
Бутиков Е. И.

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЙ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Санкт-Петербург
2016

Предисловие

Предлагаемый вниманию читателя комплекс «Компьютерное моделирование движений космических тел» состоит из учебного пособия, методических материалов и моделирующих компьютерных программ. Программы пакета «Движения космических тел» занимают центральное место в нашем изложении небесной механики и астродинамики, а не просто полезное дополнение к учебнику. Разработанные автором методические материалы, лежащие в основе данной книги, и сопровождающие ее компьютерные программы использовались на протяжении многих лет в преподавании на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета и в Санкт-Петербургском исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. Англоязычная версия этого комплекса (“Planets and Satellites”) опубликована в США издательством Physics Academic Software и распространялась Американским Институтом Физики (American Institute of Physics). В 1999 году программы стали лауреатом конкурса журнала Computing in Science and Engineering. Пакет программ “Planets and Satellites” стал победителем Европейского конкурса на лучшую образовательную компьютерную программу в 2004 году (European Academic Software Award – EASA’2004).

Основная цель предлагаемого комплекса «Компьютерное моделирование движений космических тел» — помочь студентам лучше понять и изучить фундаментальные законы физики и различные математические методы исследования при их применении к движениям небесных тел. Захватывающий воображение мир движений естественных и искусственных космических тел — это замечательная космическая лаборатория, где изучаемые явления разыгрываются в наиболее «чистом» виде, не осложненном побочными факторами, неизбежными в земных лабораторных условиях. В небесной механике и космической динамике можно получить самые впечатляющие опытные подтверждения основных законов классической динамики.

Модульная структура книги и структура сопровождающих ее моделирующих компьютерных программ дают возможность разной глубины изучения предмета в зависимости от учебного плана, предварительной подготовки учащихся и имеющегося в распоряжении времени. Некоторые «продвинутые» программы позволяют изучать и анализировать широкий спектр проблем, идущих далеко за пределы тех, что рассматриваются в этой книге. Пакет программ может быть полезным не только для учащихся и их преподавателей, но и для научных работников.

Введение

С помощью предлагаемых вниманию читателя моделирующих программ изучаемое движение небесных тел отображается непосредственно на экране компьютера в определенном масштабе времени, выбранном из требования удобства наблюдения. Одновременно программы строят траекторию исследуемого движения. Компьютерное моделирование позволяет собственными глазами увидеть то, что, казалось бы, нам не дано никогда созерцать воочию. Оно создает наглядную легко запоминающуюся динамичную картину изучаемых явлений и описывающих их законов.

Некоторые из программ комплекса имеют демонстрационный характер и не требуют от студента каких-либо активных действий и предварительной подготовки. Однако большинство программ — это своего рода вычислительный эксперимент, для выполнения которого нужно самостоятельно сделать необходимые расчеты, выбрать подходящий режим работы программы и ввести с клавиатуры значения тех или иных параметров моделируемой системы и начальных условий. Поэтому комплекс представляет собой своего рода настольную исследовательскую лабораторию компьютерного моделирования, дополняющую традиционные формы преподавания физики. Компьютерные эксперименты дают возможность студентам легче освоить фундаментальные принципы физики и исследовать явления, изучение которых традиционными методами затруднительно, если вообще возможно.

Программы комплекса моделируют движения тел в центральном поле тяготения, строят годограф вектора скорости в кеплеровом движении; показывают прецессию орбиты спутника при искажении формы планеты, а также влияние атмосферы планеты на эволюцию орбиты спутника. Возможно построение семейств траекторий и исследование их свойств. Программа активного маневрирования позволяет моделировать спланированный космический полет, движение запущенного с орбитальной станции космического зонда с последующим возвращением на станцию, относительное движение тел на космических орбитах, и многое другое.

На примере движения компонент двойной звезды в разных системах отсчета рассмотрена задача двух тел. Самые удивительные эффекты в небесной механике проявляются при исследовании задачи трех (и многих) тел, тяготеющих друг к другу. Система трех (и более) взаимодействующих тел моделируется в нескольких программах комплекса. В частности, моделируется движение планеты в системе двойной звезды, взаимные возмущения планет, обращающихся вокруг одиночной звезды, «космические катастрофы» с захватом или обменом планетами при сближении двух планетных систем, и многое другое. Наряду с моделированием реальной планетной системы (Солнечной системы), можно построить собственную систему с произвольным числом планет, спутников, астероидов, комет, и наблюдать ее эволюцию.

В движениях небесных тел можно найти примеры хаотического поведения, когда в простой динамической системе, подчиняющейся простым и строгим детерминистическим законам, движение становится нерегулярным, хаотическим. Компьютерное моделирование позволяет продемонстрировать примеры такого динамического хаоса, когда малейшее изменение параметров системы или ее начального состояния радикально сказывается на долговременном поведении. В то же время программы дают возможность воспроизвести точные частные решения задачи трех тел (лагранжевы точки либрации) и многих тел в симметричных конфигурациях. В таких решениях все тела синхронно совершают регулярные движения по геометрически подобным коническим сечениям, как если бы каждое из тел находилось в статическом центральном поле тяготения (несмотря на то, что на

каждое тело действуют силы тяготения со стороны других движущихся тел).

Первая часть книги (главы 1 – 9) содержит описание моделирующих программ и их возможностей, а также рекомендации по их использованию. В этой части предлагаются эксперименты, демонстрирующие типичные примеры поведения моделируемых систем. Физические законы, описывающие эти системы, рассматриваются на вводимом, элементарном уровне, без погружения в серьезную математику. Эти главы нацелены на формирование физической интуиции. Читатель, не намеревающийся глубоко изучить предмет, может ограничиться этой частью книги. Однако для того, чтобы ответить на некоторые из предлагаемых вопросов и решить трудные задачи, может возникнуть необходимость изучения последующих разделов книги.

В Главах 10 – 14 второй части книги приведено более детальное (хотя и достаточно элементарное) описание фундаментальных принципов и физических законов, лежащих в основе моделируемых явлений. Количественная математическая формулировка физических законов и следствий из них позволяет предсказывать и объяснять результаты моделирующих экспериментов, а также рассчитывать значения параметров, которые должны быть введены в программы для получения желаемых результатов моделирования.

Глава 15 второй части содержит значительно более сложный материал, предназначенный для углубленного изучения предмета. Математический аппарат этой главы дает серьезную теоретическую основу для изучения классической механики и космической динамики средствами компьютерного моделирования.

Перечень моделирующих программ пакета «Движение космических тел»

- Обзор моделирующих программ
- Законы Кеплера
 - Первый закон Кеплера
 - Второй закон Кеплера
 - Третий закон Кеплера
- Годограф вектора скорости
- Баллистические снаряды и спутники
- Прецессия экваториальной орбиты
- Маневры на орбите и относительное движение
- Задача двух и многих тел
 - Двойная звезда
 - Планета со спутником
 - Двойная звезда с планетой
 - Система планет

Как работать с программами

Пакет моделирующих программ «Движение космических тел» разработан для операционного окружения Microsoft Windows. Все действия по управлению работой программ используют средства графического интерфейса этой операционной системы. Рекомендуется использовать графический режим высокого разрешения (не ниже 1024×768). Для установки программ нужно загрузить на компьютер и распаковать файл Software.zip в какую-либо временную папку. Затем нужно запустить (с правами администратора) процедуру инсталляции (файл setup.exe) и следовать инструкциям на экране. При правильной установке на рабочем столе Вашего компьютера появится иконка (ярлык) с надписью «Движение космических тел», с помощью которого можно открыть титульную страницу (меню) комплекса программ (см. рис. 1).

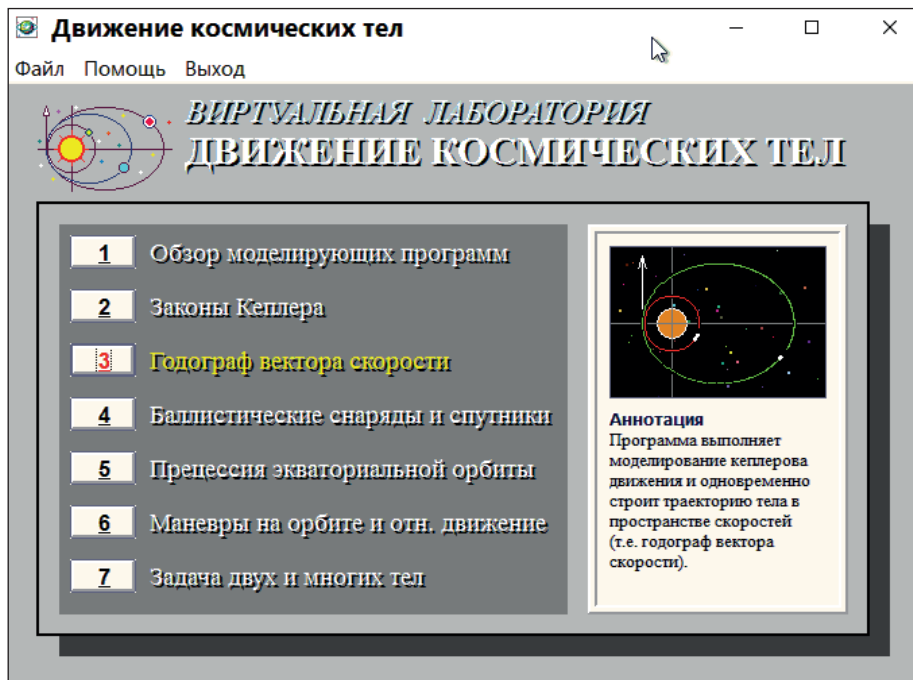


Рис. 1: Титульная страница пакета «Движение космических тел».

При наведении указателя мыши на название какой-либо из программ, в правом окне появляется ее краткое описание (аннотация). Щелчок по названию моделирующей программы (или по кнопке с ее номером) открывает соответствующую программу в новом окне. Движение космических тел, образующих моделируемую систему, в каждой из программ отображается в одном или нескольких окнах, положение и размер которых можно изменять на экране компьютера обычными средствами, например, перетаскивая мышью.

Как управлять работой программ

Ниже приведен краткий обзор основных действий по управлению программами, выполняемых при помощи командных кнопок и пунктов меню (общих для всех программ).

- **Строка меню** в верхней части каждого окна содержит команды, которыми можно пользоваться для управления работой программы. При работе в любой из программ можно вызвать контекстно-зависимую помощь по физике изучаемого явления нажатием клавиши **F1** на компьютере.
- **Командные кнопки**, расположенные ниже строки меню, обеспечивают быстрый доступ к некоторым наиболее часто используемым командам. Однократное нажатие на кнопку обеспечивает выполнение соответствующей команды.
 - **Старт, Пуск, Пауза** — команда начать моделирование, сделать паузу в моделировании, продолжить прерванное моделирование;
 - **Рестарт** — команда восстановить начальное состояние (начальные условия) для повторения моделирования;
 - **Стереть** (в программах, моделирующих орбитальные маневры и системы многих тел) — команда очистить окно (стереть старые траектории) и продолжить моделирование.
- **Полосы прокрутки** с надписями «Ускорить» и «Замедлить» позволяют варьировать скорость анимации для удобства наблюдения путем изменения временного масштаба, в котором производится моделирование движения.
- **Контекстное меню**, всплывающее при нажатии правой кнопки мыши в любом месте окна программы, дублирует ряд наиболее часто используемых команд.

Пункты меню, общие для всех программ, выполняют следующие действия:

- **Файл:**
 - **Выход** — команда прекратить выполнение программы и закрыть все окна;
 - **Печать** — команда открыть панель для настройки принтера и распечатки траекторий;
- **Ввод** — команда открыть специальную панель ввода параметров моделируемой системы и начальных условий;
- **Условия моделирования:**
 - **Черное небо** — изображать моделируемую систему на черном фоне, если поставлена «галочка» (рекомендуется), и на светлом фоне в противном случае;
 - **Звезды на небе** — показать «звезды» (условные), если поставлена «галочка»;
 - **Теоретическая орбита** — показать теоретически рассчитанную траекторию (или оскулирующую орбиту при моделировании возмущенного движения) перед началом моделирования (и при нажатии на кнопку «Пауза»), если поставлена «галочка»;
 - **Яркая точка** — показывать движущееся тело (спутник, планету) в виде маленького яркого кружка, если поставлена «галочка», и в виде цветного кружка с ободком в противном случае;

- **Траектории** — чертить фактические траектории (следы) движущихся тел (спутников, планет), если поставлена «галочка»;
- **Жирные следы** — показывать при моделировании фактические траектории небесных тел жирными линиями, если поставлена «галочка»;
- **Метки времени** — фиксировать положения движущихся тел на экране через определенные равные промежутки времени, если поставлена «галочка»;
- **Примеры** — открыть панель с предложением выбрать пример для моделирования из наборов заранее заготовленных примеров;
- **Zoom** — открыть дополнительное окно с увеличенным (“Zoom In”) или уменьшенным (“Zoom Out”) изображением моделируемой системы, или (в зависимости от программы) открыть дополнительное окно для изображения движения небесных тел в другой системе отсчета;
- **Закрыть** (в дополнительных окнах) — закрыть дополнительное окно и возвратиться в основное окно программы.

Для получения дополнительной информации о других органах управления, специфичных для отдельных программ пакета, вызывайте онлайн-контекстно-зависимую помощь непосредственно из соответствующей программы (пункт меню «Помощь»).

Получаемые в процессе моделирования орбиты и траектории можно распечатывать на принтере с более высоким, чем на экране, разрешением (с разрешением, которое допускает принтер). Необходимую информацию см. в разделе «Как распечатать орбиты и траектории».

Как создавать новые примеры

Работая с программами «Баллистические снаряды и спутники», «Активные маневры на орбитах», «Планета со спутником», «Двойная звезда с планетой», «Система планет», с помощью пункта меню «Примеры» можно открыть панель, в которой приводится список заранее заготовленных примеров, поставляемых вместе с программой. Кнопки «Основной набор» и «Расширенный набор» позволяют переключаться между двумя наборами примеров. При выборе какого-либо примера из списка, его краткое описание появляется в расположенном ниже окне. Чтобы сразу начать моделирование, сделайте двойной щелчок на выбранном примере. Если Вы хотите предварительно просмотреть параметры системы для выбранного примера, нажмите кнопку «Ок», в результате чего откроется панель ввода параметров со списком планет системы. Запустить выбранный пример (начать моделирование) можно, нажав кнопку «Ок» на панели ввода параметров.

Чтобы создать свой собственный пример (и сохранить его в файле на диске), в панели «Примеры» среди доступных наборов нужно выбрать «Модифицируемый набор». При этом становится доступен пункт «Редактировать» в меню панели примеров. Этот пункт позволяет Вам модифицировать существующие наборы примеров, удаляя из них одни примеры и добавляя новые, либо же создавать новые наборы. Выбирая пункт «Редактировать название и комментарий», можно изменить название и текст описания, не изменяя параметров моделируемой в этом примере системы. Пункты меню «Удалить пример», «Переместить вверх», «Переместить вниз» позволяют организовать набор в соответствии с Вашими потребностями.

Чтобы добавить в набор новый пример, нужно прежде всего разработать собственный проект запусков спутников или космического путешествия (в программе «Баллистические снаряды и спутники»), или активного маневрирования (в программе «Активные маневры на орбитах»), или сконструировать свою планетную систему (в программе «Система планет») с помощью панели «Ввод параметров», выполнить моделирование и при этом выбрать опции, обеспечивающие оптимальные условия наблюдения моделирования. Затем нужно открыть панель «Примеры» и в меню «Редактирование» выбрать пункт «Создать новый пример». Программа предложит Вам ввести для нового примера название и снабдить его кратким описанием, которое в дальнейшем будет появляться при просмотре созданных Вами наборов примеров. Нажав кнопку «Ок», Вы добавляете новый пример в конец списка.

Пункт меню «Переместить вверх» (и «Переместить вниз») позволит Вам поместить пример в должном месте списка. Чтобы сохранить модифицированный или вновь созданный набор примеров, выберите «Сохранить» в меню панели примеров. Программа предложит Вам ввести название для сохраняемого набора примеров (это название будет появляться в дальнейшем, когда Вы будете открывать набор), а также имя файла (и путь для него на диске), в котором будет сохранен набор примеров. Можно создать любое количество наборов. Чтобы впоследствии открыть любой из созданных Вами и сохраненных на диске примеров, в меню панели «Примеры» нужно выбрать пункт «Открыть примеры» и найти желаемый набор по имени файла, в котором он был сохранен.

Как распечатать орбиты и траектории

Чтобы вывести на принтер полученные при моделировании траектории, в меню «Файл» выберите пункт «Печать». Откроется специальная панель для настройки принтера и выбора установок. Вы можете задать желаемую ширину и высоту выводимого на бумагу рисунка и размеры полей на листе. Используйте привычные Вам единицы (сантиметры, дюймы, пункты или пиксели) — выбор можно сделать с помощью соответствующих кнопок. Задайте также толщину линий (в пикселях) для изображения траекторий. При желании можно на листе бумаги сверху напечатать заголовок (общий для всех рисунков, помещаемых на этот лист), а под каждым рисунком отдельную подпись. Для этого нужно впечатать желаемые тексты заголовка и подписей в соответствующие текстовые окна панели настройки печати. Рисунок можно также снабдить легендой (пояснением условных обозначений). Можно также выбрать опцию вывода на печать значений параметров моделируемой системы (программа печати поместит их под соответствующим рисунком).

Когда все установки сделаны, нажмите кнопку «Начать...». На панели появится приглашение «Продолжить...», после чего Вы возвращаетесь в главное окно программы и выполняете моделирование движения, траектории которого Вы хотите вывести на печать. Выбранные Вами условия моделирования (метки времени, жирные следы и т.п.) будут также использованы при печати рисунка. Когда при моделировании наступит последний момент движения тел, который Вы хотите включить в распечатываемый рисунок, нажмите кнопку «Закончить...» на панели «Печать», чтобы сохранить полученное при моделировании изображение в памяти компьютера.

Можно поместить несколько рисунков на одном листе бумаги. Чтобы ввести в память компьютера следующий рисунок для помещения на этот же лист бумаги, вместо кнопки «Послать на принтер», Вы возвращаетесь в главное окно программы и вводите новые значения параметров моделируемой системы (используя панель ввода параметров), и снова выбираете пункт «Печать...» в меню «Файл». Затем вводите установки для пе-

чати нового рисунка (оставшееся на листе бумаги свободное место, доступное для нового рисунка, программа укажет под окном «Высота»), снова нажимаете кнопку «Начать...» и повторяете действия, которые Вы выполняли при вводе в память компьютера предыдущего рисунка. Когда все рисунки для текущего листа бумаги введены в память, остается послать их на принтер нажатием кнопки «Послать на принтер».

В программах «Планета со спутником», Двойная звезда с планетой» и «Система планет» для распечатки траекторий порядок Ваших действий должен быть несколько изменен: нужно сначала выполнить моделирование движения (в выбранной системе отсчета) до того последнего момента, который Вы хотели бы отобразить на распечатываемом рисунке, и лишь после этого выбрать «Печать...» в меню «Файл».

Вместо вывода рисунков непосредственно на принтер, Вы можете записать числовые данные, полученные в ходе моделирующего эксперимента, в ASCII файл для использования их в дальнейшем. Чтобы сделать это, поставьте «галочку» в боксе «Печать в ASCII файл» на панели настроек печати, введите имя файла, в который будут записаны данные, и нажмите кнопку «Начать...». Затем вернитесь в главное окно программы и выполните моделирование. Когда будет достигнут нужный Вам последний момент моделирования, нажмите кнопку «Послать на принтер», чтобы послать данные в файл. Впоследствии по этим данным Вы сможете строить графики и траектории, используя какие-либо подходящие для этой цели программные продукты.

Часть I

Обзор моделирующих программ

Глава 1

Моделирование кеплеровых движений

Три основных закона движения тела в центральном поле тяготения, убывающем с расстоянием обратно пропорционально квадрату удаления тела от силового центра (законы Кеплера) иллюстрируются в первых трех моделирующих программах пакета «Движение космических тел». Еще одна программа этого цикла «Годограф вектора скорости», посвященная интересному свойству кеплерова движения, касающемуся формы орбиты в пространстве скоростей, рассматривается в следующей главе.

1.1 Введение. Немного истории

Во все времена, с глубокой древности и до наших дней, вид звездного неба будоражил воображение людей своей красотой и величием. Астрономия, древнейшая и в то же время вечно молодая наука, открывает перед человеком этот чарующий и прекрасный мир галактик и квазаров, звезд и туманностей, комет и астероидов, планет, окруженных спутниками и загадочными кольцами.

Исторически одна из первых задач астрономии заключалась в разумном объяснении странного наблюдаемого движения планет — своего рода «небесных скитальцев», светил, казалось бы бессистемно блуждающих по небу, случайным образом изменяющих свое положение относительно небесных соседей — неподвижных звезд. Над поиском истинных закономерностей планетных движений астрономы безуспешно бились на протяжении почти двух тысячелетий вплоть до Кеплера, открытия которого сыграли неоценимую роль в истории науки.

Датский астроном Тихо Браге (1546 — 1601) в течение почти всей сознательной жизни занимался тщательными измерениями видимых положений планет относительно звезд. Его многолетние записи небесных координат планет послужили тем сырым материалом, при помощи которого немецкому астроному Иоганну Кеплеру (1571 — 1630) удалось установить форму кривых, изображающих орбиты планет Солнечной системы. Кеплер посвятил большую часть жизни анализу составленных Браге таблиц положений планет с тем, чтобы найти математическую схему, которая описывала бы движения планет.

Кеплер начал свой многотрудный анализ астрономических таблиц с попыток установить, по какой траектории перемещался Марс за время двадцатилетних наблюдений



Рис. 1.1: Тихо Браге и Иоганн Кеплер

Браге. Кеплер перепробовал множество вариантов, причем каждая попытка требовала длительных и изнурительных вычислений. Все измерения Браге были сделаны с Земли. Кеплер разделял точку зрения Коперника о том, что Земля вращается вокруг собственной оси, двигаясь одновременно по орбите вокруг Солнца. Поэтому при поиске истинной траектории планеты ему приходилось переводить измеренные Браге углы между видимыми с Земли положениями планеты и неподвижными звездами в координаты планеты в гелиоцентрической системе, где Солнце неподвижно, а Земля обращается вокруг него. Задача была особенно трудной потому, что в те времена было невозможно непосредственно измерять расстояния от Земли до Солнца (т.е. определять орбиту Земли). Почти двадцать лет понадобилось Кеплеру для того, чтобы из длинных столбцов цифр раскрыть одну из глубочайших тайн мироздания — установить законы обращения планет вокруг Солнца.

После многочисленных неудачных попыток, каждый раз начиная свои поиски заново, Кеплер предположил однажды, что скорость движения планеты вокруг Солнца переменна, отвергнув древнюю и привычную догму о том, что всякое идеальное движение должно быть равномерным. В своих расчетах Кеплер пользовался воображаемой «спицей», соединяющей Солнце с планетой (теперь такой математический объект мы называем радиусом-вектором). Он обнаружил, что эта «спица» движется таким образом, что за равные промежутки времени «заметает» равные площади. Сейчас этот вывод известен как *второй закон Кеплера*, или *закон площадей*.

Еще через несколько лет неутомимого добросовестного труда и безмерного терпения, в результате длительных вычислений, Кеплеру удалось найти простые траектории, которые согласовывались с наблюдаемыми движениями всех известных в то время планет. Он получил свой наиболее важный результат, известный теперь как *первый закон Кеплера* — установил, что планеты движутся по эллиптическим орбитам. Один из фокусов является общим для всех эллиптических орбит, и в нем находится Солнце. Эти два закона были опубликованы Кеплером в книге «Новая астрономия», изданной в Праге в 1609 году. «Не переставая ощупывать все места окружающего мрака, я вышел, наконец, на яркий свет истины» — так пишет Кеплер о своих открытиях.

Затем Кеплер попытался найти связь между размерами орбит разных планет и периодами их обращения вокруг Солнца. Еще десятилетие упорных трудов и множество попыток привели его наконец к открытию, которое теперь мы называем *третьим законом Кеплера*: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца (больших полуосей их эллиптических орбит). Обнаружив эту закономерность, Кеплер был поражен той точностью, с которой она выполнялась для всех известных в то время планет Солнечной системы. Третий закон был опубликован Кеплером в 1619 году в книге «Гармония мира».

Открытые Кеплером законы планетных движений были выдающимся научным достижением. Результаты многолетних наблюдений и многие тысячи измерений оказались сконцентрированными в четкой системе простых правил. Завершился период изучения движений планет, который можно определить как геометрический или кинематический.

Но теперь после старого вопроса о том, как движутся планеты, во весь рост вставал новый вопрос о том, почему они движутся именно так. Какими причинами объясняется описываемое законами Кеплера движение планет вокруг Солнца, движение спутников Юпитера вокруг планеты-хозяина, движение Луны вокруг Земли?

Необходимость поиска физических причин наблюдаемых планетных движений ясно сознавал и Кеплер. Он писал по этому поводу: «Если Солнце есть источник света, то оно также есть источник движения, который тем сильнее движет планеты, чем ближе они находятся». Сознвая важность солнечного тяготения, Кеплер понимал его роль искаженно, считая, что вращающееся вокруг оси Солнце подобно магниту увлекает за собой планеты.

Установленная в астрономии простота в движении планет насущно требовала настоящего научного объяснения на основе фундаментальных законов природы. Попытки объяснения этой простоты, в конце концов увенчавшиеся успехом, занимают особое место в истории науки. В сущности, динамическое объяснение движений планет можно рассматривать как начало современной теоретической физики.

Закон инерции, впервые четко осознанный великим итальянцем Галилеем (1564 – 1642), открывал путь к основным законам динамики. Но этот безусловно выдающийся шаг был сделан Галилеем лишь наполовину: он считал равномерное прямолинейное движение материальных тел их естественным состоянием лишь в земных условиях, полагая, что для планет естественным движением, т.е. движением «по инерции», которое не требует специальных «причин», является равномерное круговое движение.

Тем не менее, открытие Галилея позволило другим ученым по иному взглянуть на причины планетных движений. Если Кеплеру для объяснения движения планет было необходимо представление о «подталкивающей» силе и он придумывал невидимые спицы, которые соединяли Солнце с планетами и влекли их по орбитам, то теперь, после открытий Галилея, требовалось объяснить не само движение, а описываемый законами Кеплера характер изменения этого движения. Именно в таком направлении и удалось найти правильную связь между тяготением и движением планет.

Окончательно эта связь между тяготением и движением была установлена великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643 – 1727), изложившим итоги всех сделанных к тому времени открытий в области изучения движения земных и небесных тел в своем знаменитом труде «Математические основы естествознания», опубликованном в 1687 году. В России эта книга более известна как «Математические начала натуральной философии». Такое название она получила в первом (и по сей день единственном) переводе с языка оригинала (латыни) на русский язык, сделанном замечательным русским математиком, механиком и кораблестроителем академиком А.Н. Крыловым в 1915 году.

