной мере простое физическое объяснение.

В серьезных курсах небесной механики простые результаты, касающиеся так называемых лагранжевых точек либрации, появляются из нагромождения чудовищно сложных формул, и потому не приносят эстетического удовлетворения: мы вправе ожидать, что простые и красивые результаты заслуживают столь же простых и ясных способов их получения. Ниже мы предлагаем простое физическое объяснение известным точным частным решениям задачи многих тел. Мы утверждаем, что в тех случаях, когда движения отдельных тел, связанных гравитационными взаимодействиями в системе многих тел, происходят вдоль конических сечений, каждое из тел можно рассматривать как движущееся не под действием нескольких сил тяготения, создаваемых другими движущимися телами, а под действием единственной центральной силы тяготения, создаваемой некоторым неподвижным источником, расположенным в центре масс системы. Сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от такого воображаемого точечного источника, характеризуемого эффективной массой $M_{эфф}$. При выполнении определенных условий эффективное гравитационное поле, действующее на каждое из тел системы, может быть стационарным, несмотря на то, что создается это поле движущимися телами. Такой подход был проиллюстрирован выше на примере системы двух тел.

Анализ точных частных решений задачи многих тел мы начнем с простейшего примера симметричной системы трех тел в коллинеарной конфигурации.

# *Коллинеарная симметричная система трех тел*

Пусть две планеты *A* и *B* имеют одинаковые массы, и в начальный момент расположены на одинаковых расстояниях от звезды *S* на одной прямой со звездой с противоположных сторон от нее (см. левую часть рис. 6). Если при этом скорости планет равны и направлены в противоположные стороны, то, как легко видеть, симметричное взаимное расположение всех трех тел такой гипотетической планетной системы будет сохраняться и при последующем движении.

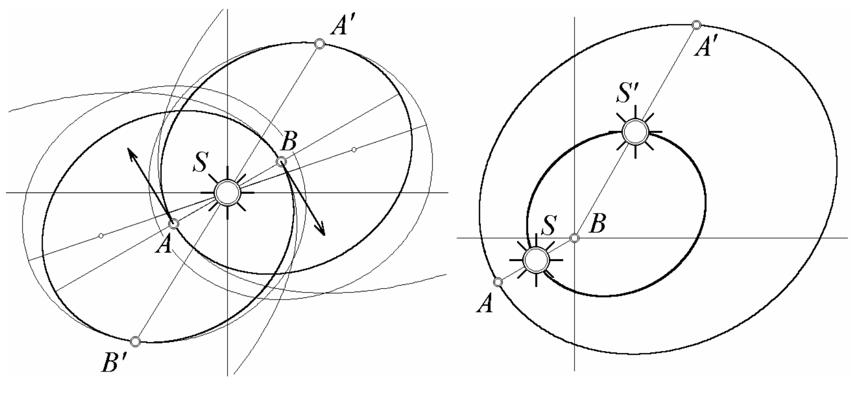



Рис. 6. Кеплеровы движения, описываемые точным частным решением задачи трех тел (симметричное расположение одинаковых массивных планет *A* и *B* относительно звезды *S*), в системе отсчета центра масс (слева) и системе отсчета, связанной с планетой *B* (справа).

Покажем, что движение планет при этом будет кеплеровым. Центр масс системы в начальный момент находится в центре звезды, и при равных и противоположно направленных скоростях планет будет оставаться там и в дальнейшем. Сила, действующая на каждую из планет, складывается из притяжения к звезде и к другой планете. Эта суммарная сила будет центральной (направленной в каждый момент к центру звезды), а ее величина будет обратно пропорциональна квадрату расстояния до звезды. В самом деле,

$$F = G\frac{mM}{r^2} + G\frac{mm}{(2r)^2} = G\frac{m(M + m/4)}{r^2}.$$

В этой формуле $M$ – масса звезды, $m$ – масса каждой из планет, $r$ – расстояние от любой из планет до звезды. Из такого выражения для силы следует, что движение каждой из планет будет происходить по кеплерову эллипсу так, как если бы планета притягивалась только звездой, имеющей массу $M_{эфф} = M + m/4$, и не испытывала бы никакого возмущения со стороны второй планеты. Планеты в такой системе движутся по одинаковым эллипсам с общим фокусом в центре масс системы, находясь в каждый момент на противоположных концах отрезка, проходящего через звезду. Эллиптические орбиты планет показаны жирными линиями в левой части рис. 6. Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым каждая из планет двигалась бы (относительно звезды) только под действием притяжения звезды, т.е. если бы вторая планета внезапно исчезла. Эти оскулирующие эллипсы, касающиеся действительных орбит, показаны для перигелиев $A$ и $B$ (только части эллипсов) и для точек $A'$ и $B'$, расположенных ближе к афелиям действительных орбит (целые эллипсы). В правой части рис. 6 показаны траектории звезды $S$ и планеты $A$ в системе отсчета, связанной с планетой $B$.