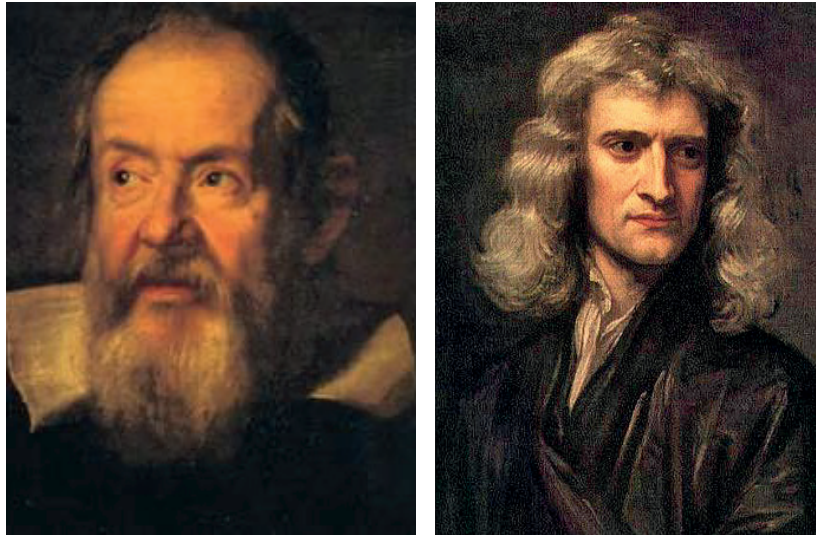


Рис. 1.2: Галилео Галилей и Исаак Ньютон

Во времена Ньютона постепенно сформировался новый взгляд на проблему движения тел — большая часть усилий ученых была направлена теперь на отыскание закона сил, действующих между Солнцем и планетами, из которого получались бы найденные Кеплером орбиты планет.

Ньютон установил количественную форму закона *всемирного тяготения* — сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Он также показал, что кеплеровы движения планет и спутников можно получить математически как следствие основных законов динамики (теперь мы называем их *законами Ньютона*) для движения под действием центральной силы всемирного тяготения. Более того, он нашел, что в центральном поле тяготения тела могут двигаться как по эллипсам (в частном случае по окружностям), так и по другим коническим сечениям — параболам и гиперболам. В частности, по таким открытым орбитам движутся кометы, прилетающие в окрестность Солнца из-за пределов Солнечной системы.

Ньютон продемонстрировал, что теория тяготения успешно объясняет как законы Кеплера, так и многие более сложные явления, вплоть до взаимных возмущений планетных орбит, наблюдаемых неравномерностей в движении Луны, и даже явление океанских приливов.

Ньютон показал, что силы тяготения, действующие между небесными телами, объясняют также хорошо знакомое всем падение тел на землю (вспомните знаменитую легенду о яблоке), т. е. связал *всемирное тяготение* с явлением *земной тяжести*. Изучая движение Луны, он доказал, что притяжение Луны к Земле, управляющее движением Луны, есть не что иное как знакомая нам сила тяжести на Земле, которая простирается и до Луны, убывая обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. С тех пор с именем Ньютона связана целостная картина мироздания, в которой окружающий нас мир рассматривается как механическая система, подчиняющаяся строгим законам, на основании которых ее поведение можно проследить и предсказать на будущее.

1.2 Задача Кеплера и компьютерное моделирование

Законы Кеплера математически выражают поразительную простоту планетных движений, наблюдаемых в гелиоцентрической (связанной с Солнцем) системе отсчета. Динамическое объяснение Ньютоном этой замечательной простоты можно без преувеличения считать началом современной физической науки. Это был поистине фантастический прорыв в понимании Природы. Но и поныне движения небесных тел — малых и больших планет Солнечной системы, их спутников, комет, астероидов, а в наше время также и рукотворных космических кораблей и искусственных спутников — дают наиболее впечатляющие опытные подтверждения законов классической ньютоновской механики. В этой замечательной космической лаборатории все движения наблюдаются в наиболее «чистом» виде, не осложненные побочными факторами вроде трения, сопротивления воздуха и т. п., неизбежными в условиях земной лаборатории.

Теоретический фундамент, на котором построена небесная механика и ее современная ветвь механика космического полета — это закон всемирного тяготения и законы Ньютона, составляющие основу классической динамики. Второй закон Ньютона дает дифференциальные уравнения, математически описывающие движения тел. Замечательно, что для движения тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра (так называемая *задача Кеплера*), возможно получение решения уравнений движения в аналитическом виде.

Расчет движения двух небесных тел, находящихся под действием сил взаимного тяготения, математически сводится к задаче о движении одного тела в центральном ньютоновском поле тяготения. Поэтому так называемая *задача двух тел*, связанных гравитационным взаимодействием, также имеет аналитическое решение, в отличие от задачи трех (и многих) тел, для которой аналитическое решение в общем случае не существует.

Любое движение в ньютоновском центральном поле тяготения происходит по одному из так называемых *конических сечений* — кривых, которые получаются при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса получаются окружность, эллипс, парабола и гипербола. Периодическим движениям планет и спутников соответствуют замкнутые *эллиптические* (в частном случае *круговые*) орбиты.

Предельному случаю сильно вытянутых эллиптических орбит со все более и более далеким вторым фокусом соответствует разомкнутая *параболическая* траектория (второй фокус эллипса при таком предельном переходе постепенно удаляется в бесконечность). В этом случае по мере удаления тела его скорость уменьшается до нуля.

Если же тело приближается к силовому центру из бесконечности, его движение происходит по одной из ветвей *гиперболы*. В этом случае, изменив направление движения под действием силы тяготения, тело снова уходит в бесконечность. Движение по уходящей в бесконечность ветви гиперболы можно также получить, сообщив находящемуся на конечном расстоянии телу достаточно большую скорость, превосходящую так называемую скорость освобождения.

Аналитическое решение задачи Кеплера о движении тела (планеты, спутника) под действием силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра, сегодня можно найти почти в любом учебнике по общей физике или теоретической механике (см., например, т. 1 «Курса общей физики» Д.В. Сивухина). Это одна из немногих практически важных задач, допускающих точное аналитическое решение. Но для изучения в общем курсе физики это решение оказывается слишком сложным. Поэтому очень полезной при изучении классической динамики представляется возможность

наглядной демонстрации закономерностей движения планет и спутников на компьютере путем численного моделирования, основанного на простом для понимания алгоритме решения уравнений движения в центральном поле тяготения.

Более того, чтобы увидеть реальные кеплеровы движения, нужно, подобно знаменитому Тихо Браге, месяцами и даже годами и десятилетиями вести астрономические наблюдения. Затем придется пересчитать результаты выполненных на Земле наблюдений в подходящую систему отсчета, нанести точки на бумагу и соединить их, чтобы получить истинную траекторию. Ясно, что это удел избранных — такое доступно лишь немногим астрономам-профессионалам. Замечательно, что компьютерное моделирование движений небесных тел изящно решает эту проблему: экран компьютера позволяет своими глазами увидеть то, что, казалось бы, нам никогда не дано созерцать воочию. Такую возможность Вы получите, работая с пакетом компьютерных программ «Движение космических тел». Моделирующие программы пакета дают наглядные живые динамические иллюстрации всех рассматриваемых в данной книге явлений.

Разумеется, компьютер может показать нам на экране движение не реальной системы, а лишь ее математической модели. И все-таки такие моделирующие компьютерные программы можно рассматривать как еще одно экспериментальное подтверждение классической динамики (правда не в реальном, а в вычислительном эксперименте). В самом деле, программа рассчитывает, скажем, движение планеты вокруг Солнца, «ничего не зная» о законах Кеплера — они в программе не используются. Все, на чем основано численное моделирование планетных движений — это законы динамики и закон всемирного тяготения. И если мы видим, что моделируемое на экране движение происходит по одному из конических сечений в соответствии с законами Кеплера, то это означает, что данный вычислительный эксперимент подтверждает справедливость заложенных в модель законов физики, а тем самым и правильность наших представлений о моделируемом природном явлении.

1.3 Первый закон Кеплера

В моделирующей компьютерной программе пакета «Движение космических тел», иллюстрирующей первый закон Кеплера, с помощью вычислительного эксперимента доказывается, что траектория планеты — это именно эллипс, а не овал или какая-либо иная замкнутая кривая. Доказательство основано на известном геометрическом свойстве эллипса, согласно которому для любой точки эллипса сумма расстояний до двух заданных точек (фокусов) имеет одно и то же значение (это утверждение можно рассматривать как определение эллипса).

В левой части экрана (см. рис. 1.3) путем численного интегрирования уравнений движения строится траектория планеты или спутника. Через равные промежутки времени к центру планеты проводятся отрезки из силового центра (центра Солнца), где согласно первому закону Кеплера должен находиться один из фокусов эллиптической орбиты. На приводимом рисунке эти радиусы-векторы планеты показаны стрелками. Одновременно проводятся отрезки, соединяющие центр планеты со вторым фокусом орбиты. Эти отрезки на рисунке показаны штриховыми линиями.

В правой части экрана эти же отрезки от данной точки орбиты до фокусов отложены вдоль одной прямой друг за другом, чтобы было легко определить на глаз сумму длин этих отрезков. Мы видим, что в процессе работы программы эта сумма оказывается одинаковой для всех точек орбиты. Отсюда следует, что траектория, получающаяся в результате численного интегрирования уравнения второго закона Ньютона для движения

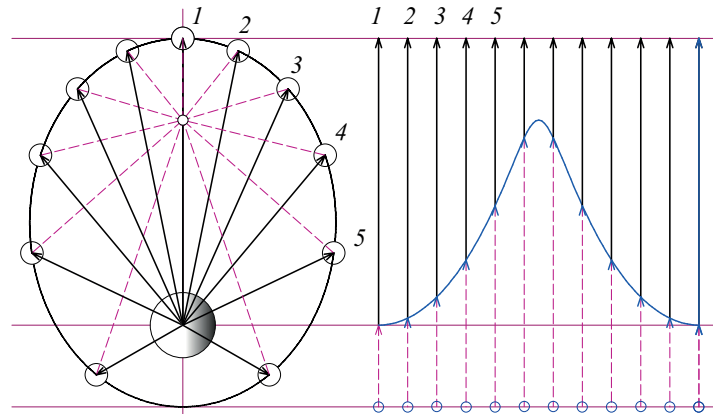


Рис. 1.3: Кеплерова орбита планеты или спутника (слева) и геометрическое сложение отрезков от фокусов до планеты. Совпадающие цифры в левой и правой частях соответствуют одним и тем же моментам времени.

под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, действительно представляет собой эллипс, один из фокусов которого находится в силовом центре. Сумма длин отрезков от любой точки траектории до фокусов равна большой оси этого эллипса.

Движение планеты отображается при моделировании в определенном масштабе времени. Поэтому при наблюдении ясно видно, как изменяется гелиоцентрическая скорость планеты при движении по орбите. Отрезки от фокусов до планеты проводятся через равные промежутки времени. Поэтому об изменениях скорости можно судить даже по статической картинке, остающейся на экране по окончании моделирования. Кривую в правой части рис. 1.3, разделяющую сплошные и штриховые отрезки, можно рассматривать как график временной зависимости расстояния планеты от Солнца при движении по орбите (если считать, что ось ординат на нем направлена вниз).

Чтобы при моделировании движения проводить отрезки к планете из второго фокуса (штриховые линии на рис. 1.3), нужно знать, где находится этот фокус. Положение второго фокуса (для заданного значения начальной скорости) программа рассчитывает заранее на основании законов сохранения. В таком теоретическом расчете уже использовано предположение о том, что траектория представляет собой эллипс. Поэтому может возникнуть сомнение, нет ли здесь порочного круга: можно ли считать, что дальнейший численный расчет движения в моделирующей программе действительно дает доказательство того, что траектория — это эллипс? Чтобы отвергнуть такие сомнения, достаточно осознать, что для справедливости нашего геометрического доказательства эллиптичности орбиты важно лишь то, что такая точка (второй фокус) существует. Каким образом найдено положение этой точки, совершенно не существенно.

Еще одно подтверждение тому, что наблюдаемое при моделировании движение происходит именно по эллипсу, можно получить, если перед моделированием выбрать в меню опцию предварительного построения на экране теоретически рассчитанной траектории, т.е. траектории, полученной путем аналитического решения задачи Кеплера. В процессе моделирования мы видим, что численно рассчитываемая траектория действительно совпадает с эллипсом, построенным предварительно с помощью аналитического решения.

Важно, что закон обратной пропорциональности силы всемирного тяготения квадрату расстояния справедлив не только для материальных точек, т.е. тел, находящихся на расстояниях, значительно превосходящих их размеры, но и для любых тел со сферически симметричным распределением масс. При расчете гравитационного взаимодействия таких сферических тел можно считать, что их массы сосредоточены в центрах тел. Поэтому решение задачи Кеплера (как аналитическое, так и численное, иллюстрируемое моделирующей программой) применимо не только к движению планет вокруг Солнца, где расстояния между тяготеющими телами велики по сравнению с их размерами, но и к движению спутников планет по низким орбитам, так как распределение плотности вещества внутри планет с хорошей точностью можно считать сферически симметричным. При этом, разумеется, нет необходимости, чтобы сам спутник (или космический корабль) был сферически симметричным, так как в любом случае его размеры малы по сравнению с расстоянием до центра планеты, и его можно рассматривать как материальную точку. Другими словами, поле тяготения планеты на протяжении размеров корабля можно полагать однородным, а силу тяготения считать приложенной в центре масс корабля.

Движение планет вокруг Солнца почти целиком определяется силами их притяжения к Солнцу. Действующие между планетами силы тяготения приводят лишь к сравнительно небольшим отклонениям от законов Кеплера. В случае звезды с единственной планетой ее движение было бы в точности кеплеровым. Но что можно сказать о движении спутника планеты? В какой мере это движение можно считать кеплеровым? Ведь помимо силы притяжения к планете на спутник действует сила притяжения к Солнцу. Например, сила притяжения к Солнцу нашего естественного спутника — Луны, как легко подсчитать, превосходит силу притяжения к Земле. В каком же смысле можно говорить об обращении Луны вокруг Земли?

Дело в том, что при описании движения спутника планеты мы рассматриваем его движение относительно планеты, а не относительно Солнца. А система отсчета, связанная с планетой, не является инерциальной: она вместе с планетой подвержена ускорению, направленному к Солнцу. Когда спутник находится близко к планете, солнечное притяжение сообщает ему почти такое же ускорение, как и самой планете. Поэтому вмешательство Солнца в движение спутника относительно планеты оказывается незначительным: в главных чертах это движение описывается (в связанной с планетой системе отсчета) такими же законами, как и движение планет вокруг Солнца, т.е. законами Кеплера.

В движении спутника планеты тяготение к Солнцу проявляется лишь в некотором возмущающем ускорении. Это не ускорение, сообщаемое спутнику Солнцем, а разность ускорений, сообщаемых Солнцем спутнику и планете. Иначе говоря, кеплерово движение спутника относительно Земли возмущается не самим по себе солнечным тяготением, а лишь его неоднородностью. В земных делах неоднородность поля тяготения Солнца обнаруживает себя (вместе с неоднородностью поля тяготения Луны) в морских приливах. На протяжении низкой околоземной орбиты спутника неоднородность поля тяготения Солнца незначительна. Поэтому при расчете движения спутника или космического корабля вблизи планеты оказывается возможным в первом приближении учитывать его притяжение только планетой, т.е. считать движение спутника кеплеровым в системе отсчета, связанной с планетой.

В моделирующей программе, иллюстрирующей первый закон Кеплера, начальная скорость тела (планеты или спутника) направлена трансверсально, т.е. перпендикулярно радиусу-вектору начального положения тела. При таком направлении начальной скорости начальная точка (точка 1 на рис. 1.3) находится на одном из концов большой оси эллипса.

Величину скорости v_0 в начальной точке можно задавать в программе произвольно по своему усмотрению. Вводимое значение начальной скорости нужно выражать в единицах круговой скорости $v_{кр}$ (для данной высоты начальной точки). Если задать значение начальной скорости, равное единице (т.е. $v_0 = v_{кр}$), то дальнейшее движение будет происходить равномерно по круговой орбите. Если выбрать значение, большее единицы (т.е. $v_0 > v_{кр}$), то начальная точка будет ближайшей к силовому центру точкой эллипса. Это *перигелий* для планетной орбиты, или *перигей* для орбиты спутника Земли. Другой конец большой оси будет в этом случае *афелием* (или *апогеем* в случае спутника Земли), т.е. наиболее удаленной от силового центра точкой орбиты. Если задать начальную скорость, меньшую круговой ($v_0 < v_{кр}$), то эти точки поменяются местами, т.е. начальная точка будет наиболее удаленной от силового центра точкой орбиты, а противоположный конец большой оси эллипса будет ближайшей к центру точкой орбиты.

Движение по замкнутым эллиптическим или круговым орбитам происходит тогда, когда полная механическая энергия отрицательна (при условии, что потенциальная энергия принимается равной нулю на бесконечно большом расстоянии от силового центра). В противном случае движение тела будет инфинитным (траектория тела уходит в бесконечность). Аналитическое решение задачи о движении в центральном поле тяготения показывает, что траектория при этом будет (также как и эллипс) представлять собой кривую второго порядка (параболу при нулевом значении полной энергии и гиперболу при положительной полной энергии). Это утверждение обычно называют *обобщенным первым законом Кеплера*, согласно которому при любых значениях полной энергии траектория представляет собой одно из *конических сечений*. Действительно, при пересечении кругового конуса плоскостью сечение будет окружностью, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, или эллипсом, если нормаль к плоскости наклонена к оси конуса на некоторый угол, меньший угла раствора конуса. По мере увеличения угла наклона эллипс становится все более вытянутым. Если секущая плоскость параллельна образующей конуса, сечением будет парабола. При еще большем наклоне секущей плоскости в сечении получаются две ветви гиперболы.

Компьютерная программа, иллюстрирующая первый закон Кеплера, позволяет моделировать и эти случаи. Для этого нужно выбрать в выпадающем списке меню пункт «Параболическое движение» либо «Гиперболическое движение». Когда начальная скорость тела превосходит скорость освобождения ($v_0 > v_{осв} = 1.41 v_{кр}$), тело удаляется в бесконечность по гиперболической траектории. Моделирующая программа позволяет убедиться в том, что это действительно гипербола, на основании известного геометрического свойства, которое можно рассматривать как определение гиперболы: для любой точки такой кривой разность расстояний от двух заданных точек (фокусов) одинакова. Отрезки в правой части экрана в этом случае расположены так, что на глаз легко видеть неизменное значение их разности. Эта разность длин отрезков равна расстоянию между вершинами двух ветвей данной гиперболы. Перед началом моделирования программа строит соответствующую теоретически рассчитанную гиперболу (обе ее ветви) и асимптоты этой гиперболы, если Вы выбрали в меню соответствующую опцию.

Поскольку для начальной точки вектор скорости направлен трансверсально (перпендикулярно радиусу-вектору), эта точка будет вершиной гиперболы, по которой тело удаляется в бесконечность. По мере удаления гиперболическая траектория приближается к своей прямолинейной асимптоте: на большом расстоянии от силового центра движение тела становится прямолинейным и равномерным. При моделировании об этом можно судить по почти одинаковым расстояниям между соседними положениями тела, фиксируемыми на экране через равные промежутки времени. Постоянную скорость такого дви-

жения v_∞ называют *гиперболическим избытком скорости*. С помощью закона сохранения энергии можно показать, что эта скорость равна квадратному корню из разности квадратов начальной скорости и скорости освобождения:

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - v_{\text{осв}}^2}. \quad (1.1)$$

Чтобы при моделировании можно было получить на экране всю гиперболическую траекторию (а не только ту ее половину, по которой тело удаляется от силового центра), программа поступает следующим образом. Когда тело удаляется от начальной точки за пределы отображаемого на экране окна, программа изменяет знак одной из координат на противоположный (а именно, знак координаты, направленной вдоль начальной скорости), и одновременно изменяет знак другой проекции скорости. Поэтому наблюдаемое далее движение тела происходит в направлении к начальной точке вдоль второй половины той же гиперболы.

Для случая $v_0 = v_{\text{осв}}$ траектория представляет собой параболу. Доказательство основано на геометрическом свойстве, согласно которому для любой точки параболы расстояние от фокуса (от силового центра) равно расстоянию до некоторой прямой (директрисы). Выполняемое в правой части экрана геометрическое построение наглядно показывает, что при $v_0 = v_{\text{осв}}$ это действительно так.

Подчеркнем, что описанное выше моделирование применимо как к движению планеты вокруг Солнца (в гелиоцентрической системе отсчета), так и к движению спутника вокруг Земли (в геоцентрической системе отсчета).

Контрольные вопросы

- 1. Форма орбиты при кеплеровом движении.** Программа рассчитывает движение тела под действием центральной силы, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния от силового центра. На каком основании можно утверждать, что наблюдаемая в данной моделирующей программе замкнутая орбита тела (планеты ли спутника) представляет собой именно эллипс, а не овал или какую-либо иную замкнутую кривую?
- 2. Ориентация большой оси эллиптической орбиты и положение перигея и апогея.** Как ориентирована большая ось эллиптической орбиты спутника, если скорость в начальной точке (начальная скорость) направлена горизонтально, т.е. перпендикулярно радиусу-вектору? Где расположены перигей и апогей эллиптической орбиты по отношению к начальной точке (точке запуска)? Зависят ли положения перигея и апогея от величины начальной скорости? Рассмотрите случаи, в которых начальная скорость для данной начальной точки больше и меньше чем круговая скорость. При каких значениях начальной скорости силовой центр будет находиться в ближнем к начальной точке фокусе эллипса, и при каких — в дальнем?
- 3. Круговая скорость.** Как можно рассчитать начальную скорость, при которой дальнейшее движение будет происходить по круговой орбите? Как величина круговой скорости зависит от радиуса орбиты? От массы центрального тела? От массы тела, обращающегося по орбите? Как нужно направить начальную скорость (по величине равную круговой скорости) чтобы тело действительно двигалось по круговой орбите?

4. **Изменения скорости при движении тела по эллиптической орбите.** На изображении траектории, выводимом на экран при работе данной программы, положения планеты (или спутника) зафиксированы через равные промежутки времени. Какие выводы можно сделать на основании получаемого на экране изображения о том, как изменяется скорость тела при движении по эллиптической орбите?
5. **Физический смысл полученного графика.** Какой смысл можно придать линии в правой части экрана, которая разделяет отрезки, соответствующие расстояниям до фокусов? Напомним, что отрезки проводятся через равные промежутки времени. Можно ли эту линию рассматривать как график некоторой функции, характеризующей рассматриваемое движение? Если да, то что это за функция?
6. **Орбитальные движения планет и спутников.** В данной программе моделируется движение тела под действием единственной центральной силы, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния от силового центра. В какой мере результаты, полученные в этой моделирующей программе, применимы к движению планет вокруг Солнца? К движению спутников вокруг Земли? Ведь на обращающийся вокруг Земли спутник действует, кроме силы тяготения Земли, еще и сила солнечного тяготения.
7. **Скорость освобождения.** При каком значении начальной скорости тела (в единицах круговой скорости для данной начальной точки) траектория будет параболической? Каким образом на основании изображения, получаемого на экране при моделировании такого движения с помощью данной программы, можно сделать заключение о том, что траектория действительно представляет собой параболу?
8. **Гиперболические траектории.** На каком свойстве гиперболы в данной моделирующей программе основано доказательство того, что при начальной скорости, превышающей скорость освобождения, траектория тела представляет собой одну из ветвей гиперболы?

1.4 Второй закон Кеплера

Изменение скорости планеты или спутника при движении по эллиптической орбите количественно характеризуется вторым законом Кеплера, иначе называемым законом площадей, согласно которому радиус-вектор, проведенный к телу из силового центра, за равные промежутки времени «заметает» равные площади. Кеплер открыл этот закон в начале семнадцатого столетия путем очень тщательного изучения астрономических данных, полученных Тихо Браге в течение многолетних наблюдений за движением планет.

Для иллюстрации этого закона в соответствующей программе пакета «Движение космических тел» строится орбита планеты (или спутника планеты) путем численного интегрирования уравнений движения, и при этом в каждый момент вычерчивается радиус-вектор из силового центра. Через определенные равные промежутки времени изменяется цвет выводимого на экран радиуса-вектора. В результате на получаемом изображении соседние секторы, «заметаемые» радиусом-вектором за равные промежутки времени, окрашиваются в разный цвет. В соответствии со вторым законом Кеплера (законом площадей) площади всех секторов должны быть одинаковы.

В случае круговой орбиты движение равномерное, и неизменный по модулю радиус-вектор также равномерно вращается, «заметая», очевидно, конгруэнтные (равные) секторы за равные промежутки времени. В случае эллиптической орбиты судить на глаз о

равенстве площадей секторов, сильно различающихся по форме (см. рис. 1.4), затруднительно. Поэтому для количественной проверки равенства площадей программа выполняет, наряду с расчетом орбиты, суммирование площадей узких элементарных секторов, соответствующих отдельным шагам интегрирования. Такие элементарные секторы с хорошей точностью можно считать треугольниками. В процессе моделирования текущее значение площади сектора выводится на экран в строке, расположенной над окном моделирования. Суммирование площадей элементарных секторов продолжается до тех пор, пока не закончится соответствующий данному сектору (конечных размеров) промежуток времени. Затем текущее значение площади очередного нового сектора выводится на экран уже в соседнем положении. Совпадение рассчитанных таким образом площадей секторов, соответствующих равным промежуткам времени, служит подтверждением закона равных площадей.

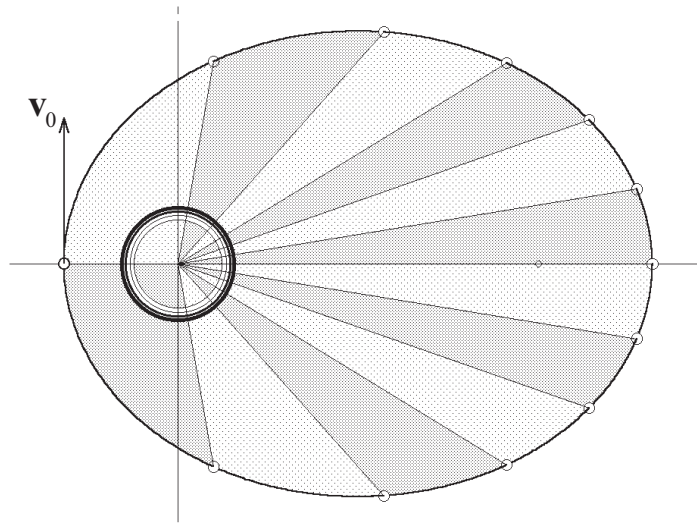


Рис. 1.4: Иллюстрация второго закона Кеплера (закона площадей). «Заметаемые» радиусом-вектором секторы соответствуют равным промежуткам времени.

Подчеркнем, что данная компьютерная программа ничего «не знает» о законах Кеплера, т.е. при ее выполнении никакая информация об этих законах не используется. Программа лишь выполняет численное интегрирование уравнений движения (уравнений второго закона Ньютона) под действием известной центральной силы тяготения. Поэтому мы можем рассматривать наблюдаемое при моделировании равенство площадей секторов, заметаемых радиусом-вектором за равные промежутки времени, как экспериментальную проверку второго закона Кеплера (в вычислительном эксперименте).