Рассматриваемая система иллюстрирует частный случай одного из лагранжевых точных решений задачи трех тел, когда звезда $S$ находится во внутренней коллинеарной точке либрации двух массивных тел $A$ и $B$.

Симметричная конфигурация системы сохраняется при движении тел лишь при условии, что начальные скорости планет относительно звезды в точности равны по модулю и противоположно направлены. Если же это условие не выполнено, или начальные расстояния планет от звезды не точно равны, или три тела не лежат точно на одной прямой, траектории планет рано или поздно начнут отклоняться от кеплеровых эллипсов, и эти отклонения будут прогрессивно нарастать. Через некоторое время движение системы становится нерегулярным и очень сложным. Это значит, что периодическое движение системы, описываемое рассмотренным частным решением задачи трех тел, неустойчиво. Рис. 7 иллюстрирует эту неустойчивость для случая, когда начальные расстояния планет $A$ и $B$ от звезды $S$ слегка отличаются.

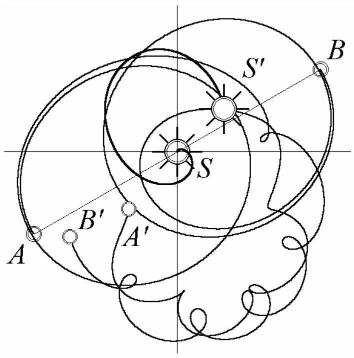



Рис. 7. Неустойчивость движения в симметричной коллинеарной конфигурации, развивающаяся при ничтожном неравенстве начальных расстояний планет $A$ и $B$ от звезды $S$.

# Хоровод одинаковых «планет»

Точные решения задачи многих тел, описывающие периодические движения по кеплеровым орбитам, аналогичные рассмотренному выше примеру, существуют также для гипотетических систем из нескольких одинаковых тел в равносторонней конфигурации, окружающих центральное тело. Представим себе, что $n$ «планет» с произвольно большими, но равными массами расположены во всех $n$ вершинах правильного (равностороннего) многоугольника, и еще одно тело («звезда», масса которой может отличаться от масс «планет») находится в центре этого многоугольника.

Очевидно, что в такой симметричной конфигурации центральное тело находится в равновесии под действием сил тяготения, приложенных к нему со стороны всех окружающих тел. Из симметрии системы ясно, что результирующая сила тяготения, приложенная к любой из «планет» со стороны центрального тела («звезды») и всех остальных «планет», направлена к центру системы. Величина этой силы обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра (или вообще квадрату любого линейного размера многоугольника, например, длины его сторон).

Поэтому в такой системе одинаковые «планеты» могут, сохраняя равностороннюю конфигурацию, синхронно двигаться вдоль равных кеплеровых эллипсов (или даже вдоль открытых параболических или гиперболических траекторий) с общим фокусом в центре «звезды». Для этого необходимо лишь, чтобы начальные скорости всех «планет» были одинаковы и направлены под равными углами к соответствующим радиусам-векторам.

В частности, «планеты» могут равномерно двигаться по одной и той же круговой орбите (в которую вписан образуемый ими многоугольник), находясь на равных расстояниях одна от другой. В этом случае многоугольник с «планетами» в вершинах равномерно вращается вокруг центра. При движении «планет» по эллиптическим траекториям угловая скорость многоугольника максимальна в моменты, когда «планеты» одновременно проходят через перигелии своих орбит. При таком неравномерном вращении многоугольника длины его сторон периодически изменяются.