Динамическое объяснение второго закона Кеплера впервые было дано Ньютоном. При движении тела под действием центральной силы сохраняется момент импульса тела относительно силового центра. Закон площадей (т.е. второй закон Кеплера) можно рассматривать как прямое следствие сохранения момента импульса. Поэтому закон площадей должен выполняться при движении тела в любом центральном поле, т.е. для силы с произвольной зависимостью от расстояния до центра. И обратно, если при движении тела выполняется закон площадей, сила всегда направлена радиально к силовому центру

(или от центра). Таким образом, второй закон Кеплера является следствием центрального характера силы тяготения, действующей на планету со стороны Солнца.

Закон равных площадей выполняется при движении не только по замкнутым круговым и эллиптическим орбитам, но также и для открытых (уходящих в бесконечность) параболических и гиперболических траекторий. Для моделирования параболического движения нужно задать начальную скорость, равную скорости освобождения ($v_0 = v_{\text{осв}} \approx 1.41 v_{\text{кр}}$); для гиперболических движений — превышающую скорость освобождения.

Контрольные вопросы

1. **Секториальная скорость.** При движении по кеплеровой орбите радиус-вектор тела описывает равновеликие (равные по площади) секторы за равные промежутки времени. Иными словами, секториальная скорость постоянна. Какой вывод из неизменности секториальной скорости (т. е. из второго закона Кеплера) можно сделать относительно линейной скорости тела? В каких точках эллиптической орбиты она принимает максимальное и минимальное значение? Какой вывод из второго закона Кеплера можно сделать о поведении скорости тела на круговой орбите?
2. **Орбитальная скорость и угловая скорость.** Как изменяется угловая скорость поворота радиуса-вектора при движении спутника по эллиптической орбите? В каких точках эллиптической орбиты она принимает максимальное и минимальное значение?
3. **Скорости спутника в перигее и апогее.** Как связано отношение орбитальных скоростей спутника в перигее и апогее эллиптической орбиты с отношением расстояний этих точек орбиты от центра Земли? Как связано отношение угловых скоростей поворота радиуса-вектора спутника в перигее и апогее эллиптической орбиты с отношением расстояний этих точек орбиты от центра Земли?
4. **Второй закон Кеплера и открытые орбиты.** Справедлив ли второй закон Кеплера для движений по открытым (параболическим и гиперболическим) орбитам?
5. **Сохранение момента импульса.** Как второй закон Кеплера связан с законом сохранения момента импульса? Справедлив ли второй закон Кеплера для движения в центральном поле с иной, нежели в законе всемирного тяготения, зависимостью силы от расстояния?

1.5 Третий закон Кеплера

Третий закон, утверждающий пропорциональность квадратов периодов обращения к кубам больших полуосей эллиптических орбит, как уже отмечалось, был найден Кеплером для планет Солнечной системы путем тщательного анализа многолетних астрономических наблюдений Тихо Браге. Динамическое объяснение этой закономерности на основе законов динамики и закона всемирного тяготения было дано Ньютоном спустя почти столетие. Третий закон справедлив не только для планет, обращающихся вокруг Солнца или некоторой звезды, но и для любой совокупности спутников, обращающихся вокруг общего центрального тела, в частности, для спутников планет.

Моделирующая программа пакета «Движение космических тел» для иллюстрации третьего закона Кеплера одновременно строит движение нескольких тел в одном и том

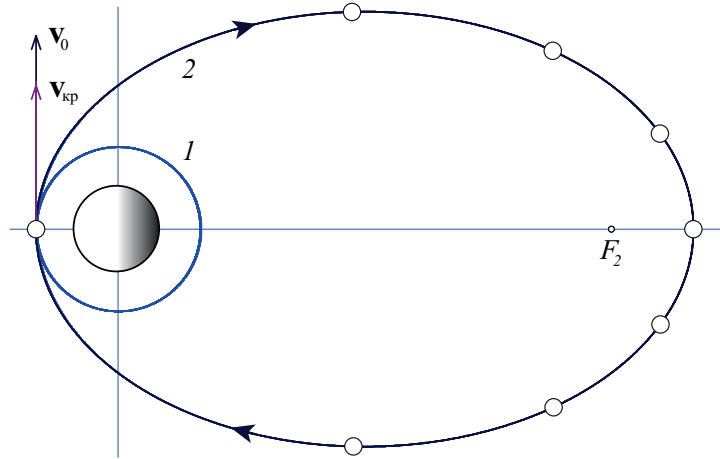


Рис. 1.5: Круговая и эллиптическая орбиты с общей начальной точкой. Большая полуось эллиптической орбиты в 4 раза больше радиуса круговой орбиты.

же центральном поле тяготения. При этом предполагается, что массы тел (спутников) настолько малы по сравнению с массой центрального тела, что их гравитационным взаимодействием можно пренебречь и считать, что каждый из них движется независимо от других, испытывая притяжение только со стороны центрального тела. Спутники запускаются одновременно из одной и той же точки, в которой им сообщаются начальные скорости, направленные трансверсально (перпендикулярно радиусу-вектору), как показано на рис. 1.5.

Одна из орбит (1 на рис. 1.5) всегда круговая, и период обращения спутника по этой орбите используется для сравнения с периодами других спутников, обращающихся по произвольным эллиптическим орбитам. Обе орбиты (1 и 2 на рис. 1.5) имеют общую касательную в начальной точке: эта касательная направлена вдоль вектора начальной скорости. Программа одновременно моделирует движение двух спутников. Текущее показание таймера соответствует числу оборотов спутника на круговой орбите, совершенных к данному моменту времени. Другими словами, таймер показывает время, прошедшее с момента запуска спутников, выраженное в единицах периода обращения спутника по круговой орбите. Моделирование автоматически останавливается, когда спутник на эллиптической орбите совершит полный оборот. Поэтому окончательное показание таймера соответствует периоду этого спутника, выраженному в единицах периода спутника на круговой орбите.

Для выбора эллиптической орбиты можно воспользоваться в пункте меню «Ввод» одной из трех возможностей: задавать либо начальную скорость v_0 , либо большую полуось a , либо период обращения T . Какой бы из этих возможностей Вы ни воспользовались, соответствующая величина должна выражаться в единицах, характерных для стандартной круговой орбиты сравнения ($v_{кр}$, r_0 или T_0 соответственно).

Для моделирования можно выбирать разные совокупности орбит.

В простейшем варианте можно запустить, скажем, только два спутника, выбрав для одного начальную скорость, равную круговой, а для второго задать начальную скорость так, чтобы получилась эллиптическая орбита с большой полуосью, в четыре раза превос-

ходящей радиус круговой орбиты первого спутника (рис. 1.5). Тогда период обращения второго спутника должен быть, согласно третьему закону Кеплера, в восемь раз больше периода обращения первого спутника: второй спутник должен совершить один полный оборот по эллиптической орбите ровно за восемь оборотов спутника на круговой орбите.

Подчеркнем еще раз, что программа выполняет моделирование движения спутников только на основе законов Ньютона и закона всемирного тяготения. Законы Кеплера в программе не используются. Поэтому данное моделирование можно рассматривать как проверку соответствующих теоретических концепций с помощью вычислительного эксперимента.

Моделирующая программа позволяет выполнить более изощренные эксперименты, связанные с третьим законом Кеплера. Выбирая опцию «Общая начальная точка», можно изучить свойства семейства эллиптических орбит, начинающихся в одной точке. По таким орбитам движутся спутники, которым в начальной точке сообщают различные по величине трансверсальные (т. е. перпендикулярные радиусу-вектору) начальные скорости. Для ввода параметров служит специальная панель. Можно вводить либо начальные скорости, либо большие полуоси, либо периоды обращения (в зависимости от выбранной опции) для нескольких орбит за один прием. Вводимые величины должны быть выражены в единицах, соответствующих стандартной круговой орбите. Затем можно наблюдать моделирование и измерять периоды обращения либо в условиях последовательных запусков (каждый раз запуская один спутник на эллиптическую орбиту одновременно со спутником на круговой), либо в условиях одновременного запуска всех спутников.

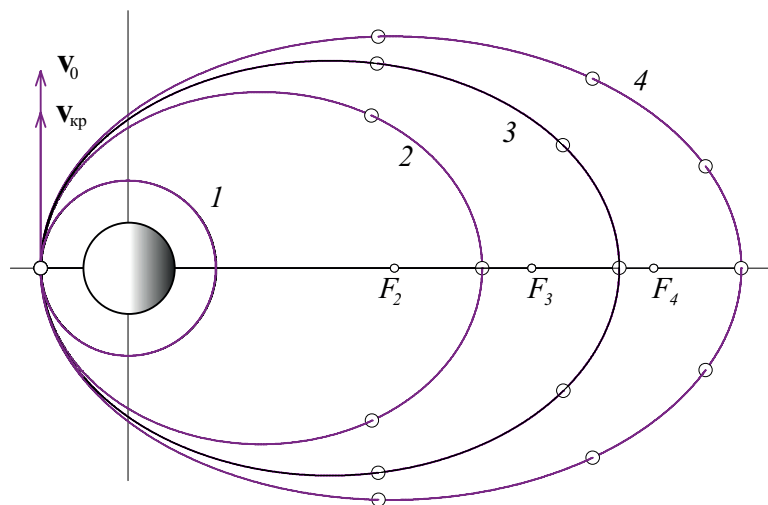


Рис. 1.6: Круговая и эллиптические орбиты спутников, одновременно запускаемых из общей начальной точки в горизонтальном направлении с разными начальными скоростями. Начальные скорости спутников выбраны так, что периоды их обращения относятся как целые числа 1 : 2 : 4 : 8.

Спутник, равномерно обращающийся по круговой орбите, выполняет здесь роль «часов» для измерения периодов обращения других спутников. Положения других спутников отмечаются программой на экране каждый раз в те моменты, когда первый возвращается в исходную точку. Например, на рис. 1.6 показан результат моделирования движения

четырёх спутников, запускаемых одновременно из одной точки с разными значениями начальных скоростей. Для удобства наблюдения начальные скорости выбраны так, чтобы получались эллиптические орбиты с периодами обращения, кратными периоду обращения по круговой орбите 1: для орбиты 2 период вдвое больше периода на круговой орбите, а для орбиты 3 — в четыре раза больше. Поэтому ровно через восемь таких оборотов все спутники одновременно оказываются в начальной точке.

Перед началом моделирования движения спутников программа может также построить теоретически предсказанные эллиптические орбиты, если выбрать в меню соответствующую опцию. На этих эллипсах малыми кружками отмечены положения вторых фокусов. Чтобы воспроизвести описанное выше моделирование, нужно либо ввести соответствующие данные для эллиптических орбит, либо можно просто выбрать соответствующий пункт в перечне заранее подготовленных примеров (открыв в меню пункт «Примеры»).

По мере увеличения начальной скорости соответствующая эллиптическая орбита становится все более вытянутой. Когда начальная скорость близка к скорости освобождения, даже совсем небольшое увеличение начальной скорости приводит к разительному возрастанию большой оси эллиптической орбиты и, следовательно, периода обращения спутника.

Программа «Третий закон Кеплера» позволяет проследить эволюцию пространственной конфигурации нескольких спутников, одновременно запущенных из одной точки в одном направлении (горизонтально) со слегка различными начальными скоростями. Рисунок 1.7 иллюстрирует такую возможность. Одинаковыми цифрами здесь обозначены положения разных спутников в одни и те же моменты времени. На первой стадии движения спутники движутся тесной группой, но с течением времени эта группа растягивается все сильнее.

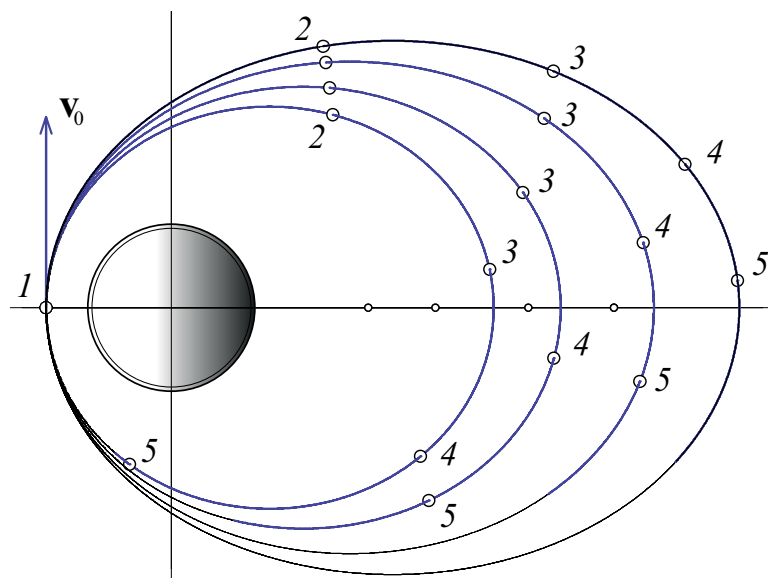


Рис. 1.7: Эволюция пространственной конфигурации спутников, одновременно запущенных из одной точки в одном направлении с немного различающимися начальными скоростями.

Программа «Третий закон Кеплера» предоставляет возможность изменять условия моделирования и другими способами. Если выбрать в меню «Орбиты» пункт «Произвольные орбиты», можно одновременно моделировать движение по орбитам с произвольно выбранными большими осями и разными эксцентриситетами. При выборе такой возможности в начальной конфигурации все спутники лежат на одном радиусе (начальные положения спутников для разных орбит уже не будут находиться в одной точке).

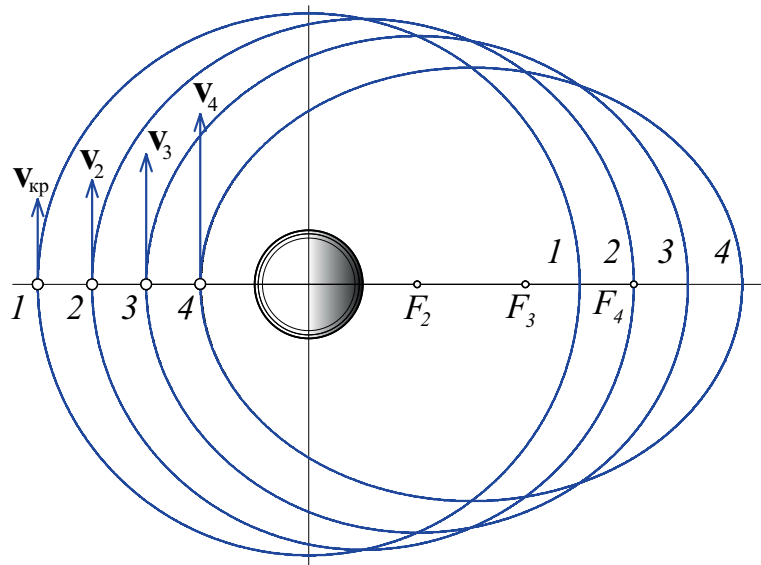


Рис. 1.8: Эллиптические орбиты с равными большими осями и, следовательно, равными периодами обращения.

Например, можно моделировать движение сразу нескольких спутников по орбитам с равными большими осями, но различными эксцентриситетами (рис. 1.8). Согласно третьему закону Кеплера, период обращения зависит только от большой оси эллиптической орбиты и не зависит от ее эксцентриситета. Поэтому в данном примере период обращения одинаков для всех орбит. Так как все спутники запускаются одновременно, то все они в один и тот же момент возвращаются в начальные точки. Начальная конфигурация спутников в виде «парада планет» (все спутники находятся на одной радиальной прямой) воспроизводится после каждого оборота.

Общий характер движения планет в одной и той же планетной системе можно наглядно проиллюстрировать, если смоделировать движение по нескольким круговым орбитам различных радиусов. Чем больше радиус орбиты, тем больше период обращения и тем меньше орбитальная скорость планеты. Этим планетные движения радикально отличаются от ситуации вращающегося вокруг оси твердого тела, в которой скорости частиц возрастают пропорционально их расстояниям от оси вращения. Если выбрать круговые орбиты с кратными периодами, которые относятся как небольшие целые числа (например, как 1 : 3 : 6 : 12), и задать начальные положения планет на одной и той же радиальной прямой, то при моделировании можно будет наблюдать, как эта необычная линейная конфигурация «парада планет» периодически воспроизводится, и все планеты опять одновременно оказываются на той же самой радиальной прямой.

Как работать с программой «Третий закон Кеплера»

Данная моделирующая программа предоставляет Вам несколько возможностей для экспериментальной проверки третьего закона Кеплера. В простейшем варианте используются только две орбиты, начинающиеся из одной точки с трансверсальной (перпендикулярной радиусу-вектору, т.е. направленной горизонтально начальной скоростью. Одна из этих орбит — круговая. Она служит удобными «часами» для измерения периода обращения по второй (произвольной эллиптической) орбите.

Единственный параметр, который нужно ввести для выполнения такого эксперимента, относится ко второй орбите. Пункт меню «Ввод данных» предлагает три возможности для выбора вводимой величины: это либо начальная скорость, либо большая полуось орбиты, либо период обращения. Любой из этих параметров эллиптической орбиты нужно выражать в единицах, характеризующих стандартную круговую орбиту, используемую для сравнения.

В начальной точке обе орбиты имеют общую касательную. Программа моделирует движение двух спутников, запущенных одновременно. Текущие показания таймера соответствуют числу оборотов, совершенных на данный момент спутником на круговой орбите. Иными словами, таймер показывает текущее время после запуска, измеренное в единицах периода обращения спутника на круговой орбите.

Моделирование движения автоматически останавливается в тот момент, когда спутник на эллиптической орбите завершает один оборот. Поэтому по показаниям таймера очень легко сравнить экспериментальные значения периодов обращения по двум рассматриваемым орбитам. Например, если для большой полуоси эллиптической орбиты ввести значение 4 (т.е. учетверенный радиус круговой орбиты), период обращения по эллиптической орбите, в соответствии с третьим законом Кеплера, должен равняться 8 периодам обращения спутника по круговой орбите. Иными словами, за то время, пока спутник совершит один оборот по эллиптической орбите, спутник на круговой орбите должен совершить ровно 8 оборотов. В этот момент оба спутника одновременно возвращаются в начальную точку, т.е. начальная конфигурация системы воспроизводится через каждые 8 оборотов по круговой орбите.

Используя пункт меню «Условия моделирования», можно выбрать наиболее удобный способ представления результатов моделирования на экране компьютера. Выбрав опцию «Теоретическая кривая», Вы предписываете программе отобразить на экране предварительно рассчитанные орбиты обоих спутников. Моделирование выполняется в определенном временном масштабе, так что Вы можете легко наблюдать за изменениями скорости спутника на протяжении орбиты. Скорость моделирования (т.е. временной масштаб) можно изменять перемещением движка на соответствующей шкале. Выбор опции «Метки времени» вынуждает программу фиксировать положения спутника на эллиптической орбите каждый раз, когда спутник на круговой орбите завершает очередной виток. Благодаря этим меткам можно судить об изменениях скорости вдоль эллиптической орбиты даже по статичной картинке, которая остается на экране после завершения моделирования. О назначении других опций можно судить по их названиям.

Пункт меню «Орбиты» предлагает выполнить более изощренные эксперименты, связанные с третьим законом Кеплера. Выбирая опцию «Общая начальная точка», можно изучить свойства семейства эллиптических орбит, начинающихся в одной точке. По таким орбитам движутся спутники, которым в начальной точке сообщают различные по величине трансверсальные (перпендикулярные радиусу) начальные скорости. Для ввода параметров служит специальная панель. Можно вводить либо начальные скорости, либо большие полуоси, либо периоды обращения (в зависимости от выбранной опции) для

нескольких орбит за один прием. Вводимые величины должны быть выражены в единицах, соответствующих стандартной круговой орбите. Затем можно наблюдать моделирование и измерять периоды обращения либо в условиях последовательных запусков (каждый раз запуская один спутник на эллиптическую орбиту одновременно со спутником на круговой), либо в условиях одновременного запуска всех спутников.

Первая из названных возможностей удобна для точных измерений периодов обращения: при выборе опции «Последовательные запуски» моделирование автоматически останавливается в тот момент, когда завершается один оборот по эллиптической орбите. Это позволяет без труда снять показания таймера. Вторая возможность (одновременный запуск) позволяет наблюдать в течение продолжительного времени за эволюцией конфигурации спутников.

Дополнительные возможности моделирования появляются при выборе в меню «Орбиты» пункта «Произвольные орбиты». В этом случае начальные положения спутников можно задавать произвольно. Можно задать одновременно несколько орбит с произвольными большими полуосями и эксцентриситетами.

Контрольные вопросы

1. **Третий закон Кеплера для круговых орбит.** Радиусы двух круговых орбит относятся как 4 : 1. Примените второй закон Ньютона к круговому движению в центральном поле тяготения для того, чтобы выразить отношение периодов обращения по круговым орбитам через отношение радиусов орбит. Иными словами, докажите третий закон Кеплера для частного случая круговых орбит. Как отношение орбитальных скоростей зависит от отношения радиусов орбит?
2. **Круговая и эллиптическая орбиты.** В каком случае период обращения по эллиптической орбите будет таким же, как и период обращения по круговой орбите? Имеют ли общие точки такие круговая и эллиптическая орбиты, лежащие в одной плоскости?
3. **Эллиптические орбиты с равными периодами обращения.** В каких случаях периоды обращения спутников по разным эллиптическим орбитам будут одинаковы? Перечислите возможные различия эллиптических орбит с одинаковыми периодами обращения.
4. **Большая ось и период обращения.** Во сколько раз нужно увеличить большую ось эллиптической орбиты, чтобы период обращения увеличился в восемь раз? Зависит ли ответ от эксцентриситета орбиты? Проверьте свой ответ с помощью моделирования.
5. (*) **Массы и периоды обращения.** Почему период обращения спутника вокруг планеты не зависит от массы спутника? Как период обращения зависит от массы планеты (для орбиты с определенной большой осью)? Как относятся периоды двух спутников, обращающихся вокруг планет, массы которых относятся как 4 : 1 (при одинаковых линейных размерах орбит)?
6. (**) **Свободное падение на Солнце.** Как долго продолжалось бы свободное падение тела на Солнце с расстояния, равного радиусу земной орбиты (при нулевой начальной скорости тела)? Ответ выразите через период обращения Земли по орбите (1 год).

1.6 Приближенный характер законов Кеплера

Орбитальное движение любой из планет вокруг Солнца происходит в основном под действием ее гравитационного притяжения к Солнцу. В действительности законы Кеплера лишь приближенно описывают движения планет, потому что они вытекают из законов Ньютона только в том случае, когда движение происходит под действием единственной силы, направленной к неподвижному центру, и эта сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра. Но в действительности Солнце, являющееся источником такой силы, нельзя считать полностью неподвижным, так как силы тяготения со стороны других планет сообщают ему небольшие ускорения. Более того, планеты притягивают друг друга, так что действующая на какую-либо из планет полная сила обусловлена не только солнечным тяготением: другие планеты возмущают эллиптическое движение, которое эта планета совершала бы вокруг Солнца в том случае, если бы она была единственной планетой. Поэтому законы Кеплера — это лишь некоторое приближение к действительности. Гравитационные возмущения со стороны других планет вызывают отклонения от этих простых законов. В частности, компоненты двойной планеты, такой как Земля со своим спутником Луной, обращаются вокруг Солнца по очень сложным траекториям.

Тот факт, что законы Кеплера дают столь хорошее приближение к истинным движениям планет, обусловлен тем, что массы всех планет очень малы по сравнению с массой Солнца. Эта особенность строения нашей планетной системы позволяет рассматривать движение любой из планет как слегка возмущенное кеплерово движение, т.е. движение по эллипсу, параметры которого немного изменяются с течением времени. Одно из наиболее известных достижений небесной механики, связанное с применением математического аппарата теории возмущений — это открытие планеты Нептун на основе замеченных астрономами возмущений в движении Урана. В 1846 году Нептун был обнаружен на небе практически в том самом месте, которое было теоретически предсказано. Это предсказание стало триумфальным подтверждением способности классической динамики объяснять наблюдаемые явления и предсказывать новые. На протяжении многих лет движения планет Солнечной системы служили замечательной внеземной лабораторией для проверки законов небесной механики в частности и классической динамики в целом.

Согласно представлениям ньютоновской физики, присутствие материальных тел проявляется в создаваемом ими поле тяготения. Действуя на свободные тела, поле тяготения вызывает отклонения в их движении от прямолинейного равномерного движения в евклидовом физическом пространстве. Представления Ньютона о тяготении просуществовали в почти неизменном виде вплоть до начала 20 столетия, когда концепция дальнего действия (мгновенного действия на расстоянии, подразумеваемого в ньютоновской формулировке закона всемирного тяготения), была признана несостоятельной в свете частной теории относительности.

В распространении релятивистских представлений на тяготение (в общей теории относительности) Альберт Эйнштейн пришел к совершенно новым взглядам на гравитацию, согласно которым присутствие материи порождает не силовое поле (поле тяготения), а вызывает искривление четырехмерного пространственно-временного континуума. В такой вселенной свободные тела движутся сквозь искривленное пространство-время вдоль геодезических линий (по кратчайшему четырехмерному пути). Эйнштейновский подход к гравитации основан на принципе эквивалентности, согласно которому не существует принципиальной возможности экспериментально определить, находится ли тело в равномерно ускоренной системе отсчета в отсутствие поля тяготения, или же оно

находится в инерциальной системе отсчета в однородном поле тяготения.

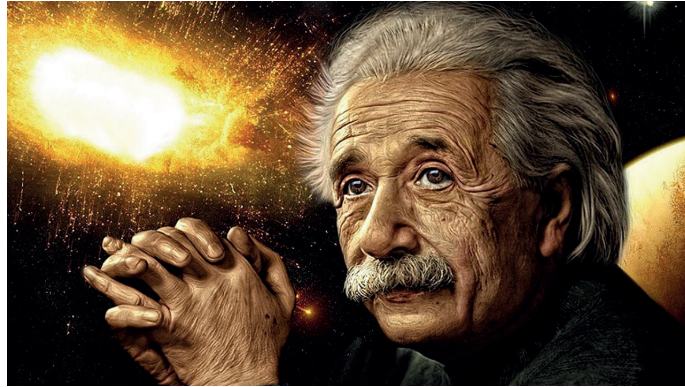


Рис. 1.9: Альберт Эйнштейн

В общей теории относительности материальные тела приводят не к появлению поля тяготения как некоторого физического силового поля, а к локальным отклонениям геометрии реального пространства-времени от псевдоевклидовой геометрии. Плоское псевдоевклидово пространство-время частной теории относительности приближенно соответствует физической реальности в отсутствие массивных тел.