В верхней части рис. 8 показаны примеры таких точных решений для системы трех (слева) и четырех (справа) «планет». При движении по эллипсам в каждый момент тела находятся в вершинах соответственно правильного треугольника и квадрата. Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым каждая из «планет» двигалась бы под действием силы тяготения одной лишь «звезды», если бы остальные «планеты» внезапно исчезли (относительно центра масс оставшихся двух тел). Эти оскулирующие эллипсы показаны для перигелиев действительных орбит и для точек $A$, $B$, $C$ (и $D$). Несовпадение истинных траекторий (показанных жирными линиями на рис. 8) с оскулирующими эллипсами явно показывает, что в данной модели массы «планет» сопоставимы с массой «звезды», т.е. здесь мы имеем дело с настоящей задачей многих тел, а не с тривиальным случаем нескольких спутников пренебрежимо малой массы.

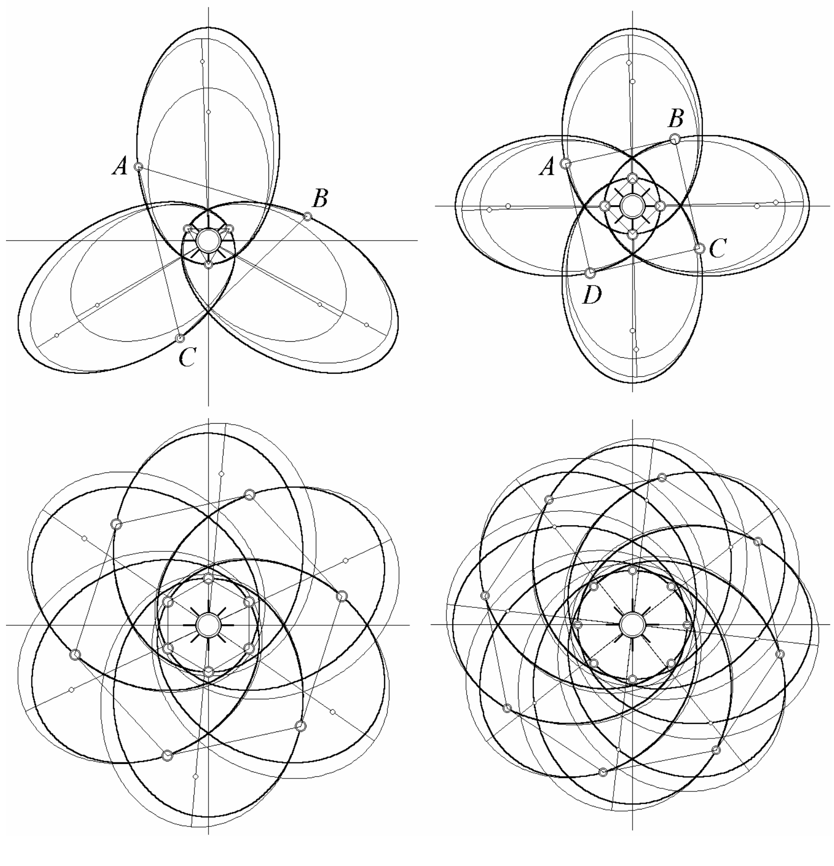



Рис. 8. Периодические кеплеровы движения одинаковых массивных «планет» в равносторонних конфигурациях, описываемые точными частными решениями задачи многих тел.

В нижней части рис. 8 показаны аналогичные движения в системах из шести и восьми «планет» в симметричных равносторонних конфигурациях. Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым двигались бы вокруг «звезды» отдельные «планеты» в отсутствие других «планет». В отличие от верхней части рис. 8, здесь оскулирующие эллипсы соответствуют системе отсчета, связанной со «звездой», а не с центром масс системы двух тел.

Замечательно, что рассматриваемые здесь точные решения задачи многих тел существуют и тогда, когда масса центрального тела равна нулю. Это значит, что система одинаковых «планет», находящихся в вершинах правильного многоугольника, может совершать такой великолепный хоровод под действием сил взаимного притяжения и в отсутствие «звезды». При этом каждое из тел движется под действием сил тяготения (приложенных к нему со стороны других движущихся тел) так, как если бы на него действовала единственная центральная сила, создаваемая неподвижным точечным источником, расположенным в центре системы. В частности, три одинаковых тела, находящиеся в вершинах правильного треугольника, могут синхронно описывать конгруэнтные эллипсы, большие оси которых образуют углы в $120^0$. В верхней части рис. 9 слева показаны орбиты тел $A$, $B$ и $S$ одинаковой массы в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, а справа – в системе отсчета, связанной с одним из тел ($S$).