Таким образом, в общей теории относительности характеристики свободного движения пробного тела при наличии материальных тел обусловлены не создаваемым этими телами физическим полем тяготения, а пространственно-временными свойствами реального мира. Влияние материи на геометрию проявляется в том, что четырехмерные мировые линии свободных частиц (аналог «прямых») представляют собой геодезические линии в искривленном пространстве-времени. Неевклидовость мира обнаруживается прежде всего в движении, т. е. не в пространственной, а в пространственно-временной геометрии. Образно говоря, гениальность Ньютона проявилась в том, что он увидел Луну свободно падающей на Землю, хотя всякий видит совсем иное. И нужно было обладать гениальностью Эйнштейна, чтобы увидеть, что движение Луны в некотором смысле происходит по «прямой».

Релятивистская теория тяготения предсказала ряд тонких явлений, которые невозможно объяснить в рамках ньютоновской теории. К таким предсказаниям относится искривление световых лучей при прохождении вблизи массивного тела (такого как Солнце), красное смещение спектральных линий, излучаемых атомами массивного объекта, замедление часов в сильном гравитационном поле. Новая теория смогла также объяснить дополнительную прецессию (величиной в 43 угловых секунды в столетие) орбиты ближайшей к Солнцу планеты Меркурий, которая в ньютоновской теории оставалась необъясненной после учета всех возможных возмущений со стороны других планет. Для тех явлений, описание которых возможно на основе ньютоновской теории тяготения (т. е. в пределах применимости ньютоновской теории), релятивистская теория приводит к тем же результатам (принцип соответствия). Поэтому и в наши дни точность ньютоновской теории достаточна практически для всех ее приложений в небесной механике и космической динамике.

Контрольные вопросы

1. **Законы Кеплера и Солнечная система.** С какими особенностями строения Солнечной системы связана применимость законов Кеплера к движениям ее планет? Почему эти законы описывают движения планет Солнечной системы лишь приближенно?
2. **Законы Кеплера и движение спутников.** В какой мере законы Кеплера применимы к движениям спутников планет? Ведь кроме силы тяготения планеты, на спутник действует сила солнечного тяготения, которая может быть сравнима с силой тяготения планеты. Например, сила притяжения Солнцем нашего естественного спутника — Луны — превосходит силу притяжения Луны Землей. Почему же мы считаем, что Луна обращается вокруг Земли?

Глава 2

Годограф вектора скорости при кеплеровом движении

Одно из интереснейших свойств кеплеровых движений связано с формой траектории в пространстве скоростей. Вектор скорости тела (планеты, спутника) в каждый момент времени направлен по касательной к пространственной траектории тела. При криволинейном движении направление вектора скорости непрерывно изменяется. Для получения траектории в пространстве скоростей нужно эти векторы скоростей для каждого момента времени начертить так, чтобы все они начинались в общей точке — начале координат пространства скоростей. Конец этого изменяющегося вектора скорости вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называемую *годографом* вектора скорости. Это ныне общепринятое название для траектории в пространстве скоростей было предложено Гамильтоном в 1846 году.

2.1 Годограф скорости для замкнутых орбит

Замечательно, что при кеплеровом движении по любой эллиптической орбите годограф скорости представляет собой окружность. Для круговой орбиты это очевидно: при равномерном движении тела по окружности вектор скорости просто равномерно поворачивается, оставаясь неизменным по модулю. Ясно, что в пространстве скоростей конец такого вектора вычерчивает окружность. Центр этой окружности совпадает с общим началом всех векторов скоростей, т. е. расположен в начале координат пространства скоростей. Радиус окружности равен постоянной скорости движения по круговой орбите.

Для эллиптической орбиты поворот вектора скорости происходит неравномерно, и его модуль при этом все время изменяется. Но оказывается, что и в этом случае конец вектора в пространстве скоростей вычерчивает окружность (см. рис. 2.1). Центр этой окружности смещен из общего начала и расположен на векторе скорости спутника в перигее орбиты. Нижняя половина кругового годографа, начинающаяся в точке I на рис. 2.1, соответствует первой (правой) половине эллиптической орбиты от перигея до апогея, которую спутник проходит (по часовой стрелке) с постепенно уменьшающейся скоростью. Вторая (верхняя на рис. 2.1) половина годографа скорости соответствует второй (левой) половине орбиты от апогея до перигея, при прохождении вдоль которой скорость постепенно увеличивается.

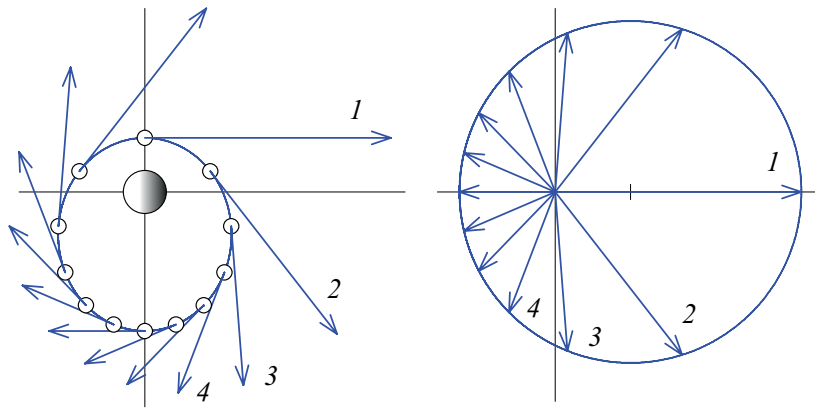


Рис. 2.1: Кеплерова орбита спутника и векторы скоростей в разных ее точках (слева), и годограф вектора скорости в пространстве скоростей (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

В случае эллиптической орбиты диаметр кругового годографа скорости равен сумме модулей скоростей в перигее и апогее (в этих точках эллиптической орбиты векторы скоростей направлены в противоположные стороны). Центр кругового годографа смещен из начала координат пространства скоростей в направлении вектора скорости в перигее на расстояние, равное половине разности модулей скорости в перигее и апогее. Векторы скоростей на рис. 2.1 проведены через равные промежутки времени, что позволяет судить о том, как изменяется угловая скорость поворота вектора скорости не только во время моделирования, но и по статичной картине, остающейся на экране после завершения моделирования.

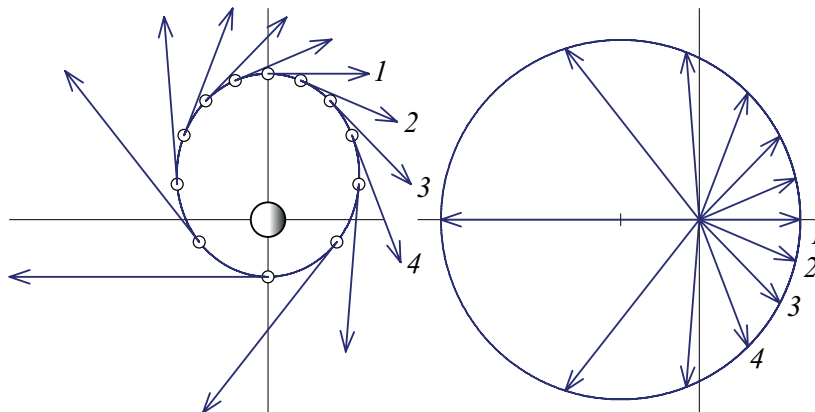


Рис. 2.2: Кеплерова орбита спутника и векторы скоростей в разных ее точках (слева), и годограф вектора скорости в пространстве скоростей (справа). Начальная скорость (вектор 1) меньше круговой скорости. Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

Если задать начальную скорость спутника, меньшую круговой (см. рис. 2.2), начальная точка будет апогеем эллиптической орбиты спутника. В таком случае центр кругового годографа будет смещен влево из начала координат пространства скоростей. На начальном этапе движения вектор скорости мал и его поворот происходит медленно. По мере приближения к перигею орбиты скорость быстро нарастает, и поворот вектора скорости происходит все быстрее. Когда вектор скорости вычерчивает вторую (верхнюю) половину кругового годографа, такие же изменения происходят в обратной последовательности.

2.2 Годограф скорости для открытых орбит

Кеплерово движение по открытой параболической траектории можно рассматривать как предельный случай движения по сильно вытянутому эллипсу, апогей которого стремится в бесконечность (см. левую часть рис. 2.1). При таком предельном переходе скорость спутника в апогее стремится к нулю. Годограф вектора скорости для этого предельного случая, соответствующего параболическому движению, приведен в правой части рис. 6. Траектория в пространстве скоростей и в этом случае представляет собой замкнутую окружность. Ее диаметр совпадает с вектором скорости тела в вершине параболы, т.е. в ближайшей к силовому центру точке траектории. Эта окружность (годограф скорости параболического движения) проходит через начало координат пространства скоростей. Точка годографа, находящаяся в начале координат, в пространстве соответствует бесконечно удаленной точке параболической траектории тела, при движении к которой скорость тела стремится к нулю.

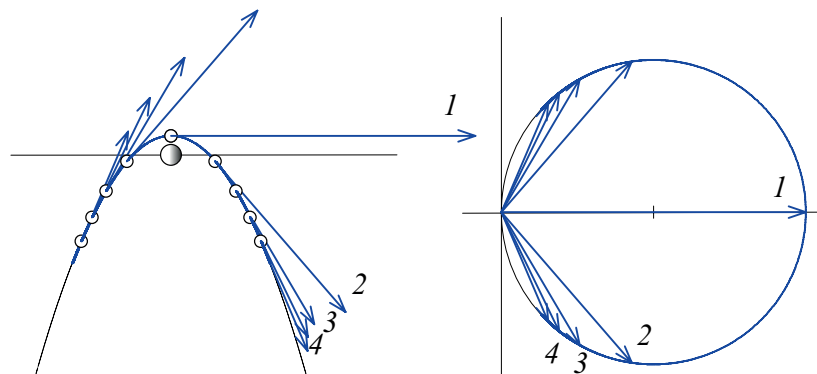


Рис. 2.3: Векторы скоростей в разных точках параболической траектории тела в центральном поле тяготения (слева) и соответствующий этому движению годограф вектора скорости (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

В моделирующей программе пакета «Движение космических тел», иллюстрирующей траекторию в пространстве скоростей, начальная скорость сообщается телу в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору. Если эта скорость равна скорости освобождения для начальной точки, то при движении тела в бесконечность вектор скорости вычерчивает половину окружности в пространстве скоростей (нижнюю в правой части рис. 2.3)). Вектор начальной скорости $v_0 = v_{\text{осв}}$ проходит по диаметру этой окружности. При даль-

нейшем движении тела скорость уменьшается, и конец постепенно сокращающегося вектора скорости движется по нижней части окружности. В конце концов, за бесконечно большое время вектор скорости сжимается в точку, по мере того как тело удаляется в бесконечность.

Чтобы в моделирующем эксперименте получить и вторую (левую на рис. 2.3) половину параболической пространственной траектории вместе с соответствующей ей верхней полуокружностью годографа скорости, программа рассчитывает также движение тела из бесконечности к вершине параболической траектории. Делается это следующим образом. Когда тело удаляется на достаточно большое расстояние от начальной точки (за пределы области, отображаемой на экране), программа обращает знак одной из координат (а именно, знак координаты, измеряемой от начального положения в направлении, перпендикулярном начальному радиусу-вектору), и одновременно обращает знак другой компоненты скорости тела. Поэтому дальнейшее моделируемое движение происходит в направлении начальной точки (в сторону силового центра) по левой на рис. 2.3 половине той же самой параболы.

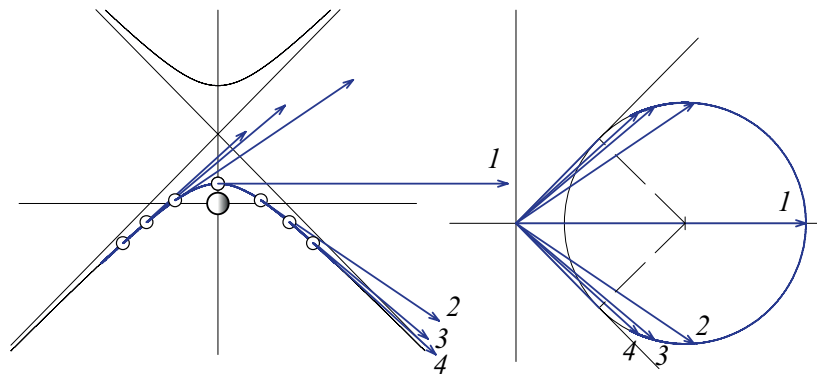


Рис. 2.4: Векторы скоростей в разных точках гиперболической траектории тела в центральном поле тяготения (слева) и соответствующий этому движению годограф вектора скорости (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

Замечательно, что и для гиперболического движения тела в центральном поле тяготения траектория в пространстве скоростей имеет форму (части) окружности (см. рис. 2.4). В этом случае диаметр кругового годографа скорости меньше, чем максимальная скорость тела, которую оно имеет в ближайшей к силовому центру точке траектории. Начало координат пространства скоростей лежит вне кругового годографа скорости.

В случае гиперболического движения тело приближается к силовому центру из бесконечности, где его скорость отлична от нуля и направлена вдоль одной из асимптот гиперболы. В пространстве скоростей (правая часть рис. 2.4) эта скорость (скорость на бесконечности) проходит из начала координат по верхней касательной к годографу скорости. Начиная от точки касания, по мере приближения тела к силовому центру, скорость постепенно увеличивается и достигает максимума, когда тело проходит через вершину гиперболы. Вектор скорости при этом вычерчивает часть окружности от точки касания до наиболее удаленной от начала координат точки 1 годографа скорости. Затем вектор скорости постепенно сокращается, а его конец движется по нижней половине кругово-

го годографа. В конце концов, через бесконечно большое время, конец вектора скорости достигает нижней точки касания. Этому соответствует удаление тела в бесконечность вдоль второй асимптоты гиперболической траектории. Постоянная скорость такого движения изображается в пространстве скоростей второй (нижней на рис. 2.4) касательной, проведенной из начала координат к круговому годографу скорости.

В моделирующей программе телу сообщается некоторая начальная скорость в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору начального положения. Когда величина начальной скорости превосходит скорость освобождения, начальная точка будет вершиной гиперболической траектории тела. В пространстве скоростей начальному состоянию соответствует горизонтальный вектор I (см. рис. 2.4), проходящий из начала координат по диаметру в дальнюю точку окружности. При дальнейшем движении, когда тело удаляется в бесконечность, траектория постепенно прижимается к асимптоте гиперболы, а конец вектора скорости вычерчивает нижнюю часть годографа до точки касания. Чтобы показать и вторую половину годографа, программа моделирует также и движение из бесконечности по другой половине гиперболы в сторону силового центра. Делается это таким же способом, как и при моделировании движения по параболе. Чем больше начальная скорость, тем меньше угол между асимптотами гиперболы.

Контрольные вопросы

1. **Скорости в перигее и апогее эллиптической орбиты спутника.** Какие точки кругового годографа скорости соответствуют перигею и апогею эллиптической орбиты спутника? Какие точки годографа скорости соответствуют моментам прохождения спутника через концы малой оси эллиптической орбиты?
2. **Радиус годографа скорости.** Как, зная скорости в перигее и апогее эллиптической орбиты, найти радиус кругового годографа вектора скорости? Как найти положение центра этой окружности в пространстве скоростей? На каком расстоянии от начала координат пространства скоростей находится центр годографа скорости?
3. **Скорость на конце малой полуоси.** Как найти скорость спутника в момент его прохождения через конец малой оси эллиптической орбиты, если известны значения скорости спутника в перигее и апогее орбиты?
4. **Формула центростремительного ускорения.** Каким будет годограф вектора скорости при равномерном движении точки по окружности? Как можно вывести формулу для центростремительного ускорения при равномерном движении точки по окружности, используя понятие годографа вектора скорости?

Глава 3

Траектории баллистических снарядов и орбиты спутников

В рассмотренных выше программах моделирования движения тела в ньютоновском центральном поле тяготения было возможно выбирать произвольную высоту начальной точки и величину начальной скорости тела. Однако там не было возможности изменять направление начальной скорости — начальная скорость была направлена только горизонтально (перпендикулярно к локальной вертикали, т.е. перпендикулярно к радиус-вектору начального положения тела). При таких условиях запуска большая ось эллиптической орбиты спутника ориентирована вдоль вертикали, проходящей через начальную точку и центр Земли. В этом случае начальная точка будет либо перигеем, либо апогеем эллиптической орбиты спутника в зависимости от величины начальной скорости.

Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет изменять условия запусков спутников или баллистических снарядов, выбирая для их пассивного движения в гравитационном поле различные начальные положения и начальные скорости, отличающиеся не только величиной, но и направлением. Можно заранее задать условия сразу для нескольких снарядов или спутников, и затем наблюдать за моделированием их движения при одновременном или при последовательных запусках из одной или из разных начальных точек.

Подчеркнем, что в программе при задании начальных условий Вы указываете начальное положение и начальную скорость для этапа *пассивного* орбитального движения баллистического снаряда или спутника. Во время подъема после старта и на участке разгона баллистический снаряд или космический корабль набирает скорость благодаря тяге ракетных двигателей. На этом так называемом активном этапе движения мы имеем дело еще не с искусственным небесным телом, а скорее с обычным реактивным снарядом. Иначе говоря, задаваемое Вами начальное состояние соответствует конечной точке активного участка. В этом месте происходит выключение ракетного двигателя последней ступени. Начальная скорость для дальнейшего пассивного движения равна конечной скорости снаряда, достигнутой на активном участке разгона.

Дальнейшее пассивное движение происходит только под действием силы земного тяготения и, возможно, еще и под действием силы сопротивления воздуха. Для учета сопротивления воздуха при моделировании нужно выбрать соответствующую опцию в меню программы и ввести дополнительные параметры, характеризующие атмосферу планеты, массу и поперечное сечение снаряда или космического аппарата. Однако целесообразно

начать изучение движения, рассматривая случаи, в которых сопротивление воздуха отсутствует либо его влияние незначительно.

3.1 Как моделировать запуски спутников и баллистических снарядов

В программе «Баллистические снаряды и спутники» все параметры моделируемой системы задаются с помощью панели «Ввод», которая открывается при выборе соответствующего пункта меню. Чтобы задать начальное положение снаряда или спутника, нужно указать его высоту над поверхностью Земли либо в километрах, либо в единицах радиуса Земли (в последнем случае нужно выбрать опцию «Естественные единицы» в рамке «Единицы»). Необходимо также указать угловое положение начальной точки (в градусах) по отношению к некоторой полярной оси, общей для всех запусков. Эта ось направлена вдоль большей стороны окна, в котором отображается моделируемое движение. Размеры и положение этого окна на экране можно изменять стандартными способами, например, растягивая и перетаскивая его мышкой.

Величину начальной скорости можно вводить в км/с либо в единицах круговой скорости для выбранной начальной высоты (в «естественных» единицах). Направление начальной скорости нужно указывать в градусах угла, который скорость образует с местной вертикалью.

Чтобы моделировать движение снаряда, подверженного сопротивлению воздуха, нужно ввести дополнительные параметры, характеризующие атмосферу планеты, а также площадь поперечного сечения и массу космического аппарата или баллистического снаряда. Однако целесообразно начать работу с программой, изучая движение в тех случаях, когда сопротивление воздуха полностью отсутствует либо настолько мало, что им можно пренебречь.

В моделирующей программе предполагается, что сила сопротивления воздуха пропорциональна локальной плотности атмосферы и квадрату скорости спутника, и направлена противоположно скорости спутника. Такие предположения оправданы для тел наподобие искусственных спутников сферической формы в атмосфере, движущихся в газовой среде со скоростями, превышающими характерные скорости теплового движения молекул газа.

Предполагается, что плотность ρ воздуха, в соответствии с барометрической формулой, экспоненциально убывает с высотой h над поверхностью планеты:

$$\rho(h) = \rho(0) \exp(-h/H), \quad (3.1)$$

где H — характеристическая высота, на которой плотность атмосферы данной планеты в $e = 2,72$ раза меньше, чем у поверхности планеты. Такое выражение для зависимости плотности воздуха от высоты $\rho(h)$ справедливо при постоянной температуре и приближенно выполняется, когда характеристическая высота H атмосферы много меньше радиуса R планеты. Иначе говоря, приближенное выражение (3.1) для зависимости плотности от высоты применимо, если в пределах атмосферы (от поверхности планеты до верхних разреженных слоев) температуру и поле тяготения планеты можно считать практически неизменными.

Эти условия приближенно выполняются для земной атмосферы и атмосфер других планет Солнечной системы. Экспоненциальный характер зависимости $\rho(h)$ означает, что плотность воздуха уменьшается с высотой очень быстро. Но все же на высотах вплоть до

160 км плотность воздуха такова, что спутник не может находиться на орбите в течение продолжительного времени. Чем выше орбита, тем дольше спутник остается на ней.

Для самых верхних слоев экспоненциальная модель атмосферы верна лишь приближенно. На больших высотах плотность воздуха очень сильно зависит от температуры и условий солнечного освещения. Плотность воздуха на данной высоте заметно изменяется на протяжении суток (с 24-часовым периодом): днем под действием солнечных лучей атмосфера как бы «вспухает» и плотность воздуха на данной высоте увеличивается. На высоте 350 км на поверхность Земли плотность атмосферы днем приблизительно в 1,2 раза больше, чем ночью, а на высоте 500 км уже примерно второе больше. В моделирующей программе эти изменения плотности воздуха в зависимости от солнечного освещения во внимание не принимаются, и зависимость плотности от высоты везде считается одинаковой.

Характеристическая высота атмосферы задается параметром H , величину которого при моделировании можно варьировать в широких пределах. Например, Вы можете задавать преувеличенно большие значения H для того, чтобы сделать влияние сопротивления воздуха при моделировании более заметным, чем в реальных условиях. Такого рода моделирующие эксперименты помогут лучше понять роль сопротивления атмосферы для космических полетов вокруг Земли или других планет. Однако при моделировании запусков сразу нескольких баллистических снарядов и/или спутников в одном эксперименте значение H должно быть, конечно же, одним и тем же для всех запусков.

Испытываемая спутником сила сопротивления воздуха пропорциональна локальной плотности атмосферы, квадрату геоцентрической скорости спутника и площади его поперечного сечения. Она зависит также от формы спутника. Ускорение спутника, создаваемое силой сопротивления, обратно пропорционально массе спутника. Таким образом, это ускорение можно выразить следующей формулой:

$$\mathbf{a} = -C\rho(h)v\mathbf{v}, \quad (3.2)$$

где коэффициент C пропорционален площади поперечного сечения спутника и обратно пропорционален его массе. Он особенно велик для легких, полых спутников в виде наполненных газом баллонов. Такие спутники в гораздо большей мере подвержены влиянию сопротивления атмосферы (как и давлению солнечного излучения) по сравнению с массивными компактными телами. Поэтому их используют для экспериментальных исследований верхней атмосферы.

Второй параметр, который нужно вводить при моделировании движения при наличии сопротивления воздуха — это безразмерный коэффициент, равный отношению ускорения (замедления), обусловленного сопротивлением воздуха при воображаемом движении данного спутника (или снаряда) в атмосфере на предельно малой высоте $h \approx 0$ (вблизи поверхности Земли) со скоростью, равной круговой скорости для $h = 0$, к ускорению, создаваемому силой тяжести вблизи поверхности Земли (к ускорению свободного падения). Этот безразмерный параметр зависит как от плотности атмосферы вблизи поверхности планеты, так и от характеристик самого спутника (от его массы и от площади его поперечного сечения). Моделирующая программа позволяет сравнить влияние атмосферы на спутники с различными значениями отношения массы к площади поперечного сечения, запуская сразу несколько таких спутников из одной точки с одинаковой скоростью.

Когда все необходимые параметры введены, нужно нажать кнопку «Добавить». При этом к списку планируемых запусков добавится новая строка с параметрами, значения которых в данный момент отображены в окнах ввода. Для того, чтобы в список добавить еще один запуск, снова введите в соответствующие окна начальное положение и началь-

ную скорость нового спутника или снаряда, и опять нажмите кнопку «Добавить».

Если Вы намереваетесь запустить несколько спутников (условия запуска которых отображаются в таблице на панели ввода параметров), программа автоматически выбирает масштаб, позволяющий отобразить траектории всех спутников в одном окне на экране (все траектории, не возмущенные атмосферой планеты). При желании можно отменить такой автоматический выбор масштаба, и выбрать масштаб так, чтобы назначенная Вами определенная орбита наилучшим образом отображалась в окне (при этом другие орбиты могут оказаться частично срезанными границами окна). Для этого нужно снять «галочку» автомасштабирования на панели ввода параметров, и выбрать одну из орбит в списке. Затем нужно нажать кнопку «Масштабировать» (“Rescale”). В результате программа выберет оптимальный масштаб для отображения назначенной Вами орбиты в окне моделирования.

В панели ввода параметров можно редактировать список назначенных запусков. Чтобы удалить некоторую орбиту из моделирования, нужно отметить соответствующую строку в списке заданных пусков и нажать кнопку «Удалить» (“Remove”). Чтобы добавить в список новую орбиту, нужно ввести необходимые параметры в соответствующие окна либо с клавиатуры, либо передвигая движки на размещенных рядом с окнами линейках прокрутки. Затем нужно нажать кнопку «Добавить» (“Add”). При этом к списку добавится новая строчка с параметрами, значения которых в данный момент отображены в окнах ввода.

Когда введены параметры для всех запусков, которые Вы собираетесь промоделировать в данном эксперименте, нажмите кнопку «Ok». Затем выберите условия моделирования из пункта меню «Опции». Значения этих опций понятны из их названий. Например, «галочка» у опции «Жирные следы» означает, что траектории будут выводиться на экран толстыми линиями; если стоит «галочка» у опции «Автоматический старт», программа автоматически запускает следующий снаряд или спутник после того, как замкнется предыдущая орбита (в случае последовательных запусков); если стоит галочка у «Теоретической траектории», перед началом моделирования будет построена невозмущенная траектория. Последняя опция заставляет программу строить также огибающую орбит при условии, что в подготовленном списке при всех запусках из одной начальной точки снарядам сообщаются равные значения начальной скорости.

При последовательном моделировании нескольких запусков движение по текущей орбите можно дополнительно отобразить в отдельном окне. Чтобы открыть такое окно с увеличенным изображением траектории запуска, моделируемого в данный момент, поставьте «галочку» в пункте меню «Zoom». Положение и размеры этого окна на экране компьютера можно изменять стандартными средствами для получения оптимальных условий наблюдения.

Программа позволяет также выполнить сравнение действительного движения спутника или баллистического снаряда при наличии сопротивления воздуха с соответствующим невозмущенным движением, происходящим под действием только силы тяготения. В любой момент во время моделирования Вы можете заставить программу изобразить на экране эллипс, вдоль которого снаряд продолжал бы дальнейшее движение в отсутствие сопротивления воздуха, начиная с данного момента. Положение и скорость снаряда в этот момент используются как начальные условия для расчета дальнейшего невозмущенного движения. Чтобы включить такую возможность, перед началом моделирования нужно выбрать в меню опцию «Невозмущенная траектория». Когда этот пункт меню отмечен «галочкой», программа строит эллипс невозмущенного движения перед началом моделирования и каждый раз, когда при моделировании Вы нажимаете кнопку «Пауза».