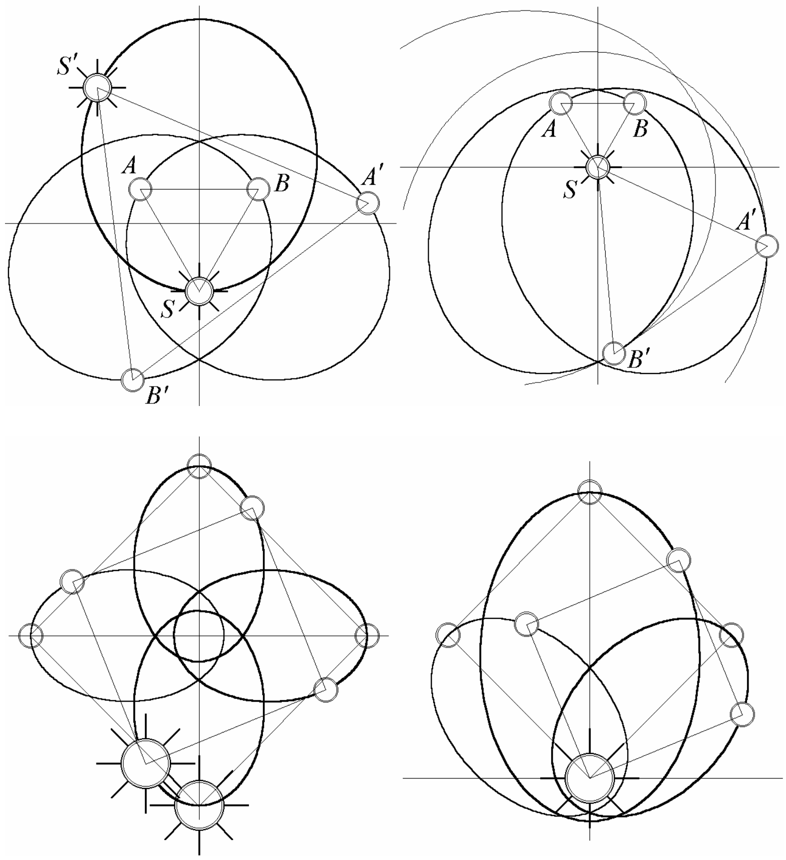



Рис. 9. Кеплеровы движения одинаковых тел в равносторонней конфигурации. Траектории тел показаны в системе отсчета, связанной с центром масс (слева), и с одним из тел (справа).

Система трех тел в равносторонней конфигурации замечательна тем, что в ней кеплеровы движения возможны даже при *различных массах* тел. Простое (но строгое) доказательство можно найти в статье автора “Regular Keplerian motions in classical many-body systems”, European Journal of Physics, vol. **21**, pp. 465 – 482 (2000). Оказывается, что и в этом случае полная сила тяготения, действующая на каждое из тел со стороны двух других, направлена к центру масс системы и обратно пропорциональна квадрату расстояния от него. Иначе говоря, можно считать, что в равносторонней конфигурации каждое тело находится в центральном поле тяготения, *неподвижный* точечный источник которого расположен в центре масс системы, несмотря на то, что это поле создается *движущимися* телами. При этом приобретаемые телами ускорения пропорциональны расстояниям тел от центра масс. Поэтому тела могут синхронно описывать геометрически подобные эллипсы (с общим фокусом в центре масс) так, чтобы равносторонняя конфигурация трех тел сохранялась во время движения. В частном случае эллипсы могут вырождаться в концентрические окружности. Для реализации кругового движения начальные скорости тел должны быть выбраны определенным образом.

При круговых движениях образуемый телами треугольник вращается равномерно и длины его сторон неизменны. В случае эллиптических движений треугольник вращается неравномерно: угловая скорость максимальна в моменты прохождения тел через перицентры – ближайшие к центру масс точки эллипсов. Вращаясь вокруг центра масс системы, этот треугольник как бы «дышит» – длина его сторон периодически изменяется.

На рис. 10 показан пример такого периодического движения трех тел различных масс ($m_A = 0.3\ m_S$, $m_B = 0.6\ m_A$). В инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс (левая часть рис. 10), тела описывают геометрически подобные эллипсы, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. В системе отсчета, связанной с наиболее массивным телом *S* (правая часть рис. 10), тела *A* и *B* описывают одинаковые эллипсы, показанные жирными линиями. Большие оси этих эллипсов образуют угол $60^0$. Тонкими линиями показаны (неравные) оскулирующие эллипсы для момента прохождения тел *A* и *B* через афелии своих орбит. По соответствующему эллипсу двигалось бы дальше в этой системе отсчета каждое из тел *A* и *B* вокруг *S*, если бы второе тело внезапно исчезло (т.е. под действием силы притяжения только к *S*).

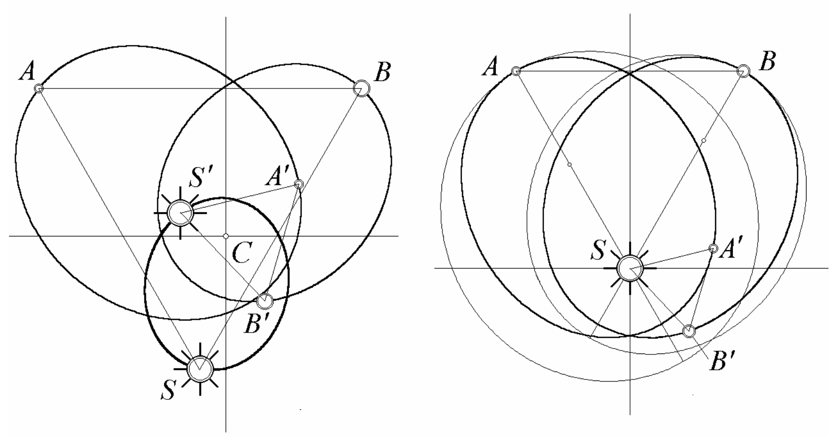



Рис. 10. Кеплеровы движения в равносторонней конфигурации системы трех тел неравных масс.

Такое регулярное периодическое движение трех тел неустойчиво по отношению к (малым) изменениям начальных условий, нарушающим симметрию системы. Неустойчивость движения в равносторонней конфигурации иллюстрируется примером на рис. 11.

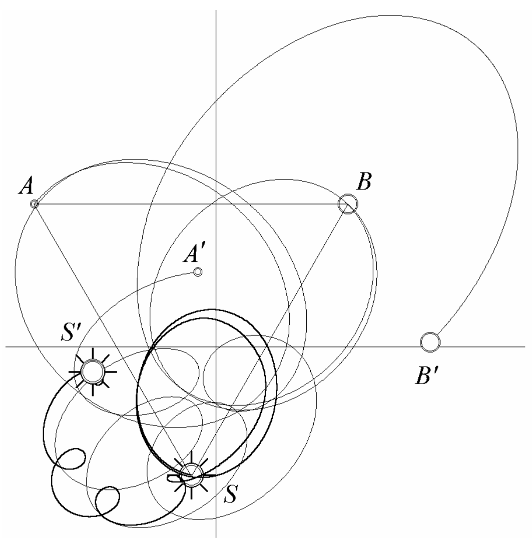



Рис. 11. Переход к нерегулярному движению в системе трех тел, совершавшей сначала движение, очень близкое к кеплеровому, описываемому точным частным решением задачи трех тел.

В частном случае, когда тела совершают круговые движения, и масса одного из тел пренебрежимо мала, последний рассмотренный пример системы трех тел в равносторонней конфигурации приводит нас к вопросу о треугольных точках либрации, часто упоминаемому в продвинутых курсах механики в связи с ограниченной задачей трех тел. Хорошо известно, что когда два массивных тела совершают круговые движения вокруг общего центра масс, существует пять положений (так называемых *точек либрации*), в которых пробное тело пренебрежимо малой массы может находиться в равновесии в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с массивными телами. Другими словами, вся система трех тел может подобно твердому телу (т.е. сохраняя конфигурацию) равномерно вращаться как целое вокруг центра масс. Три положения относительного равновесия пробного тела лежат на одной прямой с массивными телами (одна внутренняя и две внешних коллинеарных точки либрации). Два других расположены в вершинах равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий массивные тела. Во вращающейся системе отсчета относительное равновесие пробного тела в лагранжевых точках (точках либрации) обеспечивается совместным действием сил тяготения со стороны массивных тел и центробежной силы инерции.

Замечательно, что относительное равновесие тела в треугольных точках либрации устойчиво, если отношение масс тяжелых тел $m_1/m_2$ не превышает приблизительно 0.04. Для системы Луна – Земля $m_1/m_2 = 0.0123$, так что треугольные точки либрации устойчивы. Поэтому можно говорить даже о практическом значении соответствующего точного решения задачи трех тел для космической динамики благодаря возможности (хотя бы в принципе) запуска стационарного спутника в треугольную точку либрации системы Луна – Земля.