При возобновлении моделирования после того, как этот эллипс будет выведен на экран, отличие действительного движения с сопротивлением воздуха от невозмущенного кеплерова движения становится отчетливо видимым.

Пункт меню «Примеры» открывает панель, которая позволяет Вам выбирать заранее подготовленные примеры из расположенного на этой панели предлагаемого списка. Кнопки «Основной набор» и «Расширенный набор» дают возможность переключения между разными наборами примеров. При выборе примера из предлагаемого списка, в текстовом окне под списком появляется краткое описание выбранного примера.

Чтобы сразу запустить выбранный пример, сделайте двойной щелчок по его названию. Чтобы предварительно посмотреть значения параметров, ввод которых приводит к моделированию рассматриваемого в примере движения, нажмите кнопку «Ок» на панели примеров. При этом открывается панель ввода параметров с автоматически введенными для данного примера значениями. Нажав кнопку «Ок» на панели ввода параметров, Вы закрываете эту панель и открываете окно для отображения запускаемого моделирования.

Перед началом моделирования программа отображает на экране теоретически предсказанные эллиптические траектории (вместе с их большими осями и вторыми фокусами), если выбрана соответствующая опция. Действительная траектория, получающаяся в результате численного интегрирования уравнений движения, чертится на экране другим цветом. В отсутствие атмосферы траектории действительных движений точно совпадают с предсказанными эллиптическими кривыми, пока не происходит пересечения траектории с поверхностью Земли.

Чтобы узнать, как самостоятельно создавать и записывать (сохранять) новые примеры, смотрите раздел «Как создавать новые примеры».

В последующих разделах этой главы рассматриваются свойства некоторых семейств баллистических снарядов или спутников. Для иллюстрации этих свойств в моделирующем эксперименте можно выбрать соответствующий пункт из предлагаемого списка заранее заготовленных примеров.

3.2 Семейства кеплеровых орбит спутников и траекторий баллистических снарядов

Если начальная скорость пассивного движения спутника Земли направлена горизонтально (иначе — трансверсально, т. е. перпендикулярно радиусу-вектору в начальной точке), то начальная точка находится на одном из концов большой оси эллиптической орбиты: эта точка будет перигеем орбиты (перигеентром, если рассматривается спутник какой-либо другой планеты) при начальной скорости, превышающей круговую скорость, и апогеем (апоцентром) в противном случае. Большие оси всех таких орбит направлены вдоль вертикали, проходящей через начальную точку. Если же направленная горизонтально начальная скорость равна круговой скорости ($v_0 = v_{кр}$), спутник будет двигаться по круговой орбите.

При любом другом направлении начальной скорости получить движение по круговой орбите невозможно, какой бы ни была величина начальной скорости. Точка старта — это единственная общая точка всех орбит с одинаковым направлением начальной скорости. В этой точке все орбиты имеют общую касательную, так как векторы скоростей для всех орбит в этой точке направлены одинаково. Если при данной начальной скорости траектория пересекает поверхность Земли, то мы имеем дело с баллистическим снарядом, а не с искусственным спутником Земли.

3.2.1 Орбиты при различных направлениях начальных скоростей

Рассмотрим свойства кеплеровых орбит, по которым движутся спутники (или баллистические снаряды), запускаемые из одной и той же точки над поверхностью Земли в различных направлениях.

Если начальная скорость направлена горизонтально, т. е. перпендикулярно радиусу-вектору в начальной точке, как, например, на рис. 1.5, то начальная точка находится на одном из концов большой оси эллиптической орбиты. Как изменится орбита спутника, если мы выберем другое направление начальной скорости?

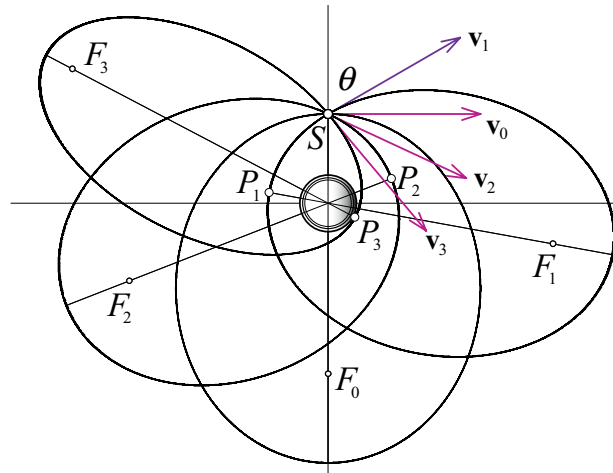


Рис. 3.1: Орбиты четырех спутников, запущенных из одной точки с начальными скоростями, равными по модулю, но различными по направлению.

На рис. 3.1 показаны орбиты нескольких спутников, запущенных из одной точки S с начальными скоростями, равными по величине, но различными по направлению. В общей начальной точке S все спутники имеют равные значения потенциальной энергии (в расчете на единицу массы спутника), и равные значения кинетической энергии, поскольку их начальные скорости одинаковы по величине. Следовательно, все эти орбиты соответствуют одному и тому же значению полной энергии (на единицу массы спутника), и поэтому их большие оси равны. Аналитическое доказательство равенства больших полуосей орбит с одинаковой энергией (основанное на законах динамики) приведено в разделе 11.2 (см. уравнение (11.19), стр. 191). В соответствии с третьим законом Кеплера, периоды обращения спутников по таким орбитам также одинаковы. Компьютерное моделирование позволяет проверить эти свойства с помощью вычислительного эксперимента: все одновременно запущенные спутники одновременно возвращаются в исходную точку.

В эксперименте, показанном на рис. 3.1, величина начальной скорости выбрана большей, чем круговая скорость ($v_0 > v_{кр}$). Если вектор начальной скорости \mathbf{v}_0 направить горизонтально, начальная точка S будет перигеем эллиптической орбиты, а второй фокус орбиты будет расположен в точке F_0 . Эксцентриситет e_0 такой орбиты можно подсчитать с помощью следующей простой формулы:

$$e_0 = \frac{v_0^2}{v_{кр}^2} - 1. \quad (3.3)$$

Доказательство этой формулы приведено в разделе 10.6, где геометрические свойства кеплеровых орбит обсуждаются подробнее.

При любом другом направлении начальной скорости эллиптическая орбита спутника будет иметь такую же длину большой оси, но больший эксцентриситет e_1 чем при горизонтальном направлении начальной скорости такого же модуля ($e_1 > e_0$). Если начальная скорость \mathbf{v}_1 образует угол θ с местной вертикалью (см. рис. 3.1), эксцентриситет e_1 получающейся при этом орбиты может быть выражен через эксцентриситет e_0 орбиты, которая соответствует горизонтальному направлению такой же по величине начальной скорости, по следующей формуле:

$$e_1^2 = e_0^2 + (1 - e_0^2) \cos^2 \theta. \quad (3.4)$$

При изменении только направление начальной скорости (с сохранением ее величины) длина большой оси результирующей эллиптической орбиты останется прежней. Поскольку при горизонтальной начальной скорости, превышающей круговую ($v_0 > v_{кр}$), перигей орбиты совпадает с начальной точкой, при любом другом направлении начальной скорости перигей орбиты будет ниже, чем при горизонтальном запуске. В самом деле, при заданной длине большой оси перигей тем ниже, чем больше эксцентриситет орбиты.

Если начальную скорость направить слегка вверх от горизонта, подобно вектору \mathbf{v}_1 на рис. 3.1 (т.е. если скорость образует острый угол θ с местной вертикалью), перигей орбиты сместится из начальной точки назад на некоторый угол φ_P в направлении, противоположном начальной скорости (точка P_1 на рис. 3.1). Если же начальную скорость направить на некоторый угол ниже горизонта, подобно векторам \mathbf{v}_2 и \mathbf{v}_3 на рис. 3.1, перигей орбиты сместится из начальной точки вперед, в направлении начальной скорости (точки P_2 и P_3 соответственно). На рис. 3.1 показаны также вторые фокусы соответствующих орбит.

Для орбиты, которая соответствует углу θ между направлением начальной скорости и вертикалью, угловое положение перигея (угол φ_P между радиусами, проведенными из центра Земли в начальную точку S и в перигей P) можно рассчитать по следующей формуле:

$$\tan \varphi_P = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{(v_{кр}/v_0)^2 - \sin^2 \theta}, \quad (3.5)$$

где $v_{кр}$ — величина круговой скорости для выбранной начальной точки.

После запуска тела на орбиту мы получим искусственный спутник Земли только в том случае, когда расстояние от центра Земли до перигея превышает земной радиус. В противном случае тело будет двигаться по эллипсу только до тех пор, пока этот эллипс не пересечет поверхность Земли. В таких случаях запущенное тело называют обычно *баллистическим снарядом*, а не искусственным спутником Земли.

Последняя ситуация имеет место для любых запусков, в которых пассивное орбитальное движение начинается почти с самой поверхности Земли. Пример трех траекторий, начинающихся на поверхности Земли, приведен на рис. 3.2. Такие траектории (при любом направлении и любой величине начальной скорости, не превышающей скорость освобождения $v_{осв} = \sqrt{2}v_{кр}$) пересекают поверхность Земли. Это значит, что невозможно запустить спутник непосредственно с поверхности Земли даже при отсутствии атмосферы, поскольку орбита результирующего движения неизбежно пересечет поверхность Земли. Только если скорость в начальной точке S направлена горизонтально (как вектор \mathbf{v}_0 на рис. 3.2) и ее величина больше круговой скорости, орбита не пересечет поверхность Земли, а лишь коснется ее в одной точке (а именно в начальной точке S). Для планеты с атмосферой движение спутника по такой орбите тоже невозможно.

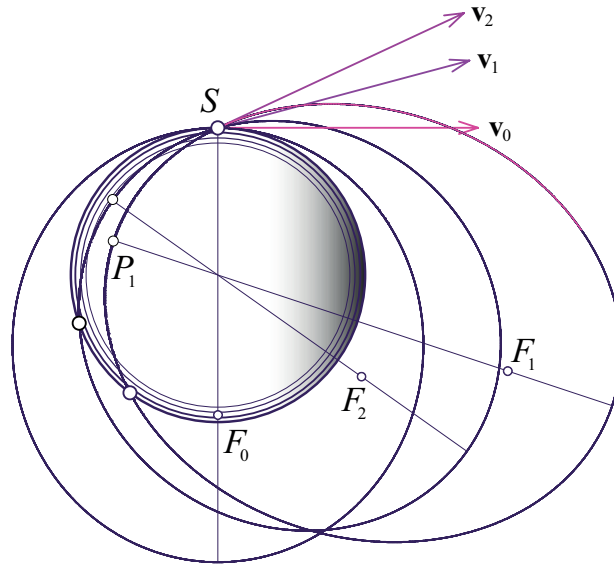


Рис. 3.2: Три траектории баллистических снарядов, запущенных из одной точки на поверхности Земли, с разными начальными скоростями.

В отсутствие атмосферы траектории баллистических снарядов представляют собой отрезки эллипсов, общий фокус которых расположен в центре Земли. Когда величина начальной скорости много меньше круговой скорости, отрезок такого эллипса над поверхностью Земли можно аппроксимировать параболой. Это и есть та самая параболическая траектория, которую мы обычно приписываем снаряду в приближении «плоской Земли» в отсутствие сопротивления воздуха. Для сравнительно малых начальных скоростей и, следовательно, небольших (по сравнению с радиусом Земли) дальностей полета, силу тяготения Земли можно считать неизменной по величине и направлению, и упомянутое приближение однородного поля тяготения, безусловно, применимо. Тем не менее, следует отдавать себе отчет в том, что на самом деле траектории — это отрезки сильно вытянутых эллипсов, один из фокусов которых находится в центре Земли.

Если начальная скорость направлена точно вниз, траектория, конечно же, представляет собой отрезок вертикальной прямой от начальной точки до поверхности Земли. Если начальная скорость баллистического снаряда направлена вертикально вверх, он поднимается по прямой до некоторой максимальной высоты, а затем отвесно падает на поверхность Земли вдоль той же прямой. Тем не менее, можно считать, что до падения на Землю снаряд движется по траектории, которая представляет собой предельный случай все более сужающихся эллипсов, один из фокусов которых находится в центре Земли. В конце концов такой сплюснутый эллипс с эксцентриситетом $e \rightarrow 1$ вырождается в прямолинейный отрезок. Фокусы этого вырожденного эллипса совпадают с концами отрезка: один фокус находится в точке наивысшего подъема снаряда, второй — в центре Земли.

На рисунке 3.3 представлено семейство траекторий баллистических снарядов, запущенных из одной точки поверхности Земли в различных направлениях с одинаковыми по величине начальными скоростями, равными круговой скорости для нулевой высоты (т.е.

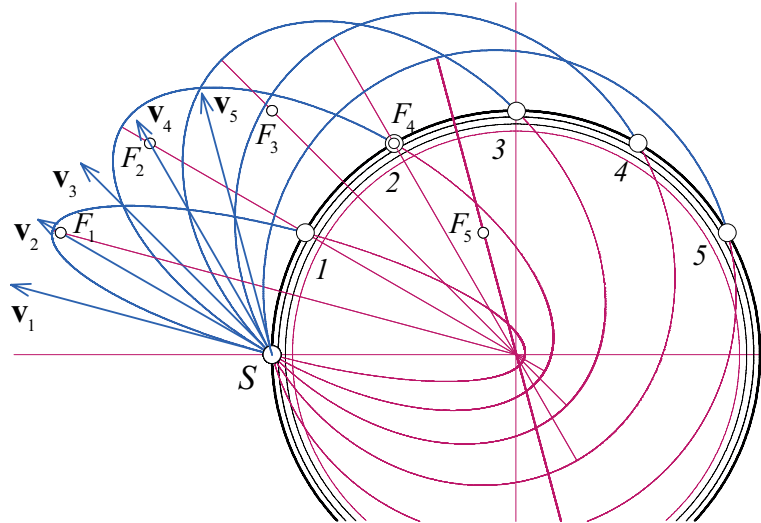


Рис. 3.3: Траектории баллистических снарядов, запущенных в различных направлениях из одной начальной точки S на поверхности Земли с начальными скоростями, равными по модулю круговой скорости $v_{кр}$.

скоростью для гипотетической круговой орбиты, стелющейся над самой поверхностью Земли). Отметим следующие интересные свойства этого семейства траекторий:

1. Большие оси всех эллипсов равны, поскольку орбиты соответствуют равным значениям полной энергии в расчете на единицу массы снаряда.
2. Большие оси эллипсов ориентированы параллельно соответствующим векторам начальных скоростей.
3. Один из фокусов всех эллипсов расположен в центре Земли, а вторые фокусы лежат на окружности, центр которой находится в общей начальной точке, а радиус равен радиусу Земли.

Обратите внимание на то, как точка падения снаряда на Землю отдалается от начальной точки по мере увеличения угла между направлением начальной скорости и местной вертикалью от 0 до $\pi/2$. В идеализированном случае полного отсутствия атмосферы место падения стремится к точке, диаметрально противоположной начальной точке, когда направление начальной скорости приближается к горизонту.

3.2.2 Орбиты спутников, запущенных из одной точки с равными по модулю начальными скоростями

Представьте себе ракету, которая поднимается с Земли вертикально вверх, и в высшей точке своего подъема разрывается на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с одинаковыми по модулю начальными скоростями. Дальнейшее движение осколков происходит только под действием силы земного тяготения. Если высота начальной точки достаточно велика по сравнению с радиусом Земли (или хотя бы

такого же порядка), а начальная скорость осколков не слишком мала (не очень сильно отличается от круговой скорости для начальной высоты) и не превышает скорости освобождения, то многие осколки становятся спутниками Земли и в дальнейшем обращаются по различным эллиптическим орбитам.

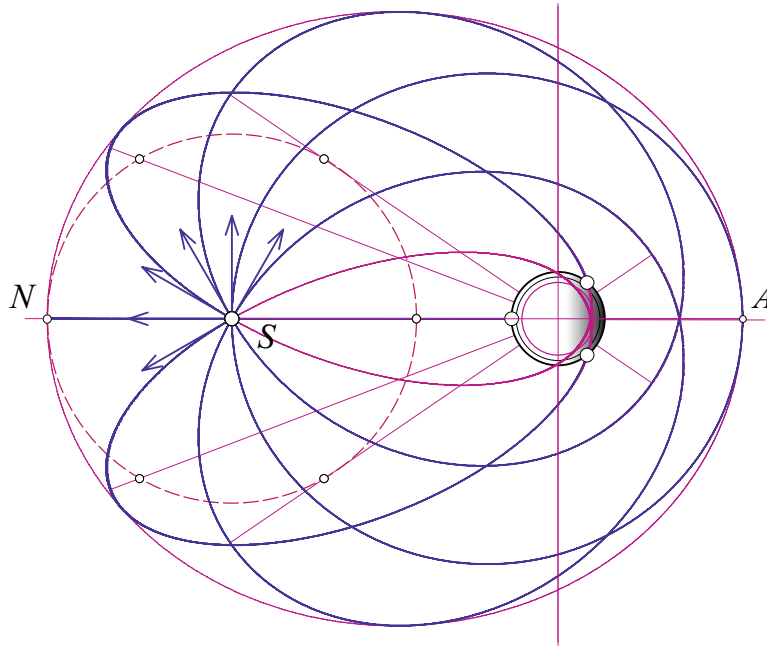


Рис. 3.4: Орбиты осколков, вылетающих из одной точки S с равными по модулю начальными скоростями во всевозможных направлениях. Начальная скорость меньше круговой скорости для данной высоты начальной точки ($v_0 < v_{кр}$).

Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет смоделировать движение таких осколков. Примеры моделирования показаны на рис. 3.4 и 3.5. Нужно ввести высоту начальной точки (в километрах или, что удобнее, в единицах радиуса Земли), и общую для всех тел величину начальной скорости. Начальную скорость также можно задавать либо в км/с, либо в естественных для данной задачи единицах, а именно, в единицах круговой скорости для заданной высоты начальной точки. Величина начальной скорости не должна превосходить скорости освобождения. Затем можно задать для нескольких тел различные направления начальной скорости. Вместо того, чтобы вводить необходимые для моделирования данные самостоятельно, можно выбрать соответствующий заранее заготовленный пример в пункте меню «Примеры».

Все эллиптические орбиты имеют общий фокус, расположенный в центре Земли. Вторые фокусы всех орбит лежат на окружности (в пространстве — на сфере), центр которой находится в начальной точке S , а радиус равен расстоянию SN от этой точки до точки N наибольшего удаления от центра Земли (точки N достигает осколок, начальная скорость которого в точке S направлена вертикально вверх). Эта окружность на рис. 3.4 и 3.5 показана штриховой линией. Легко доказать геометрически, что эта кривая — именно окружность. В самом деле, для любой эллиптической орбиты данного семейства сумма расстояний от каждой ее точки до фокусов имеет одно и то же значение, равное длине

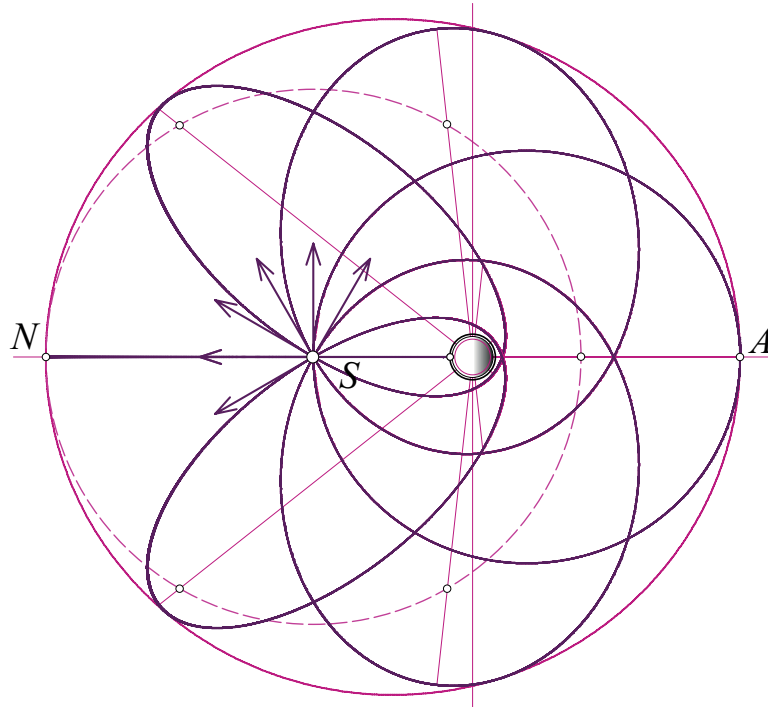


Рис. 3.5: Орбиты осколков, вылетающих из одной точки S с равными по модулю начальными скоростями во всевозможных направлениях. Начальная скорость превышает круговую скорость для данной высоты начальной точки ($v_0 > v_{кр}$).

большой оси орбиты. Большие оси, как уже отмечалось выше, одинаковы у всех орбит и равны расстоянию от центра Земли до точки N , так как этот отрезок можно рассматривать как большую ось предельно сплющенного (вырожденного) эллипса, соответствующего орбите осколка, вылетевшего из S вертикально вверх в направлении точки N . Все орбиты семейства проходят через точку S , и расстояние от нее до центра Земли, т. е. до одного из фокусов, для всех орбит одинаково. Поэтому расстояние от S до второго фокуса тоже одинаково для всех орбит семейства, что и означает, что вторые фокусы всех орбит семейства лежат на указанной выше окружности.

Семейство эллиптических орбит таких спутников также отличается рядом интересных свойств. Всем орбитам рассматриваемого семейства соответствуют равные значения полной энергии (в расчете на единицу массы), так как в начальной точке потенциальные энергии всех осколков равны, а при одинаковых начальных скоростях будут равны и кинетические энергии. Большая ось кеплеровой орбиты однозначно связана с энергией. Поэтому большие оси всех эллипсов равны. В соответствии с третьим законом Кеплера, у всех спутников такого семейства будут одинаковы и периоды обращения. Это значит, что все они одновременно возвратятся в начальную точку S . Это замечательное свойство движения спутников по орбитам рассматриваемого семейства наглядно демонстрирует программа «Баллистические снаряды и спутники». Исключение составляют лишь те осколки, траектории которых пересекают поверхность Земли: им не суждено осуще-

ствить и одного полного оборота по орбите.

Движение всех осколков происходит в ограниченной области пространства. Граница этой области обладает осевой симметрией, т. е. представляет собой поверхность вращения некоторой кривой вокруг оси, проходящей через центр Земли и начальную точку. В каждой своей точке она касается одной из возможных траекторий, т. е. является огибающей для рассматриваемого семейства эллипсов. Можно доказать (это сделано в разделе 12.3) на основе законов сохранения и геометрических свойств эллиптических орбит, что огибающая семейства эллиптических орбит представляет собой эллипс (в пространстве — эллипсоид вращения), один из фокусов которого находится в центре Земли, а второй — в общей для всех орбит начальной точке S . Большая ось этого эллипса простирается от точки N (наиболее удаленной от центра Земли точки области, в которой движутся осколки, см. рис. 3.4 и 3.5, до точки области движения осколков, наиболее удаленной от начальной точки S . Этой точки достигает тот осколок, который вылетел из начальной точки S в горизонтальном направлении (перпендикулярно радиусу-вектору). Его эллиптическая орбита в своем апогее касается границы рассматриваемой области.

Зная форму огибающей поверхности семейства эллиптических траекторий одинаковой энергии, можно простыми средствами решать разнообразные задачи баллистики. Например, можно найти минимальную начальную скорость, которую необходимо сообщить баллистическому снаряду для того, чтобы он мог достичь заданной цели из заданной точки, и каким должно быть направление этой начальной скорости. Примеры такого рода задач баллистики (и проверка их решений с помощью компьютерного моделирования) приведены в разделе 12.2.

3.2.3 Орбиты спутников, запущенных из одной точки в одном направлении с разными по модулю начальными скоростями

Рассмотрим свойства кеплеровых орбит, по которым движутся спутники, запускаемые из одной и той же точки над поверхностью Земли в одном и том же направлении, но с различными по величине начальными скоростями. Если начальная скорость направлена горизонтально (т. е. перпендикулярно радиусу-вектору в начальной точке), то начальная точка находится на одном из концов большой оси эллиптической орбиты: эта точка — перигей орбиты при начальной скорости, превышающей круговую скорость, и апогей — в противном случае. Большие оси всех орбит направлены вдоль вертикали, проходящей через начальную точку. Если же направленная горизонтально начальная скорость равна круговой скорости, спутник будет двигаться по круговой орбите.

При любом другом направлении начальной скорости получить движение по круговой орбите невозможно, какой бы ни была величина начальной скорости. На рис. 3.6 показано несколько орбит спутников, которым разные по модулю начальные скорости сообщаются под одним и тем же острым углом ($\varphi = 60^\circ$) с местной вертикалью. Точка старта S — это единственная общая точка всех эллипсов. В этой точке все кривые имеют общую касательную, так как векторы скоростей для всех траекторий в этой точке направлены одинаково.

Интересное свойство семейства таких эллиптических орбит связано с положениями их фокусов. Один из фокусов — общий для всех орбит. Он расположен в силовом центре, т. е. в центре Земли. Что касается вторых фокусов всех орбит, то, как видно из рис. 3.6, все они расположены на одной и той же прямой, проходящей через общую для всех орбит начальную точку S . Эта прямая показана штриховой линией на рис. 3.6. Она образует угол с вертикалью (проходящей через точку S вверх), который вдвое больше угла, обра-

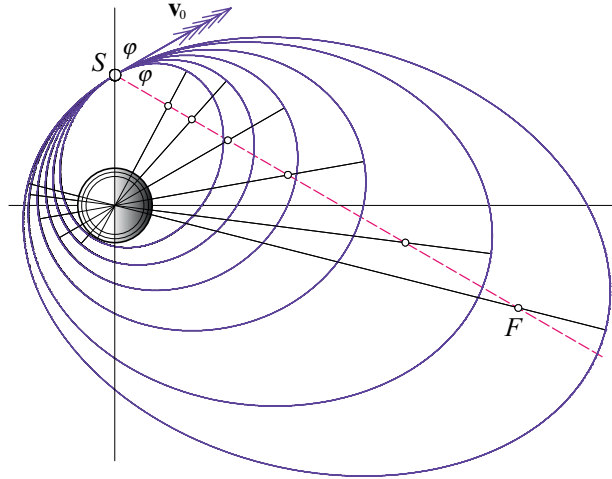


Рис. 3.6: Орбиты спутников, запускаемых из одной и той же точки в одном направлении, но с различными по величине начальными скоростями.

зуемого начальной скоростью с вертикалью ($2\varphi = 120^\circ$).

На рис. 3.7 показано семейство эллиптических траекторий баллистических снарядов, которым разные по модулю начальные скорости сообщаются под одним и тем же острым углом 45° с вертикалью. Здесь вторые фокусы орбит также расположены на одной прямой, проходящей через общую для всех орбит начальную точку S . Так как начальные скорости направлены под углом 45° , фокусы лежат на прямой, образующей с вертикалью вдвое больший угол 90° : эта прямая на рис. 3.7 ориентирована горизонтально.

Заметим кстати, что в случае горизонтального направления начальных скоростей, когда \mathbf{v}_0 образует угол 90° с вертикалью, для прямой вторых фокусов этот угол равен 180° , т. е. вторые фокусы всех эллипсов лежат на прямой, проходящей вертикально вниз через начальную точку и центр Земли. Это уже отмечалось выше.

Указанное здесь свойство рассматриваемого семейства эллиптических орбит, касающееся положения их вторых фокусов, легко объяснить, если вспомнить хорошо известное «оптическое» свойство эллипса: все лучи, выходящие из одного фокуса эллиптического зеркала, после отражения проходят через второй его фокус, т. е. отражаются эллиптическим зеркалом в направлении второго фокуса зеркала. Воображаемый луч света, выходящий из центра Земли (общего фокуса всех эллипсов), отразился бы в точке S касания эллипсов от всех эллипсов в одном и том же направлении. Так как он непременно должен пройти через второй фокус, то вторые фокусы всех рассматриваемых эллипсов лежат на этом отраженном луче. Учитывая, что угол отражения равен углу падения, получаем отмеченное выше соотношение между направлением этого луча и направлением начальных скоростей.

Контрольные вопросы

1. **Запуск спутника Земли из пушки.** Можно ли запустить спутник Земли выстрелом из орудия, находящегося на поверхности Земли? Орудие обладает достаточной мощностью, чтобы сообщить снаряду начальную скорость, превышающую первую

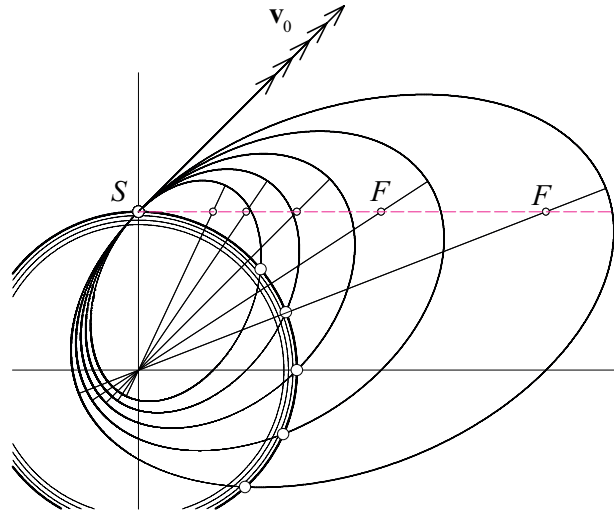


Рис. 3.7: Траектории баллистических снарядов, запускаемых из одной и той же точки под углом 45° с различными по величине начальными скоростями.

космическую (т. е. круговую) скорость.

2. **Вертикальный старт.** Снаряд, начальная скорость которого направлена радиально вверх (от центра планеты), будет замедленно двигаться прямолинейно (удаляться от планеты по вертикали), достигнет некоторой максимальной высоты, и затем начнет падать обратно на планету вдоль той же прямой. На какое максимальное расстояние от центра планеты удалится снаряд, запущенный с поверхности Земли, если его начальная скорость равна круговой скорости для данной начальной точки (т. е. равна первой космической скорости)?

(**) Сколько времени пройдет от момента старта до того момента, когда этот снаряд упадет на Землю?

3. **Семейство спутников, запущенных с одинаковыми скоростями.** Следующие вопросы относятся к семейству орбит спутников, вылетающих из одной точки во всевозможных направлениях с равными по модулю скоростями.

- Почему периоды обращения всех спутников, вылетающих из одной точки с равными по модулю скоростями, одинаковы независимо от направления начальной скорости?
- У всех эллиптических орбит один фокус общий — он расположен в центре планеты. Докажите, что вторые фокусы всех эллипсов лежат на окружности, центр которой находится в начальной точке. Чему равен радиус этой окружности, если начальная точка находится на расстоянии r_0 от центра планеты, а начальная скорость спутников равна v_0 ?
- Который из этих спутников (с каким направлением начальной скорости) удалится на максимальное расстояние от центра Земли? Который из спутников удалится на максимальное расстояние от начальной точки?

- Что можно сказать (на основании наблюдаемой в моделирующем эксперименте картины) о границе области, в пределах которой заключены траектории всех таких спутников?
- (**) Попытайтесь доказать теоретически, что огибающая такого семейства траекторий спутников представляет собой эллипс (в пространстве — эллипсоид вращения) с фокусами в центре планеты и в начальной точке.

3.3 Эволюция орбиты спутника в атмосфере

Сопротивление воздуха добавляется к силе тяготения в тех случаях, когда спутник движется по орбите, проходящей через атмосферу планеты. Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет проследить эволюцию орбиты спутника под влиянием атмосферы.

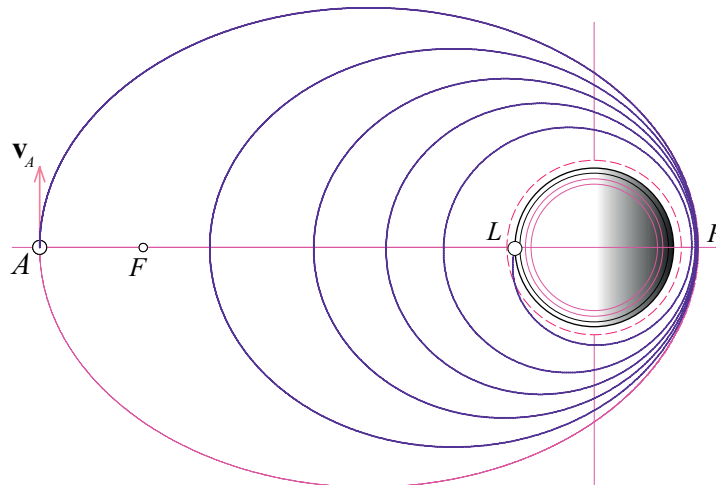


Рис. 3.8: Эволюция орбиты спутника под влиянием сопротивления воздуха в верхних разреженных слоях атмосферы.

Пусть, например, первоначальная не возмущенная атмосферой орбита спутника представляет собой сильно вытянутый эллипс с апогеем в точке A (см. рис. 3.8). Допустим, что перигей P невозмущенной орбиты попадает в сильно разреженные верхние слои атмосферы, как показано на рис. 3.8 (тонкой штриховой линией показана условная верхняя граница атмосферы). В течение короткого времени спутник движется сквозь разреженный воздух каждый раз, когда он проходит через перигей P своей орбиты. Из-за сопротивления воздуха спутник в очередной раз «выныривает» из атмосферы с чуть меньшей скоростью, чем при входе в нее.

В качестве первого приближения можно считать, что спутник движется по кеплерову эллипсу только под действием силы тяготения, и что он испытывает сопротивление воздуха только в одной точке орбиты, как если бы при проходе через перигей P он «протыкал» невидимую тонкую стенку. Таким образом, при каждом проходе через перигей скорость спутника немного уменьшается. Такое почти мгновенное уменьшение скорости в перигее

влияет в первую очередь на высоту апогея орбиты (см. рис. 3.8) и почти не сказывается на высоте перигея. Поэтому ориентация большой оси эллиптической орбиты остается почти неизменной, но размер большой оси уменьшается с каждым оборотом спутника. Чем ниже перигей орбиты, тем значительнее этот эффект. В итоге траектория превращается в постепенно скручивающуюся спираль. Когда траектория снижается до плотных слоев атмосферы, сопротивление воздуха резко возрастает, так что спутник уже не может завершить очередной виток орбиты и приземляется в некоторой точке L .

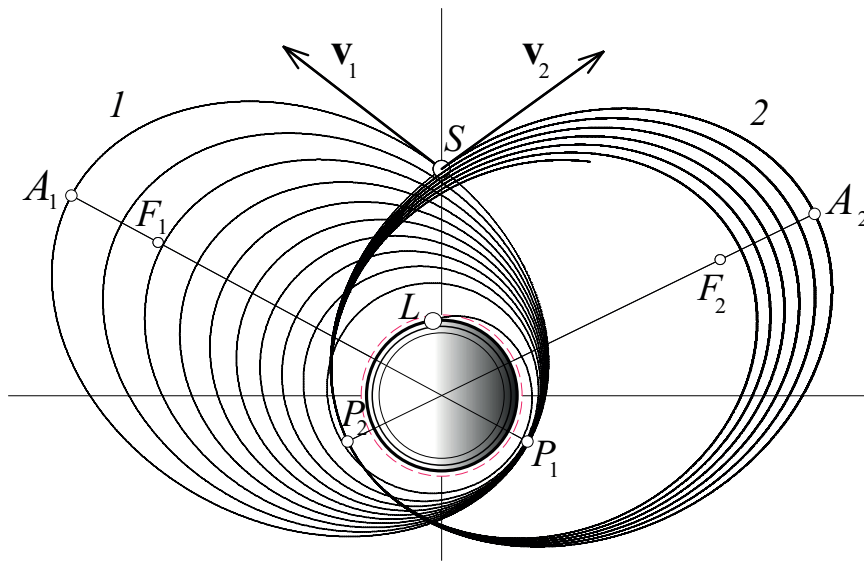


Рис. 3.9: Эволюция в атмосфере двух первоначально почти идентичных орбит со слегка различающейся начальной высотой перигея.

На рис. 3.9 показаны траектории двух спутников, запущенных одновременно из одной точки S с одинаковыми по величине начальными скоростями на почти идентичные эллиптические орбиты (большие оси орбит в моделировании имеют разные ориентации только для того, чтобы было удобнее наблюдать одновременно движение этих спутников). Единственное существенное различие орбит заключается в том, что изначально перигей P_1 спутника 1 расположен чуть ниже, чем перигей P_2 спутника 2. Штриховая окружность вокруг планеты показывает (условную) верхнюю границу атмосферы. При проходе через перигей P_1 спутник 1 испытывает большее сопротивление воздуха по сравнению со спутником 2, и поэтому апогей его орбиты снижается быстрее. Моделирование показывает, что в момент, когда спутник 1 падает на Землю, второй спутник все еще обращается вокруг Земли, хотя апогей его орбиты тоже постепенно снижается.

На самом деле сопротивление воздуха действует на спутник не в одной точке орбиты, а скорее на протяжении некоторого участка траектории в окрестности перигея. В результате высота перигея также уменьшается с каждым витком орбиты, хотя снижение апогея происходит значительно быстрее торможение вблизи перигея прежде всего влияет на апогей, где спутник практически не испытывает сопротивления атмосферы. По мере уменьшения большой оси орбиты период обращения также уменьшается. Форма орбиты постепенно приближается к круговой.

3.4 Поздняя стадия эволюции орбиты и аэродинамический парадокс спутника

Когда орбита становится почти круговой, спутник испытывает сопротивление воздуха вдоль всей траектории. Рассеяние механической энергии, вызванное сопротивлением разреженного воздуха верхних слоев атмосферы, приводит к постепенному снижению траектории с каждым оборотом. В действительности траектория представляет собой не замкнутую окружность, а постепенно скручивающуюся спираль. Когда траектория снижается до плотных слоев атмосферы, сопротивление воздуха резко возрастает, и спутник уже не может завершить очередной виток орбиты.

Рисунок 3.10 иллюстрирует последнюю стадию эволюции орбиты. Чтобы было легче наблюдать за изменениями траектории, эффекты сопротивления воздуха при моделировании сильно преувеличены. В действительности для планеты с атмосферой земного типа первоначальное снижение траектории спутника из-за сопротивления воздуха происходит довольно медленно в виде почти круговых витков.

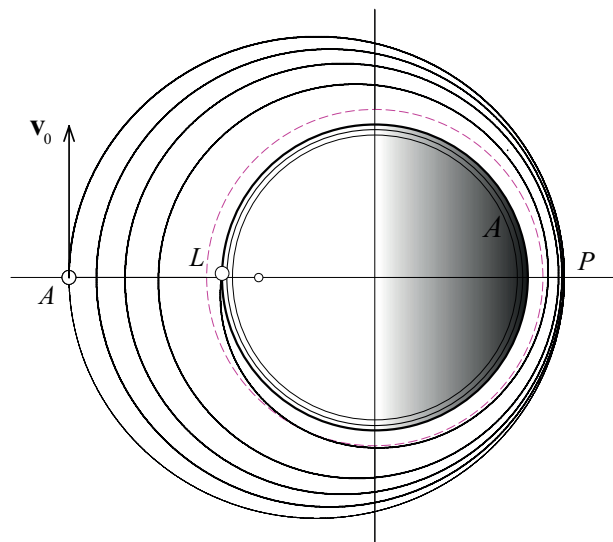


Рис. 3.10: Поздняя стадия эволюции почти круговой орбиты в атмосфере.

Рассматривая последовательные витки постепенно снижающейся траектории спутника как окружности с уменьшающимся радиусом, мы приходим к заключению, что орбитальная скорость спутника возрастает с каждым оборотом. Оказывается, что благодаря сопротивлению воздуха спутник ускоряется в направлении своего движения, как если бы сила сопротивления толкала его вперед, а не тормозила движение. Это неожиданное заключение, основанное на законах динамики, получило название аэродинамического парадокса спутника. Действительно, кажется парадоксальным то, что сопротивление воздуха приводит не к уменьшению, а к увеличению скорости спутника.

Однако в этом явлении нет никакой мистики. Полное ускорение спутника равно векторной сумме гравитационного ускорения \mathbf{g} , направленного к центру Земли, и ускорения, создаваемого силой сопротивления воздуха. Это последнее ускорение направле-

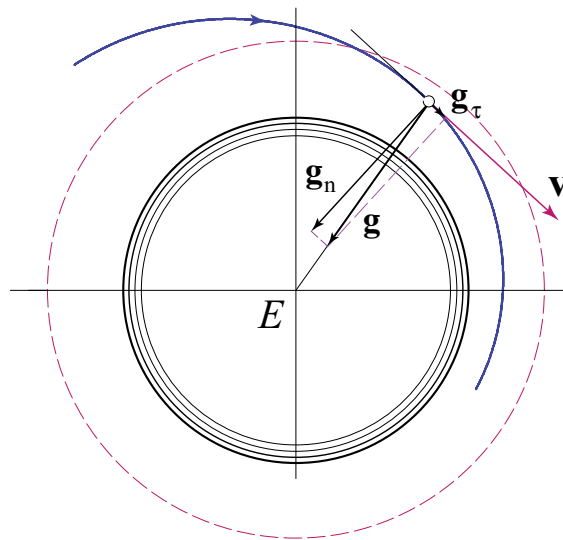


Рис. 3.11: К объяснению аэродинамического парадокса спутника.

но противоположно вектору скорости. Действительное движение спутника происходит не по окружности, а по слабо скручивающейся спирали. Поэтому нормаль к траектории направлена не к центру Земли, а проходит чуть-чуть позади центра, как показано на рис. 3.11 (в сильно преувеличенном виде). Это значит, что направленная к центру Земли сила тяготения имеет не только нормальную к траектории составляющую, но и очень небольшую составляющую, направленную вперед по касательной к спиралевидной траектории спутника. Можно показать, что эта компонента силы тяготения по величине вдвое больше силы сопротивления воздуха.

Поэтому и вектор гравитационного ускорения \mathbf{g} имеет небольшую тангенциальную составляющую, направленную вперед. Эта составляющая показана на рисунке в сильно преувеличенном виде. По модулю это ускорение больше направленного назад ускорения, создаваемого силой сопротивления воздуха, и, несмотря на сопротивление воздуха, скорость снижающегося спутника растет под действием силы тяготения Земли.

Таким образом, благодаря сопротивлению атмосферы скорость спутника не уменьшается, а понемногу возрастает. Здесь нет никакого противоречия с законом сохранения энергии. Полная механическая энергия системы из-за трения понемногу убывает. Рост кинетической энергии, как и рассеяние механической энергии благодаря трению, происходит за счет уменьшения гравитационной потенциальной энергии системы. В самом деле, при движении по круговой орбите в ньютоновском гравитационном поле (отрицательная) потенциальная энергия по модулю вдвое больше кинетической энергии.

Благодаря сопротивлению воздуха баллистический снаряд, запущенный в горизонтальном направлении, может упасть на поверхность Земли в другом полушарии. Подчеркнем, что это принципиально невозможно при отсутствии атмосферы. Возможность падения снаряда в другом полушарии Земли показана на рис. 3.12, полученным в результате моделирования с использованием программы «Баллистические снаряды и спутники». Этот рисунок напоминает знаменитую пророческую иллюстрацию из одной популярной книги Ньютона.

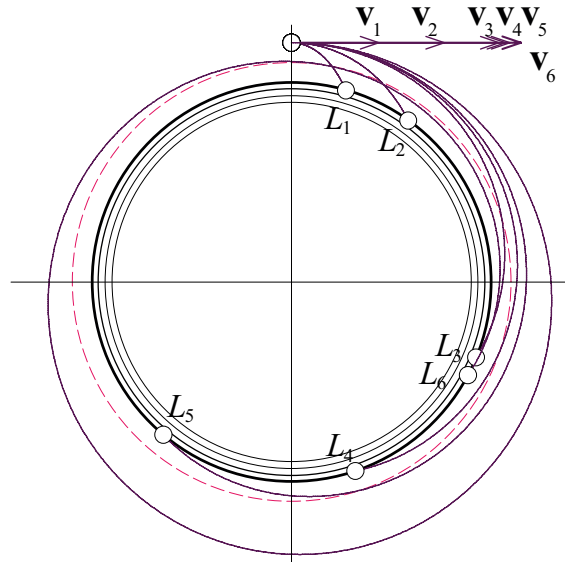


Рис. 3.12: Траектории снарядов, запущенных с вершины очень высокой горы (выше условной границы атмосферы) с разными по величине горизонтально направленными начальными скоростями.

Орудие на очень высокой горе, вершина которой вздымается над атмосферой, выстреливает одно ядро за другим в горизонтальном направлении. Первое ядро падает у подножия горы (точка L_1 на рис. 3.12). Второму ядру орудие сообщает большую начальную скорость v_2 , и оно падает на землю в точке L_2 , пролетев дальше от начальной точки. При дальнейшем увеличении начальной скорости ядра огибают значительную часть земного шара, прежде чем падают на Землю (точки L_3 и L_4). При еще большей начальной скорости ядро может упасть на поверхность Земли в другом полушарии (точка L_5 на рис. 3.12). И, наконец, ядро выстреливают со скоростью, достаточной для того, чтобы оно двигалось по орбите вокруг Земли (v_6 на рис. 3.12 превышает круговую скорость). Совершив более полного оборота, ядро падает на землю в точке L_6 .

Из этого рисунка можно заключить, что Ньютон первым навел мост между знакомыми повседневными явлениями на Земле и загадочными движениями небесных тел. Заглядывая вперед много дальше своих знаменитых предшественников Галилея и Кеплера, Ньютон пришел к заключению, что движения земного пушечного ядра и небесных тел управляются теми же самыми всеобщими законами физики. И по этому же рисунку можно судить о том, что Ньютон уже в те времена предвидел, что человек рано или поздно сможет запустить искусственный спутник Земли!

Глава 4

Активное маневрирование на космических орбитах

4.1 Введение: импульсные орбитальные маневры

Множество интересных задач космической динамики связано с преднамеренным изменением орбиты спутника или космического корабля с целью перехода на траекторию, которая обеспечит выполнение намеченной цели космического полета. Орбиту можно модифицировать сообщением кораблю дополнительного импульса. Например, скорость корабля можно изменить кратковременным включением тягового ракетного двигателя, предварительно сориентировав корабль так, чтобы получить заданный результат. Маневр должен быть выполнен в нужный момент времени либо космонавтами корабля, либо системой дистанционного управления.

Если тяговый двигатель обладает достаточной мощностью, так что для выполнения маневра требуется его включение лишь на короткое время (настолько короткое, что за время работы двигателя корабль проходит очень малую часть орбиты), в первом приближении можно принять, что изменение скорости корабля в результате маневра происходит практически в одной точке, после чего движение опять определяется только силами тяготения. В моделирующей программе предполагается, что в результате маневра корабль получает дополнительный импульс мгновенно. После такого импульсного маневра корабль продолжает пассивное движение по новой орбите. Параметры новой орбиты определяются положением и новым вектором скорости корабля сразу после сообщения ему дополнительного импульса.

С помощью программы «Маневры на орбите и относительное движение», позволяющей моделировать активные маневры космического корабля, можно проверить, как будет происходить в действительности заранее спланированный и рассчитанный Вами космический полет. При этом Вы будете выполнять миссию либо пилота космического корабля, либо оператора, выполняющего дистанционное управление полетом. Все маневры Вы выполняете, мгновенно изменяя вектор скорости космического корабля.

В моделирующей программе предполагается, что первоначально корабль пристыкован к космической станции, которая обращается вокруг Земли (или какой-либо другой планеты) по круговой орбите. Высота этой орбиты, а также величина дополнительной скорости, которую получит корабль при выполнении активного маневра, должны быть введены предварительно. Эта дополнительная скорость (называемая иногда характери-

стической скоростью маневра), сообщается космическому кораблю сразу после отстыковки от орбитальной станции.

Далее в этой главе Вы найдете подробные инструкции по управлению программой «Маневры на орбите и относительное движение» и описание следующих маневров, моделирование которых можно выполнить с помощью этой программы:

- Возвращение из космоса на Землю
- Относительное движение тел на космических орбитах
- Космический зонд и относительное движение
- Переходы между орбитами и межпланетные перелеты

4.2 Как выполнять активные маневры

Навигация в космосе радикально отличается от того, к чему мы привыкли в условиях земной жизни, и интуиция нас часто подводит. Управление космическим кораблем совсем не похоже на вождение автомобиля и даже на пилотирование самолета. Чтобы привести космический корабль в заданное место, совершенно недостаточно направить нос корабля в этом направлении и сообщить кораблю некоторую скорость. Понимание принципов навигации на космических орбитах абсолютно необходимо, например, для маневров сближения и стыковки космических аппаратов.

С помощью программы «Маневры на орбите и относительное движение», позволяющей моделировать активные маневры космического корабля, можно проверить, как в действительности будет происходить спланированный и заранее рассчитанный Вами космический полет. При этом Вы будете выполнять миссию либо пилота космического корабля, либо оператора, выполняющего дистанционное управление полетом. Все маневры Вы выполняете, мгновенно изменяя вектор скорости космического корабля.

Вам предоставлены на усмотрение два способа выбора момента времени, когда будет включен двигатель для совершения очередного маневра: путем автоматического либо ручного управления. При выборе автоматического управления полетом Вам нужно указать время совершения маневра заранее, впечатывая его в соответствующее окно ввода («Время маневра» на панели ввода параметров, см. рис. 4.1) на этапе проектирования полета. Панель ввода можно открыть с помощью соответствующего пункта меню. Отсчет времени начинается с момента начала моделирования.

Вы можете выбрать либо естественные единицы для ввода времени и скорости, а именно, период обращения станции на круговой орбите и скорость ее движения по этой орбите, либо обычные единицы (секунды и километры в секунду соответственно). После того, как Вы ввели значение дополнительной скорости, которая будет сообщена кораблю, и время маневра, нажмите кнопку «Добавить» (“Add”), чтобы включить эти значения в список назначаемых маневров. Направление дополнительной скорости для этого маневра зависит от того, какая из опций («Вверх», «Вниз», «Вперед» или «Назад») была выбрана в рамке «Направление» при включении данного маневра в список. Это направление дополнительной скорости можно задавать либо по отношению к местному горизонту, либо по отношению к вектору мгновенной скорости корабля, в зависимости от выбора опции в рамке «Ориентация».

Таким способом Вы можете назначить заранее любое количество активных маневров для данного полета, добавляя в список требуемые значения величины дополнительной

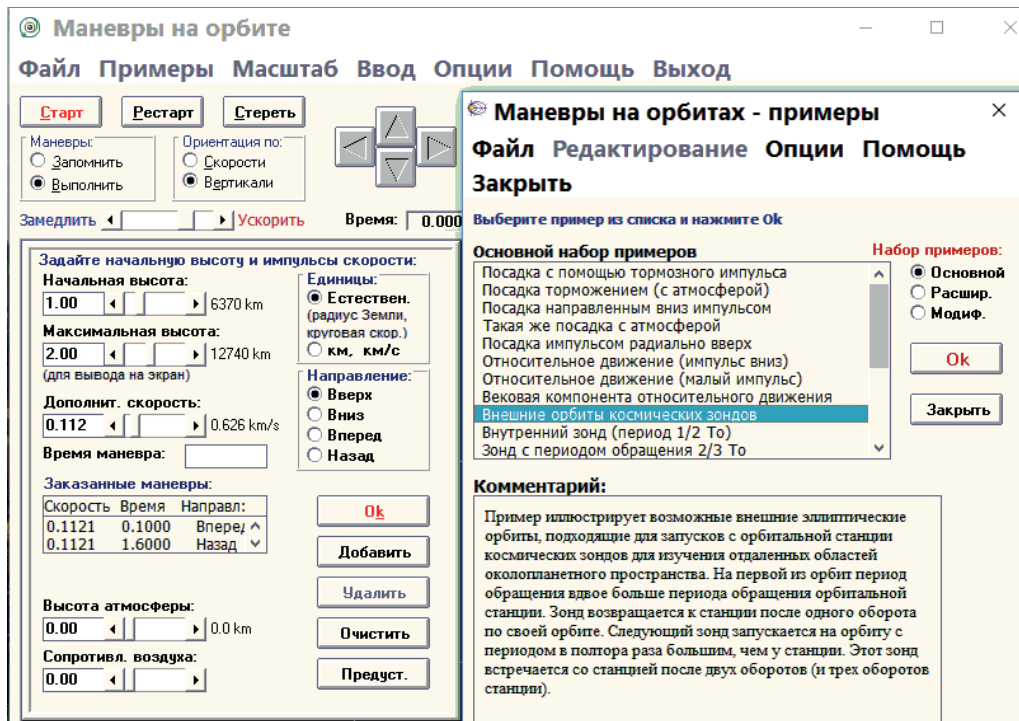


Рис. 4.1: Панель ввода параметров и панель примеров программы «Маневры на орбите и относительное движение».

скорости, ее направления и момента времени выполнения маневра. Составленный список можно редактировать путем добавления новых маневров в конце списка, удаления некоторых маневров (для этого нужно отметить соответствующий маневр в списке и нажать кнопку «Удалить» (“Remove”), или путем вставки новых маневров между уже введенными. Чтобы вставить маневр, введите нужную дополнительную скорость и время маневра в соответствующие окна, и в списке отметьте маневр, перед которым Вы хотите вставить новый. Затем нажмите кнопку «Вставить» (“Insert”).

Когда список будет готов, нажмите кнопку «Ок». Программа автоматически выполнит назначенные маневры после того, как Вы выберете опцию «Выполнить» и нажмете кнопку «Пуск».

Для автоматического выполнения маневров по заданной программе необходимо заранее рассчитать момент времени для выполнения каждого маневра. Такая необходимость отпадает при использовании ручного управления. Наблюдая за движением космического корабля на экране компьютера, Вы можете в нужный момент нажать на одну из четырех управляющих кнопок со стрелками, находящихся в верхней части панели окна, в котором отображается движение. Этим Вы даете команду на отстыковку корабля от орбитальной станции и на немедленное сообщение кораблю дополнительной скорости кратковременным включением ракетного двигателя.