В Солнечной системе устойчивые треугольные точки либрации образованы также совместными гравитационными силами Юпитера – наиболее массивной из планет – и Солнца. Известны две многочисленные группы астероидов (их называют Греками и Троянцами), «захваченных» в этих точках и движущихся вокруг Солнца синхронно с Юпитером.

## *Космические катастрофы*

Звезды на небе представляются нам неподвижными. Но тщательные измерения показывают, что относительные положения «неподвижных» звезд медленно изменяются. Эти изменения свидетельствуют о движениях звезд в направлениях, перпендикулярных лучу зрения. Такие движения трудно заметить только потому, что расстояния до звезд чудовищно велики. Движение звезды вдоль луча зрения можно обнаружить благодаря эффекту Доплера – смещению линий спектра излучения звезды, пропорциональному лучевой скорости.

Солнце находится на периферии нашей Галактики, где звезды удалены одна от другой на очень большие расстояния. В предсказуемом будущем нам не грозит встреча с другой звездой. Но ближе к центру Галактики концентрация звезд значительно выше, и парные сближения звезд представляются не столь уж редкими событиями. Взаимное притяжение сообщает звездам ускорения, заставляя их отклоняться от прямолинейных траекторий. Относительно центра масс системы встречающиеся звезды прочерчивают открытые кеплеровы траектории – гиперболы с общим фокусом. После сближения каждая из звезд удаляется вдоль другой асимптоты той же гиперболы.

Одна из моделирующих программ пакета «Движение космических тел» позволяет воспроизвести подобное «звездное рандеву», которое может быть особенно интересным, если встречающиеся звезды обладают планетами. Гравитационные возмущения от проходящей поблизости звезды могут произвести катастрофические изменения в планетной системе.

На рис. 12 показан возможный сценарий встречи двух планетных систем, разыгранный на экране компьютера с помощью моделирующей программы. Масса звезды $S$, вокруг которой первоначально обращаются две планеты $A$ и $B$, вдвое больше, чем масса звезды-«пришельца» $Z$ с единственной планетой $P$. В левой части рисунка движения показаны в (неинерциальной) системе отсчета, где звезда $S$ неподвижна.

В результате встречи структура планетных систем радикально изменилась. Обращавшаяся вокруг звезды $S$ по почти круговой орбите внутренняя планета $A$ оказалась захваченной звездой-пришельцем $Z$, и когда звезды расходятся, вокруг $Z$ обращаются уже две планеты, $A$ и $P$. Судьба встречающихся планетных систем чрезвычайно чувствительна к начальным условиям. Достаточно лишь чуть-чуть изменить параметры при моделировании, чтобы получить совсем иной результат. Например, возможен сценарий, приводящий к полному обмену планетами между встречающимися звездами. В пакете моделирующих программ «Движение космических тел» можно найти множество захватывающих примеров возможных небесных катастроф.

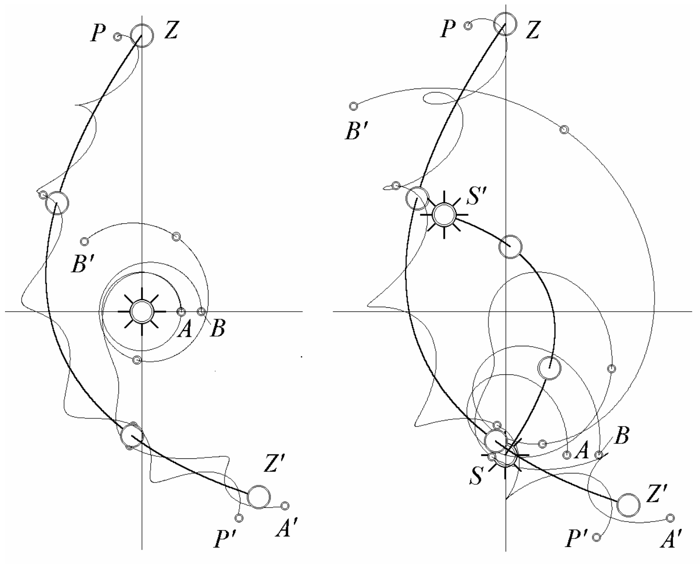



Рис. 12. Встреча двух планетных систем. Траектории тел в системе отсчета одной из звезд (слева), и в системе отсчета, где центр масс неподвижен (справа).