При моделировании дополнительная скорость сообщается кораблю точно в тот момент, когда Вы нажимаете соответствующую кнопку со стрелкой. Ориентация дополни-

тельной скорости Δv зависит от того, на которую из четырех кнопок Вы нажмете.

Вектор дополнительной скорости Δv лежит в плоскости орбиты и может иметь одну из следующих четырех ориентаций: вверх, вниз, вперед или назад. Эти направления вектора Δv можно задавать либо по отношению к вектору v мгновенной скорости корабля, либо по отношению к местной вертикали в точке выполнения маневра, в зависимости от опции, выбранной Вами перед выполнением маневра. Величина сообщаемой дополнительной скорости определяется тем значением, которое Вы ввели в соответствующее окно ввода параметров перед началом моделирования.

В дальнейшем при выполнении маневров Вы имеете возможность наблюдать за движением корабля и одновременно за движением орбитальной станции, которая продолжает оставаться на прежней околоземной круговой орбите.

На протяжении моделируемого космического полета Вы можете неоднократно выполнять маневры с помощью ручного управления, выбирая каждый раз по своему усмотрению нужный момент и нужное направление для сообщения кораблю дополнительной скорости. Однако величину добавочной скорости для каждого маневра необходимо выбрать заранее и ввести соответствующие значения в список назначенных маневров, используя панель ввода параметров. Делается это точно так же, как и при программировании автоматического маневрирования, с той разницей, что окно ввода момента времени очередного маневра можно оставлять пустым, и можно не обращать внимания на обозначенное направление дополнительного импульса, так при ручном управлении эти параметры зависят от действий оператора, а не от введенных заранее значений. Величина дополнительной скорости для каждого выполняемого оператором очередного маневра берется последовательно из составленного Вами заранее списка.

Если во время выполнения программой в автоматическом режиме последовательно заранее назначенных маневров Вы нажмете одну из управляющих кнопок со стрелками, происходит принудительное переключение в режим ручного управления. Это значит, что программа будет игнорировать назначенные заранее моменты времени и направления дополнительной скорости, ожидая управляющих действий оператора.

Когда весь список назначенных маневров исчерпан (как в автоматическом режиме, так и при ручном управлении), Вы тем не менее можете продолжать маневрирование с помощью ручного управления. В этом случае при последующих нажатиях на управляющие кнопки со стрелками корабль каждый раз получает дополнительную скорость, величина которой была на последнем месте в подготовленном списке.

При использовании ручного управления программа запоминает последовательность выполненных оператором команд. Все их характеристики, включая моменты времени и направления дополнительной скорости, помещаются в список. Впоследствии всю последовательность маневров можно воспроизвести, нажав на кнопку «Рестарт» в рамке «Маневры». Прежде чем воспроизводить последовательность выполненных маневров, Вы можете отредактировать их список и сделать необходимые исправления параметров любого маневра. Для этого нужно воспользоваться панелью ввода параметров, которая открывается при выборе соответствующего пункта меню.

При выполнении моделирования можно открыть дополнительное окно, в котором движение космического аппарата будет показано в другой системе отсчета. Эта дополнительная система отсчета связана с орбитальной станцией. Точнее, эта система связана с вращающейся прямой, соединяющей центр планеты с орбитальной станцией. Это неинерциальная система отсчета, поскольку она равномерно вращается вместе с орбитальной станцией. В этой системе отсчета станция неподвижна: действующая на нее сила притяжения к Земле уравновешена центробежной силой инерции. Про движение косми-

ческого аппарата относительно этой системы отсчета, изображаемое программой в дополнительном окне, можно сказать, что именно таким это движение будет представляться космонавтам, находящимся на борту орбитальной станции. В необычных условиях орбитального полета навигация совершенно не похожа на то, к чему мы привыкли здесь на Земле, и наша интуиция, выработанная на примерах условий земного окружения, работает плохо. Движение корабля относительно станции, наблюдаемое в дополнительном окне программы, проявляет себя с необычной стороны. Многие его особенности трудно примирить со «здравым смыслом» и нашим повседневным опытом.

Чтобы открыть окно, в котором будет представлено относительное движение, в меню «Zoom» выберите «Относительное движение». Размеры и положение дополнительного окна на экране можно изменять стандартными способами. Если автоматический выбор масштаба для представления движения Вас не устраивает, масштаб можно изменить, воспользовавшись пунктами меню «Rescale», или «Zoom in», «Zoom out». Пункт «Rescale» особенно удобен тогда, когда Вы уже выполнили моделирование и собираетесь повторить его при прежних значениях параметров.

Начать работу с программой рекомендуется с просмотра наборов заранее подготовленных примеров, включенных в программу. Эти примеры иллюстрируют множество возможных маневров на космических орбитах. Чтобы открыть панель со списком примеров, выберите пункт меню «Примеры». На этой панели (см. рис. 4.1). Вы можете переключаться между основным и расширенным наборами примеров. Последний содержит дополнительные более изощренные примеры. Чтобы запустить пример, отметьте его в списке и нажмите кнопку «Ok». Затем нажмите кнопку «Пуск» на главной панели, чтобы приступить к моделированию. При воспроизведении этих заранее заготовленных примеров нет необходимости вводить какие-либо параметры. В дальнейшем, приобретя некоторый опыт работы с этой программой, Вы сможете создавать свои собственные примеры и сохранять их в дополнительных (модифицированных) наборах. Чтобы узнать, каким образом можно создавать свои собственные наборы примеров, смотрите раздел «Как создавать новые примеры».

4.3 Космические полеты и маневрирование на космических орбитах

Цели орбитальных маневров могут быть различными. Можно, например, планировать перевод корабля на более высокую круговую орбиту с тем, чтобы он оставался там некоторое время, а затем возвратился к орбитальной станции и совершил с ней мягкую стыковку. Или же мы можем проектировать маневры перевода спускаемого аппарата на эллиптическую орбиту снижения, которая должна привести его на Землю по касательной к поверхности (точнее, по касательной к плотным слоям атмосферы) для совершения мягкой посадки и возвращения экипажа с первоначальной круговой орбиты. Может также возникнуть необходимость запустить автоматический космический зонд с орбитальной станции для исследования поверхности планеты с низкой орбиты или, напротив, запустить зонд на большое расстояние от Земли для изучения межпланетного пространства. Иногда орбиту космического зонда нужно проектировать так, чтобы было возможным его возвращение на орбитальную станцию после выполнения запланированных исследований.

4.3.1 Планирование космических полетов

Для планирования космических полетов нужно решать разнообразные задачи, связанные с проектированием подходящих орбит. Чтобы перевести космический аппарат на желаемую орбиту, нужно заранее рассчитать величину и направление необходимой дополнительной скорости (характеристическую скорость), а также момент времени, когда нужно сообщить аппарату эту скорость. Как правило, такие задачи не имеют единственного решения. Сложность поставленной задачи обусловлена тем, что из множества возможных решений нам нужно выбрать оптимальный маневр. Проблема оптимизации может включать множество противоречивых требований и ограничений, касающихся допустимых маневров. Например, может быть поставлено требование минимальных затрат ракетного топлива при дополнительном условии, чтобы возможные ошибки навигации и управления (в частности, ошибки в определении момента времени для совершения маневра) не привели к недопустимым отклонениям действительной траектории от расчетной.

4.3.2 Возвращение из космоса на Землю

В качестве примера активных маневров космического корабля, первоначально находящегося на опоясывающей планету низкой круговой орбите, рассмотрим задачу перевода спускаемого аппарата на траекторию снижения. Для безопасного возвращения на Землю спускаемый аппарат должен входить в плотные слои атмосферы под очень малым углом к горизонту. Крутой вход в атмосферу опасен из-за сильного нагревания аппарата из-за трения о воздух. Для этого теплозащитный экран спускаемого аппарата должен отвечать очень строгим требованиям. В случае пилотируемого корабля с экипажем сильное замедление, вызванное сопротивлением воздуха при крутом спуске, недопустимо главным образом из-за возникающих при резком торможении перегрузок, опасных для космонавтов. Это значит, что проектируемая траектория пассивного снижения должна лишь касаться верхней атмосферы. Мы рассмотрим и сравним два возможных способа перевода спускаемого аппарата на подходящую траекторию снижения:

1. После отделения спускаемого аппарата от орбитальной станции ему сообщают дополнительную скорость в направлении, противоположном орбитальной скорости.
2. Сообщаемая спускаемому аппарату дополнительная скорость направлена вертикально вниз (вдоль местной вертикали).

В любом случае дополнительная скорость переводит спускаемый аппарат с первоначальной круговой орбиты на некоторую эллиптическую орбиту. Один из фокусов новой орбиты, в соответствии с первым законом, расположен в центре Земли.

В первом случае кратковременное включение ракетного двигателя изменяет только величину орбитальной скорости при сохранении ее направления. Поэтому в точке, где происходит срабатывание тормозного двигателя (точка A на рис. 4.2), обе орбиты (прежняя круговая и новая эллиптическая) имеют общую касательную.

В этой точке A расположен апогей новой эллиптической орбиты. Перигей этой орбиты находится в противоположной точке P эллипса, на другом конце его большой оси. Очевидно, что именно в этой точке эллипс должен касаться поверхности планеты (более точно, эллипс должен касаться верхних слоев плотной атмосферы). Спускаемый аппарат должен войти в атмосферу в окрестности этой точки траектории снижения.

Моделирование показывает, что спускаемый аппарат на протяжении почти всей первой половины оборота действительно движется по теоретически предсказанной траектории. Но вблизи точки P траектория отклоняется вниз благодаря сопротивлению воздуха,

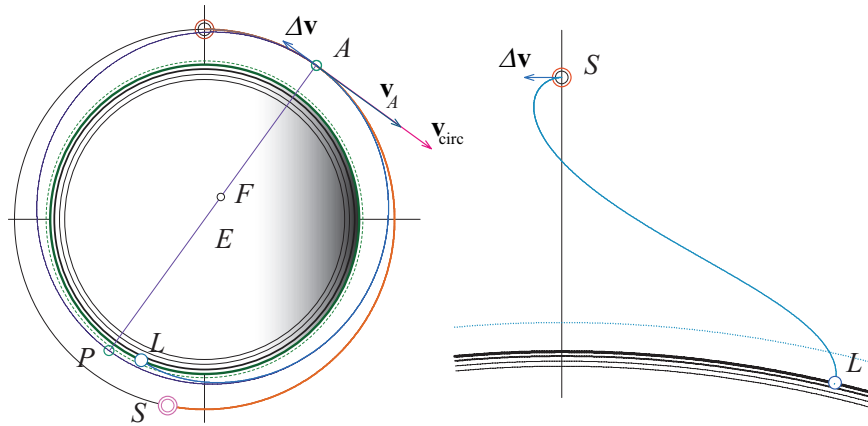


Рис. 4.2: Возвращение с орбиты при помощи тормозного импульса, направленного противоположно орбитальной скорости. Эллиптическая траектория снижения спускаемого аппарата в геоцентрической системе отсчета (слева) и в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа). Тонкой штриховой линией показана условная верхняя граница атмосферы.

которое принимается во внимание при моделировании. Приземление спускаемого аппарата происходит в точке L . Заметим, что в моделировании, показанном на рис. 4.2), использовано преувеличенно большое значение для высоты атмосферы, чтобы можно было рассмотреть детали конечного участка траектории спуска, проходящего в пределах атмосферы планеты. Условная верхняя граница атмосферы, плотность которой экспоненциально убывает с высотой, показана на рис. 4.2) тонкой штриховой линией.

В момент приземления спускаемого аппарата станция проходит через точку S своей круговой орбиты. В правой части рис. 4.2 показана траектория спускаемого аппарата в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией. Именно такой увидят эту траекторию космонавты, находящиеся на борту орбитальной станции и наблюдающие за снижением аппарата. С их точки зрения спускаемый аппарат сначала действительно движется в направлении сообщенной ему дополнительной скорости, но вскоре скорость аппарата относительно станции изменяет направление на почти противоположное. Постепенно снижаясь, спускаемый аппарат обгоняет станцию и уходит от нее вперед, оставляя станцию позади.

Дополнительная скорость Δv , необходимая для перехода с круговой орбиты на такую эллиптическую траекторию снижения (характеристическая скорость), может быть рассчитана на основе законов сохранения энергии и момента импульса. Детали расчета приведены в разделе 13.1. Приведем здесь для справок лишь окончательную формулу:

$$\Delta v = v_{\text{кр}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + r_0/R}} \right). \quad (4.1)$$

Здесь $v_{\text{кр}} = \sqrt{GM/r_0} = \sqrt{gR^2/r_0}$ скорость станции на круговой орбите, G — гравитационная постоянная, M — масса планеты, g — ускорение свободного падения на поверхности планеты, r_0 — радиус круговой орбиты станции, R — радиус планеты (точнее, радиус планеты вместе с атмосферой).

В случае низкой круговой орбиты, высота h которой над поверхностью Земли мала по сравнению с радиусом Земли ($h \ll R$), характеристическую скорость Δv можно рассчитать по следующей приближенной формуле:

$$\Delta v = v_{\text{кр}} \frac{h}{4R}, \quad (4.2)$$

где $v_{\text{кр}}$ — скорость станции на круговой орбите. Если, например, высота орбиты составляет $0.2R = 1270$ км, дополнительная скорость Δv должна составлять около 5% круговой скорости (расчет по точной формуле дает значение 4,65%).

Рассмотренный метод спуска с круговой орбиты (с помощью направленного назад дополнительного импульса) требует абсолютно минимальных затрат ракетного топлива. Однако он чрезвычайно чувствителен к небольшим отклонениям в значении дополнительной скорости Δv . В идеальном случае, когда дополнительная скорость имеет в точности необходимое расчетное значение, точка приземления находится вблизи перигея эллиптической орбиты. За время снижения спускаемый аппарат проходит в точности половину эллипса (от A до P), а орбитальная станция — почти половину своей круговой орбиты. В момент приземления спускаемого аппарата станция находится выше и немного позади него.

Чувствительность рассматриваемого метода к отклонениям в значении дополнительной скорости Δv означает, что когда действительная величина дополнительной скорости чуть больше требуемого значения, точка приземления значительно смещается от перигея идеального эллипса (от точки P) в направлении начальной точки A . А если скорость Δv , чуть меньше требуемой, перигей эллиптической орбиты оказывается выше верхней границы плотной атмосферы, и спускаемый аппарат может остаться на орбите еще на протяжении нескольких витков. Из-за большого сопротивления воздуха вблизи перигея происходит значительное понижение апогея орбиты после каждого оборота. Орбита спускаемого аппарата постепенно приближается к низкой круговой, эволюционируя так, как описано в разделе «Эволюция орбиты в атмосфере». В конце концов спускаемый аппарат входит в плотные слои атмосферы и приземляется. Но в таких условиях почти невозможно предсказать точно место предстоящей посадки.

Если дополнительная скорость, сообщаемая космическому аппарату в некоторой точке B круговой орбиты, направлена радиально (перпендикулярно орбитальной скорости), изменяются и величина, и направление вектора скорости (рис. 4.3). Поэтому новая эллиптическая орбита пересекает первоначальную круговую орбиту в точке B . Для осуществления мягкой посадки новая эллиптическая траектория снижения в своем перигее также должна касаться Земли (верхних слоев плотной атмосферы). Из этого требования (расстояние от силового центра до перигея равно радиусу Земли R) с помощью законов сохранения энергии и импульса можно найти необходимую дополнительную скорость Δv для рассматриваемого метода приземления (детали расчета можно найти в разделе 13.1):

$$\Delta v = v_{\text{кр}} \frac{h}{R}. \quad (4.3)$$

Таким образом, этот метод перехода на траекторию приземления требует приблизительно в четыре раза большую по величине дополнительную скорость, чем рассмотренный выше способ. Например, если высота h орбиты равна $0.2R$, дополнительная скорость должна составлять 20% круговой скорости. Угловое расстояние между точкой схода B с круговой орбиты и точкой приземления P в этом случае составляет 90 градусов (четверть витка) в отличие от первого метода, где расстояние от точки схода A до точки приземления P было вдвое больше (половина витка). В момент приземления орбитальная станция

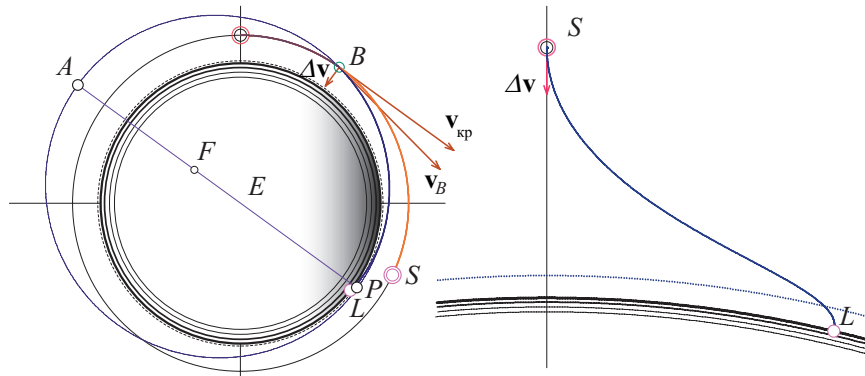


Рис. 4.3: Возвращение с орбиты при помощи дополнительного импульса, направленного вертикально вниз. Эллиптическая траектория снижения спускаемого аппарата в геоцентрической системе отсчета (слева) и в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

находится на некотором расстоянии позади спускаемого аппарата, так как к этому моменту станция еще не завершает четверти оборота после точки B .

Правая часть рис. 4.3 показывает траекторию приземления в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией. Сначала космонавты, находящиеся на борту станции, видят как спускаемый аппарат действительно движется прямо вниз, в направлении дополнительного импульса, сообщенного ему ракетным двигателем. Однако вскоре его траектория аппарата отклоняется вперед по направлению орбитального движения станции. На пути к Земле спускаемый аппарат уходит вперед, оставляя орбитальную станцию позади.

Как ни удивительно на первый взгляд может показаться с точки зрения здравого смысла, спускаемый аппарат можно перевести на траекторию приземления поперечным (радиальным) импульсом, направленным не только назад или вниз, но и вертикально вверх (см. рис. 4.4)! В этом случае спускаемый аппарат, начиная с точки B перехода на эллиптическую орбиту, сначала поднимается выше круговой орбиты станции. Только после прохождения через апогей своей орбиты он начинает опускаться по мере приближения к точке P (к перигею орбиты), где он и погружается в плотные слои атмосферы. Угловое расстояние от точки схода с круговой орбиты до точки приземления составляет в этом случае 270° , т. е. три четверти витка. За это время орбитальная станция проходит почти полный оборот, и в момент приземления спускаемого аппарата она находится далеко впереди места посадки.

Вид траектории спускаемого аппарата с точки зрения космонавтов на орбитальной станции показан на правой половине рис. 4.4. Сначала аппарат движется вверх, в направлении дополнительной скорости, но вскоре траектория поворачивает назад. Относительное движение аппарата становится попятным, и он отстает от станции. После попятного движения на протяжении более четверти оборота по орбите направление относительного движения модуля обращается. Затем модуль начинает опускаться, приближаясь по касательной к поверхности Земли.

Чтобы перейти на эллиптическую траекторию, касающуюся поверхности Земли, величина радиальной дополнительной скорости должна иметь одно и то же значение как при направлении импульса вниз, так и при направлении вверх. К такому заключению лег-

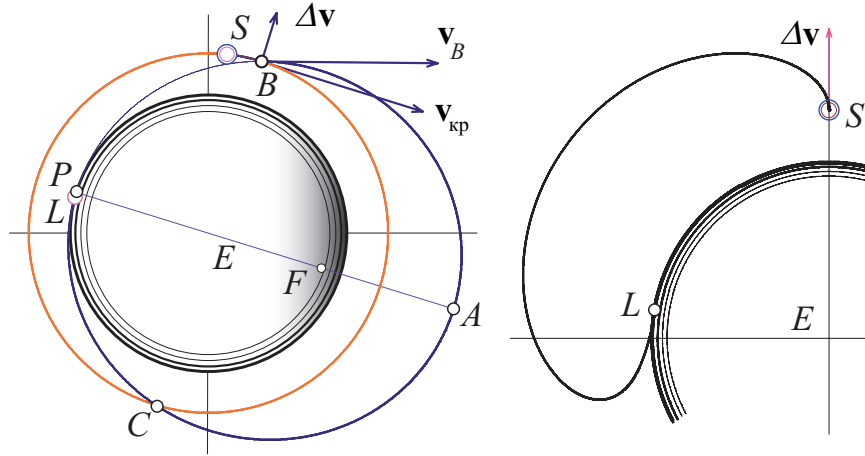


Рис. 4.4: Эллиптическая траектория снижения спускаемого аппарата после сообщения ему дополнительной скорости радиально вверх в геоцентрической системе отсчета (слева) и в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

ко придти либо на основе законов сохранения энергии и момента импульса (соответствующие уравнения одинаковы для обоих случаев), либо на основании соображений симметрии. В самом деле, когда цель заключается в достижении спускаемым аппаратом земной поверхности в заданной точке P , нужно перевести аппарат с исходной круговой орбиты на эллиптическую, для которой точка P касания с поверхностью Земли должна быть перигеем. Такой переход можно осуществить либо в точке B сообщением аппарату дополнительного импульса вертикально вверх, либо в симметричной точке C сообщением вертикально вниз такого же по модулю импульса.

Контрольные вопросы

1. **Приземление при минимальных затратах ракетного топлива.** Объясните, почему наиболее экономичный способ перехода с круговой орбиты на траекторию приземления заключается в сообщении спускаемому аппарату дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальному движению.
2. **Дополнительная скорость, необходимая для приземления.** Рассчитайте с помощью законов сохранения момента импульса и энергии, какую дополнительную скорость необходимо сообщить спускаемому аппарату в направлении, противоположном орбитальному движению, для перехода с круговой орбиты на траекторию приземления. Ответ выразите в естественных для этой задачи единицах. .
3. **Спуск с низкой круговой орбиты.** Упростите полученное выше выражение для Δv в случае низкой круговой орбиты. Проверьте применимость полученной приближенной формулы с помощью моделирующего эксперимента.
4. **Приземление в нужную точку.** В какой точке круговой орбиты должен находиться корабль в момент включения двигателя для того, чтобы приземление произошло в заданной точке? По какой траектории будет происходить снижение корабля для

земного наблюдателя и для космонавтов, наблюдающих за снижением корабля с борта орбитальной станции?

5. **Приземление на планету с атмосферой.** Исследуйте при помощи моделирования влияние сопротивления воздуха, испытываемого спускаемым аппаратом, на положение точки приземления. Попробуйте варьировать высоту атмосферы и коэффициент сопротивления, характеризующий спускаемый аппарат.
6. **Приземление с помощью вертикального дополнительного импульса.** В какой точке круговой орбиты нужно сообщить кораблю направленный вертикально вниз дополнительный импульс скорости, чтобы обеспечить безопасный вход в атмосферу (по касательной) над нужной точкой земной поверхности?
7. **Необычный способ возвращения с орбиты.** Можно ли посадить движущийся по круговой орбите космический корабль, сообщая ему кратковременный дополнительный импульс скорости, направленный вертикально вверх (по радиусу от центра Земли)?
8. **Снижение по вертикали.** Какую дополнительную скорость нужно сообщить кораблю, отстыковавшемуся от движущейся по круговой орбите станции, чтобы снижение корабля происходило по отвесной вертикальной траектории? Каким увидят это снижение космонавты, находящиеся на борту станции?

4.4 Относительное движение тел на космических орбитах

Представим себе, что два спутника обращаются вокруг Земли. Мы знаем, что их орбитальное движение происходит по законам Кеплера. Но как один из них движется относительно другого? Относительное движение играет важную роль, скажем, при выполнении маневров сближения и стыковки двух космических аппаратов. Если два спутника находятся рядом, но имеют (небольшую) относительную скорость, их относительное движение не будет прямолинейным. В необычных условиях орбитального полета принципы навигации сильно отличаются от привычной нам ситуации на Земле, так что здесь интуиция нас подводит. Пилотирование космического корабля совершенно не похоже на управление автомобилем и даже самолетом. Изучение относительного движения орбитальных тел обнаруживает множество особенностей, которые плохо согласуются со здравым смыслом и нашим повседневным опытом.

4.4.1 Движение небольшого предмета, брошенного с орбитальной станции

Моделирующая программа «Маневры на орбите и относительное движение» может отображать относительное движение орбитальных тел. Поэтому с ее помощью можно составить ясное представление о том, как будет выглядеть с орбитальной станции пассивное свободное движение какого-либо предмета, выброшенного с этой станции. В такой задаче особый интерес представляет случай, когда начальная скорость предмета относительно станции много меньше орбитальной скорости станции. Например, каким увидит находящийся на станции космонавт движение предмета, брошенного отвесно вниз в направлении к Земле?

Наши размышления на эту тему могут пройти через несколько этапов.

Сначала, без долгих размышлений и полагаясь на наш земной повседневный опыт, вряд ли бы мы удивились, если брошенный вниз предмет стал бы быстро падать на Землю. Но затем мы неизбежно вспоминаем о том, что орбитальная станция с космонавтами движется над Землей с огромной скоростью — более 7 километров в секунду!

Какой может быть начальная скорость брошенного со станции небольшого предмета? Бросая предмет рукой, можно сообщить ему скорость около 10 – 20 м/с. Рассматривая движение предмета относительно Земли, мы должны сложить векторно эту скорость с орбитальной скоростью станции. Результирующая скорость будет лишь чуть-чуть отличаться по модулю и направлению от скорости орбитальной станции. Это значит, что брошенный космонавтом предмет просто перейдет на другую орбиту, которая почти не отличается от исходной орбиты станции. Как согласовать это заключение с нашим первым предположением, что предмет будет быстро падать на Землю?

Теперь пора перейти в наших рассуждениях к следующему, исследовательскому этапу. Мы резонно вспоминаем, что поставленный вопрос относится не к движению брошенного предмета относительно Земли, а в первую очередь к тому, каким увидят это движение космонавты на станции. Иначе говоря, движение предмета следует рассматривать в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией.

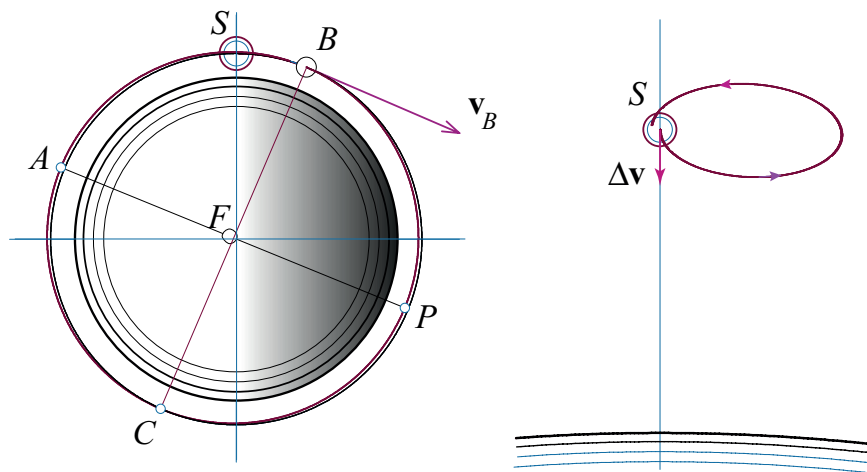


Рис. 4.5: Движение предмета, выброшенного с орбитальной станции на Землю вертикально вниз. Слева показано, как это движение выглядит для наблюдателя на Земле, а справа — для космонавта, находящегося на орбитальной станции.