# *Великолепная «восьмерка»*

В заключение нашего несколько затянувшегося обсуждения поистине неисчерпаемой темы движений космических тел и, в частности, задачи многих тел обратимся к совсем свежему и неожиданному (скорее даже сенсационному) открытию в теоретической небесной механике.

Оказывается, что три тела одинаковой массы, связанные гравитационным взаимодействием, могут совершать удивительно простое плоское периодическое движение, гоняясь друг за другом по высоко симметричной замкнутой траектории, имеющей вид цифры 8 (рис. 13). На возможность такого движения по-видимому впервые было указано в статье C. Moore *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675 – 3679, 1993, и совсем недавно это движение было математически изучено детально в (пока еще не опубликованной в периодической печати) статье A. Chenciner and R. Montgomery *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses* («Замечательное периодическое решение задачи трех тел в случае равных масс»). Препринт статьи можно найти в сети по адресу http://orca.ucsc.edu/~rmont/annals.pdf).

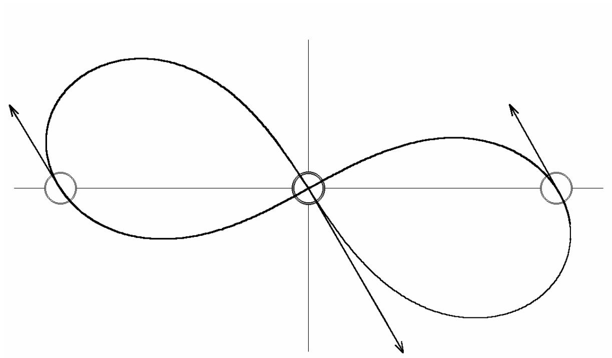


Рис. 13. Периодическое движение трех одинаковых тел, связанных гравитационным взаимодействием.

Для данного движения характерны нулевое значение полного момента импульса, и чрезвычайно богатый набор элементов симметрии. В некоторый момент тела находятся в коллинеарной конфигурации на равных расстояниях друг от друга (рис. 13). Скорости крайних тел в этот момент одинаковы по величине и направлению, скорость среднего вдвое больше и направлена противоположно. Тела возвращаются в исходную конфигурацию через некоторый интервал времени $T$, на протяжении которого каждое тело описывает целиком одну и ту же замкнутую восьмерку. Через интервал $T/3$ (треть полного периода) тела опять оказываются на той же прямой, что и в исходной коллинеарной конфигурации, но располагаются на этой прямой в ином порядке (происходят циклические перестановки). Еще одна прямая линия, на которой все три тела оказываются одновременно через интервал времени $T/6$ после прохождения через исходную коллинеарную конфигурацию, расположена симметрично исходной относительно продольной оси восьмерки. В промежутке между этими коллинеарными конфигурациями (через интервал $T/12$) тела образуют равнобедренный треугольник.

Наиболее удивительная и неожиданная черта движения по восьмерке заключается в его *устойчивости*. Если слегка изменить начальные условия (при сохранении нулевого значения полного момента импульса), движение утрачивает периодичность, но общий его характер (восьмеркообразная траектория) сохраняется. На рис. 14 показаны траектории тел (на протяжении одного почти полного цикла) в движении, которое происходит при слегка измененных направлениях начальных скоростей. Движение продолжается неограниченно долго без столкновений. Это значит, что движение по восьмерке устойчиво по отношению к малым изменениям начальных скоростей и положений тел.

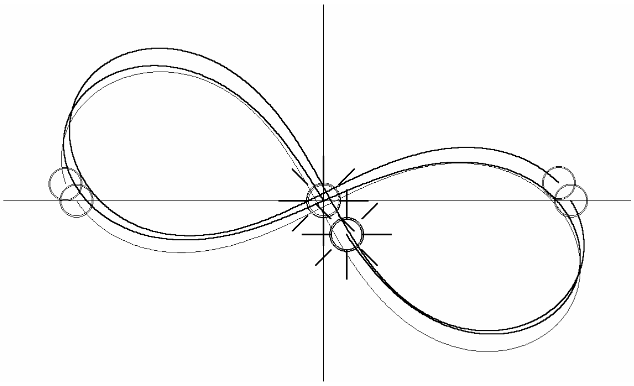


Рис. 14. Иллюстрация устойчивости движения по «восьмерке» трех тел одинаковой массы. Показаны траектории всех тел на протяжении почти полного цикла.