Моделирующая программа «Маневры на орбите и относительное движение» позволяет наблюдать такое движение одновременно относительно Земли и относительно орбитальной станции в разных окнах на экране компьютера. Чтобы не вводить параметры и начальные условия, необходимые для реализации данного движения, можно просто выбрать соответствующий пример из списка заранее заготовленных примеров на панели, которая открывается с помощью пункта меню «Примеры».

Результат моделирования показан на рис. 4.5. Как видно на правой части рисунка, относительно станции брошенный предмет сначала действительно движется вниз, в направлении дополнительной начальной скорости Δv . Однако вскоре траектория начинает

отклоняться вперед, затем вверх и назад, и наконец, сколь бы странным это ни показалось, тело возвращается к станции с противоположной стороны (сверху), описав почти замкнутую траекторию! Чтобы выяснить физические причины столь странного движения предмета относительно станции, следует сначала рассмотреть движение станции и предмета относительно Земли. Эти движения показаны в левой части рис. 4.5.

Благодаря небольшой дополнительной начальной скорости, которую брошенный в точке B предмет получил в направлении центра Земли, его дальнейшее геоцентрическое движение происходит по эллиптической орбите с очень малым эксцентриситетом. Один фокус эллипса расположен в центре Земли, а второй — в точке F , расположенной очень близко к центру. Этот эллипс на рисунке почти сливается с круговой орбитой станции. Лишь вблизи перигея P эллипс оказывается слегка внутри, а вблизи апогея A — слегка снаружи круговой орбиты. С хорошей точностью можно рассматривать этот эллипс как окружность того же радиуса, но с центром, смещенным из центра Земли в сторону F на половину расстояния до точки F . Большая ось этого эллипса почти равна диаметру исходной круговой орбиты. Поэтому, в соответствии с третьим законом Кеплера, периоды обращения тела и орбитальной станции почти совпадают.

Траектории предмета и станции пересекаются в двух точках — начальной точке B и противоположной точке C . В точке C предмет опять оказывается на одной высоте со станцией. Станция приходит в точку C ровно через половину периода своего равномерного обращения вокруг Земли. Но движение предмета по своей эллиптической орбите слегка неравномерное, и он приходит в точку C чуть раньше станции, потому что на этой половине оборота предмет проходит через перигей своей орбиты, где, в соответствии со вторым законом Кеплера, его скорость больше скорости станции. В результате через пол-оборота, когда станция приходит в общую точку C двух орбит, предмет оказывается впереди станции на одной высоте со станцией. В этот момент предмет находится на максимальном удалении от станции.

На второй половине оборота предмет проходит через апогей A своей орбиты, где его скорость несколько меньше скорости станции. В результате предмет приходит в общую начальную точку B почти одновременно со станцией, приближаясь к ней сверху. Таким образом, движение предмета относительно станции происходит почти по замкнутой траектории. Один цикл этого движения совершается за время, равное периоду обращения станции по орбите.

4.4.2 Численные оценки размеров траектории относительного движения

Могут ли космонавты на самом деле наблюдать такое периодическое движение предмета? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимы количественные оценки размеров почти замкнутой петли, описываемой предметом относительно станции (см. правую часть рис. 4.5).

В нижней и верхней точках относительной траектории предмет находится в моменты прохождения соответственно через перигей P и апогей A своей геоцентрической эллиптической орбиты (см. левую часть рис. 4.5). Как уже отмечалось выше, геоцентрическую эллиптическую орбиту предмета можно рассматривать как окружность, центр которой смещен (вдоль большой оси эллипса PA) из центра Земли на половину расстояния между фокусами. Это смещение Δx легко оценить, принимая во внимание, что векторы скоростей для двух рассматриваемых орбит в точке B их пересечения перпендикулярны к соответствующим радиусам (ни векторы скоростей, ни эти радиусы не показаны на рис. 4.5,

потому что угол $\Delta v/v_{кр}$ между ними настолько мал, что на рисунке они получились бы сливающимися).

Таким образом, это смещение Δx центра орбиты равно произведению радиуса орбиты r_0 на малый угол $\Delta v/v_{кр}$ между направлениями векторов скоростей предмета и станции в начальной точке B (или в начальной точке C): $\Delta x = r_0(\Delta v/v_{кр})$. Поэтому вертикальный полуразмер относительной траектории равен смещению перигея (или апогея) эллиптической орбиты относительно круговой орбиты станции: $2\Delta x = 2r_0(\Delta v/v_{кр})$.

Пусть, например, высота круговой орбиты станции равна десятой доле радиуса Земли R : $h = 0.1R \approx 640$ км, так что радиус орбиты r_0 составляет 7 000 км, а период обращения составляет 98 минут. Допустим, что космонавт бросает предмет со скоростью $v = 15$ м/с, что составляет 0.2% орбитальной скорости $v_{кр} = 7.5$ км/с. Таким образом, для поперечного (вертикального) размера траектории относительного движения мы получаем оценку 28 км.

Маловероятно, чтобы космонавты могли видеть небольшой предмет на удалении более километра. Поэтому они могут проследить за движением брошенного предмета только на протяжении относительно небольшого начального участка почти замкнутой траектории относительного движения. Скорее всего, они потеряют предмет из виду задолго до того, как станет заметным отклонение его траектории от прямой линии. Поэтому движение предмета будет представляться космонавтам как простое падение вниз, в направлении сообщенной ему начальной скорости!

Сделаем также количественную оценку горизонтального размера траектории относительного движения. Как уже отмечалось, больший диаметр этой петли равен отставанию станции от предмета в окрестности общей точки C круговой и эллиптической орбит (см. левую часть рис. 4.5). Используя второй закон Кеплера, мы можем подсчитать разницу ΔT в промежутках времени, необходимых станции и предмету для прохождения половины оборота между точками B и C .

Для станции площадь A , «заметаемая» радиусом-вектором при движении от B до C в течение времени $T/2$, равна в точности половине площади круга: $A = \pi r_0^2/2$. Для предмета, почти круговая орбита которого смещена от центра Земли на расстояние Δx , соответствующая площадь меньше на величину $\Delta A = 2r_0\Delta x = 2r_0^2(\Delta v/v_{кр})$. Поэтому $\Delta T/(T/2) = \Delta A/A = 4(\Delta v/v_{кр})/\pi$, и $\Delta T = 4(r_0/v_{кр})(\Delta v/v_{кр})$ (поскольку $T = 2\pi r_0/v_{кр}$). Таким образом, для максимального отставания станции от предмета получаем:

$$l_{\max} = v_{кр}\Delta T = 4r_0\frac{\Delta v}{v_{кр}}. \quad (4.4)$$

Следовательно, большой диаметр почти замкнутой траектории предмета в его движении относительно станции вдвое больше малого диаметра. Для приведенных выше численных значений (высота орбиты станции $h = 0.1R \approx 640$ км, относительная начальная скорость брошенного предмета $\Delta v = 15$ м/с) максимальное удаление предмета от станции, т. е. большой диаметр петли траектории относительного движения, составляет приблизительно 56 км.

Можно показать (см. раздел 13.3, стр. 220), что когда начальная относительная скорость мала по сравнению с орбитальной скоростью, движение тела относительно орбитальной станции описывается сравнительно простыми дифференциальными уравнениями. Если малая начальная скорость лежит в плоскости орбиты и направлена точно перпендикулярно скорости станции, решение этих уравнений показывает, что траектория относительного движения представляет собой эллипс, малая полуось которого равна $r_0(\Delta v/v_{кр})$, а большая полуось вдвое больше малой. Этот результат полностью согласу-

ется с приведенными выше оценками.

Предмет будет периодически возвращаться к станции, когда небольшая дополнительная скорость направлена вертикально вниз (как в рассмотренном примере) или вертикально вверх, по радиусу от центра Земли. Результат моделирования соответствующего движения представлен на рис. 4.6).

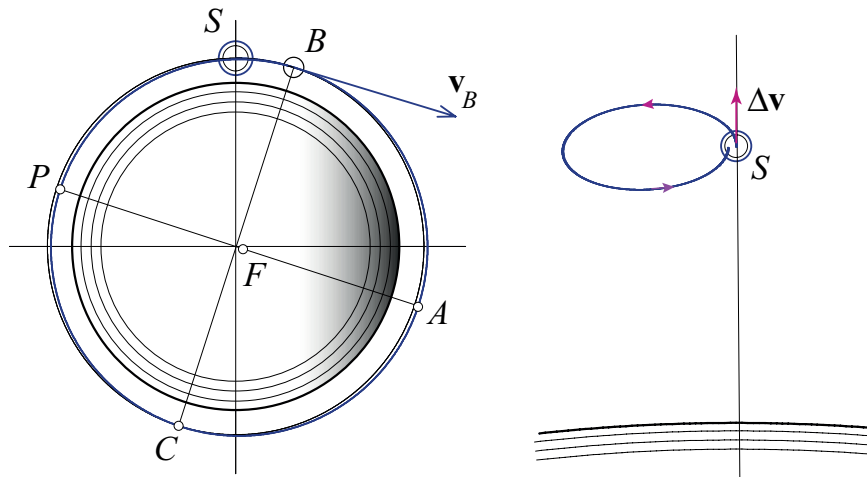


Рис. 4.6: Движение предмета, выброшенного с орбитальной станции на Землю вертикально вверх. Слева показано, как это движение выглядит для наблюдателя на Земле, а справа — для космонавта, находящегося на орбитальной станции.

Как видно на правой части рисунка, относительно станции брошенный предмет сначала действительно движется вверх, в направлении дополнительной начальной скорости Δv . Однако вскоре траектория начинает отклоняться назад, затем вниз и вперед, и тело возвращается к станции с противоположной стороны (снизу), описав почти замкнутую траекторию. Физические причины странного движения предмета относительно станции легко понять, если рассмотреть движение станции и предмета относительно Земли. Эти движения показаны в левой части рис. 4.6.

Действительно, геоцентрическое движение предмета происходит по эллиптической орбите с очень малым эксцентриситетом. Этот эллипс почти сливается с круговой орбитой станции. Большая ось этого эллипса почти равна диаметру исходной круговой орбиты. Поэтому периоды обращения предмета и орбитальной станции почти совпадают. Траектории предмета и станции пересекаются в двух точках — начальной точке B и противоположной точке C . В точке C пересечения орбит предмета и станции предмет оказывается на одной высоте со станцией, но он приходит в точку C чуть позже станции, потому что на этой половине оборота предмет проходит через апогей A своей орбиты, где его скорость меньше скорости станции. В результате предмет оказывается позади станции на одной высоте с ней.

На второй половине оборота предмет проходит через перигей своей орбиты, где его скорость несколько больше скорости станции. В результате предмет приходит в общую начальную точку B почти одновременно со станцией, приближаясь к ней снизу. Таким

образом, движение предмета относительно станции происходит почти по замкнутой траектории. Один цикл этого движения совершается за время, равное периоду обращения станции по орбите.

4.4.3 Замкнутая траектория относительного движения

Может ли траектория предмета относительно станции быть в точности замкнутой? Чтобы это произошло, период его геоцентрического движения должен совпасть точно с периодом обращения станции. В рассмотренных выше примерах это условие выполнялось приближенно: различие периодов обращения проявлялось в членах второго порядка по малому параметру, равному отношению дополнительной радиальной скорости предмета к скорости станции. Этому различия не было бы совсем, если бы результирующая геоцентрическая скорость предмета сразу после маневра перехода на эллиптическую орбиту была бы равна по модулю скорости орбитальной станции. Тогда на новой орбите энергия (в расчете на единицу массы) осталась бы такой же, как и на исходной круговой орбите, и большая полуось эллипса была бы равна радиусу круговой орбиты. Поэтому, в соответствии с третьим законом Кеплера, совпадали бы периоды обращения предмета и станции. Рисунок 4.7 поясняет, как можно получить замкнутую орбиту относительного движения в моделировании.

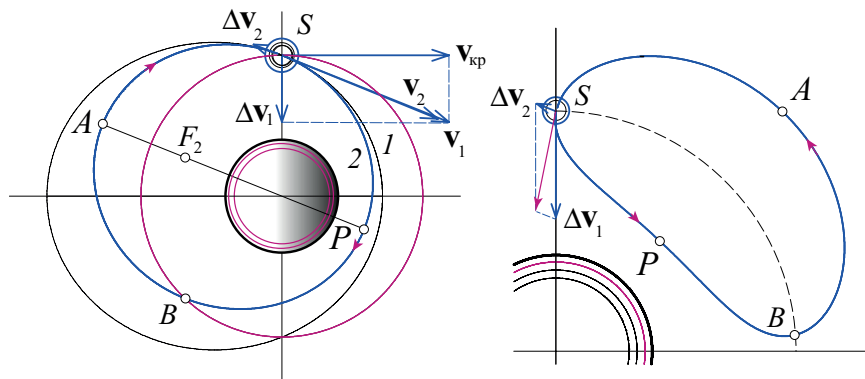


Рис. 4.7: Двойной маневр для получения замкнутой траектории относительного движения. Слева показано, как это движение выглядит для наблюдателя на Земле, а справа — для космонавта, находящегося на орбитальной станции.

Сначала предмет получает дополнительную скорость Δv_1 вертикально вниз, в направлении на центр Земли. Эта скорость складывается векторно с орбитальной круговой скоростью. В результате начальная геоцентрическая скорость v_1 предмета по модулю равна $\sqrt{v_{кр}^2 + \Delta v_1^2}$, и его дальнейшее движение происходило бы по эллиптической орбите 1 с периодом обращения, несколько бóльшим, чем у станции. Чтобы на новой орбите период обращения был бы таким же, как у станции, нужно уменьшить скорость v_1 до величины $v_{кр}$, не меняя ее направления. Тогда начальная скорость предмета v_2 (см. рис. 4.7) была бы равна по модулю круговой скорости $v_{кр}$.

Для этого сразу после сообщения предмету скорости Δv_1 нужно совершить второй маневр, сообщив предмету дополнительную скорость Δv_2 назад, противоположно век-

тору \mathbf{v}_1 . Величина дополнительной скорости в этом втором импульсе должна составлять $\Delta v_2 = v_1 - v_{кр} = \sqrt{v_{кр}^2 + \Delta v_1^2} - v_{кр}$. В результате такого двойного маневра предмет получает геоцентрическую скорость $|\mathbf{v}_2| = v_{кр}$ и переходит на эллиптическую орбиту 2 с перигеем в точке P и апогеем в точке A (см. левую часть рис. 4.7).

Траектория предмета в системе отсчета орбитальной станции показана в правой части рис. 4.7 (в увеличенном масштабе). Сначала предмет движется вниз, но вскоре его траектория отклоняется вперед, так как при приближении к перигею P его геоцентрическая скорость возрастает, и он обгоняет станцию. В точке B , где эллиптическая орбита 2 предмета пересекает круговую орбиту станции, предмет оказывается на одной высоте со станцией, но далеко впереди станции. При приближении к апогею A скорость предмета уменьшается, и станция начинает его догонять. Большая полуось орбиты 2 равна радиусу орбиты станции. Поэтому периоды обращения предмета и станции по своим орбитам одинаковы, и предмет возвращается в исходную точку одновременно со станцией. Этим обеспечивается замыкание траектории движения предмета относительно станции (см. правую часть рис. 4.7).

Отметим, что радиальная дополнительная скорость Δv_1 в таком маневре не обязательно должна быть малой по сравнению с круговой скоростью $v_{кр}$.

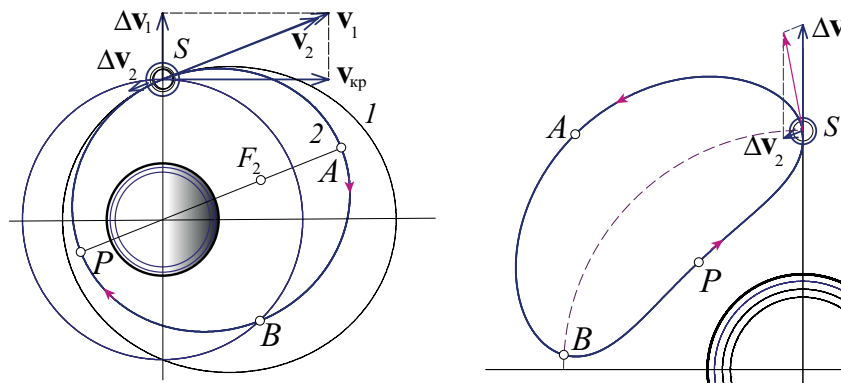


Рис. 4.8: Двойной маневр с направленной вверх начальной скоростью для получения замкнутой траектории относительного движения. Слева показано, как это движение выглядит для наблюдателя на Земле, а справа — для космонавта, находящегося на орбитальной станции.

Аналогичный двойной маневр для получения замкнутой траектории относительного движения с направленной вверх начальной скоростью Δv_1 иллюстрирует рис. 4.8).

4.4.4 Вековая составляющая относительного движения

Если у начальной скорости предмета, выброшенного из орбитальной станции, есть (хотя бы небольшая) составляющая вдоль вектора скорости орбитальной станции, траектория предмета в относительном движении в общем случае уже не будет замкнутой, т. е. предмет не будет возвращаться к станции. В его относительном движении, кроме периодических составляющих, будет присутствовать также и «вековой» член, ответственный за систематический «уход» предмета от станции.

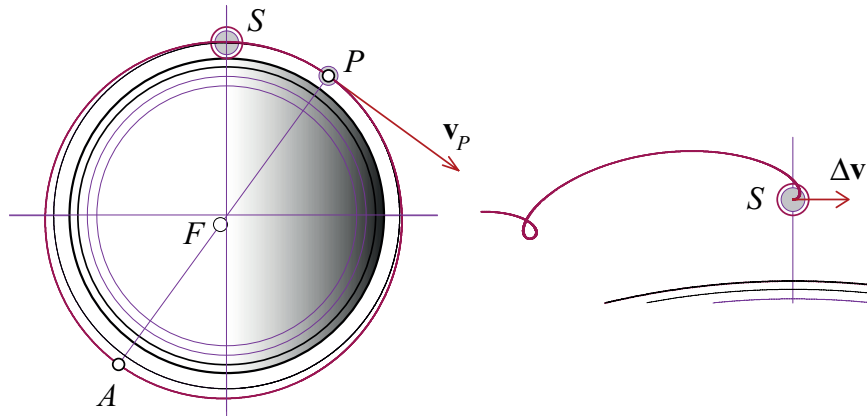


Рис. 4.9: Движение предмета, выброшенного с орбитальной станции с небольшой скоростью в направлении ее движения. Слева показано, как это движение выглядит для наблюдателя на Земле, а справа — для космонавтов, находящихся на орбитальной станции.

Рисунок 4.9 иллюстрирует траекторию относительного движения предмета, выброшенного со станции вперед, по направлению орбитального движения станции. Сначала предмет действительно движется вперед, в направлении сообщенной ему дополнительной скорости, но вскоре отклоняется вверх и назад, постепенно отставая от станции. Предмет периодически возвращается на высоту орбиты станции, но каждый раз все больше и больше отстает от станции.

Для наблюдения этого движения с помощью моделирующей программы «Маневры на орбите и относительное движение», можно просто выбрать соответствующий пример из списка заранее заготовленных примеров на панели, которая открывается с помощью пункта меню «Примеры».

Чтобы понять такое необычное поведение предмета, можно обратиться к геоцентрическим траекториям, показанным в левой части рис. 4.9. Новая орбита предмета представляет собой эллипс, касающийся круговой орбиты станции только в начальной точке P (в перигее эллиптической орбиты). Апогей A этой орбиты расположен выше орбиты станции. Пройдя через апогей A и приближаясь к перигею P , предмет опускается на прежнюю высоту. Но период обращения по эллипсу, в соответствии с третьим законом Кеплера, больше периода обращения станции. Поэтому через оборот по орбите предмет приходит в общую точку P двух орбит позже, чем станция, и это отставание увеличивается с каждым оборотом. Если начальную скорость предмета подобрать так, чтобы отношение его периода к периоду обращения станции выражалось рациональной дробью, накапливающееся отставание станции рано или поздно станет равным длине всей орбиты (или нескольким длинам орбиты), так что предмет будет периодически встречаться со станцией.

Другой путь к пониманию различий в характере движения предмета относительно станции в этих двух случаях (дополнительная скорость направлена перпендикулярно либо вдоль орбитальной скорости) можно проложить, вспоминая, что все орбиты с отрицательной энергией в центральном поле тяготения замкнуты, а период обращения T по каждой из них однозначно связан с длиной большой оси орбиты, а следовательно и с энергией E — а именно, $T \sim a^{3/2} \sim (-E)^{-3/2}$ (см. раздел 11.3). При любом направле-

нии и любой величине дополнительной скорости, сообщенной выброшенному со станции предмету, он будет периодически проходить через точку пространства, в которой он был выброшен со станции. Когда предмет брошен с небольшой скоростью Δv в направлении, перпендикулярном к орбитальной скорости станции, его геоцентрическая скорость в первом порядке по $\Delta v/v_{кр}$ остается неизменной. Следовательно, почти не изменяются его полная энергия, и период обращения будет практически таким же, что и у станции. Это значит, что предмет вернется в точку пространства, в которой он был брошен со станции, почти в тот же момент времени, что и сама станция. Если же дополнительная скорость сообщается предмету вдоль направления орбитальной скорости станции (неважно, вперед или назад), его геоцентрическая скорость, и следовательно полная энергия и период обращения, изменяются уже в первом порядке по $\Delta v/v_{кр}$.

При малых значениях начальной скорости Δv для расчета траектории можно воспользоваться приближенными дифференциальными уравнениями, описывающими относительное движение предмета в окрестности орбитальной станции. В разделе 13.3 приведен вывод этих уравнений и их решения для рассмотренных здесь примеров.

Отметим, что периодическое возвращение предмета к станции будет происходить также и тогда, когда у сообщенной ему дополнительной скорости есть составляющая, направленная «вбок», т. е. перпендикулярно плоскости орбиты. В последнем случае почти замкнутая траектория относительного движения будет уже пространственной (а не плоской) кривой.

4.5 Космический зонд и относительное движение

В качестве другого примера задачи, в которой вопрос об относительном движении орбитальных тел играет важную роль, рассмотрим космический зонд — автоматический или пилотируемый модуль с научными приборами, запускаемый с базовой орбитальной станции, постоянно находящейся на круговой орбите около Земли или иной планеты. Модуль должен приблизиться к поверхности планеты, чтобы выполнить измерения на малой высоте. Другая цель запуска космического зонда может, напротив, состоять в исследовании удаленных областей межпланетного пространства. В любом случае орбита пассивного движения зонда должна проектироваться таким образом, чтобы после выполнения поставленной задачи обеспечить его встречу с базовой орбитальной станцией.

Возможны ли такие орбиты? Если да, то как запустить зонд на нужную орбиту?

При запуске со станции зонд перейдет на собственную эллиптическую орбиту вокруг планеты. Какие требования нужно предъявить к возможной орбите зонда? В первом из упомянутых выше случаев траектория должна подходить близко к поверхности планеты, т. е. это должна быть орбита с низким перигеем (перигентром, если речь идет о какой-либо другой планете, а не о Земле). Период обращения зонда по новой эллиптической орбите должен быть соизмеримым с периодом обращения станции вокруг планеты, чтобы зонд и станция периодически встречались. Орбиты, периоды обращения по которым относятся как небольшие целые числа, называют резонансными. Встреча станции и зонда может произойти только в общей точке их орбит. Это именно та точка, где зонд получил импульс дополнительной скорости.

Если, например, период обращения зонда равен $2/3$ периода обращения станции, то станция совершает 2 полных оборота за время, пока зонд совершает 3 оборота. Таким образом, после запуска зонда станция и зонд будут встречаться в общей точке своих орбит после каждых двух оборотов станции по орбите.

После расстыковки зонда со станцией он продолжает двигаться почти по той же круговой орбите и с той же скоростью, что и станция. Чтобы перевести зонд на требуемую орбиту, необходимо сообщить ему некоторую дополнительную скорость при помощи бортового ракетного двигателя. Будем считать для простоты, что ракетный двигатель достаточно мощный и сообщает зонду необходимую дополнительную скорость за очень короткое время, т. е. практически в одной точке орбиты (импульсный маневр). Бум также считать, что начальная и конечная орбиты лежат в одной плоскости.

С точки зрения затрат ракетного топлива, наиболее экономичный способ перехода на другую орбиту заключается в сообщении зонду дополнительной скорости, направленной по касательной к исходной круговой орбите. Когда тяга ракетных двигателей направлена точно вдоль (или точно против) геоцентрической скорости зонда, работа тяговых двигателей приводит к максимально возможному изменению энергии и, следовательно, орбитальной скорости зонда.

4.5.1 Семейство внутренних резонансных орбит

Если дополнительную скорость направить противоположно орбитальной скорости, зонд перейдет на внутреннюю эллиптическую орбиту, касающуюся круговой орбиты станции только в той точке, где сработал ракетный двигатель.

Рассмотрим сначала семейство внутренних эллиптических орбит.

Зонд будет встречаться с орбитальной станцией после каждого ее оборота, если период обращения зонда равен T_0/n , где T_0 — период обращения станции, а n — целое число. Однако фактически может быть реализована только одна такая возможность, а именно $n = 2$. Эллиптические орбиты с периодами $T_0/3$, $T_0/4$, $T_0/5 \dots$ не существуют. Причина заключается в том, что из всех внутренних орбит кратчайший период обращения соответствует вырожденному эллипсу, малая ось которого имеет нулевую длину. По существу такой вырожденный эллипс представляет собой двухсторонний прямолинейный отрезок от начальной точки до силового центра (эти точки соответствуют его фокусам). Его большая ось равна расстоянию от начальной точки до центра. Движение спутника по такому вырожденному эллипсу можно себе представить, разумеется, только в идеализированном предельном случае, когда вся масса планеты сосредоточена в одной точке. В соответствии с третьим законом Кеплера, этот минимальный период равен приблизительно $0.35T_0$, т. е. он больше, чем $T_0/3$.

Для эллиптической орбиты с периодом $T = T_0/2$ расстояние до перигея равно $0.26 r_0$, где r_0 — расстояние до апогея, равное радиусу круговой орбиты станции. Следовательно, такую орбиту можно реализовать только тогда, когда радиус круговой орбиты станции по меньшей мере вчетверо больше радиуса планеты. Характеристическая скорость Δv , необходимая для перевода зонда на такую орбиту, равна $0.36v_{кр}$, т. е. составляет 36% круговой скорости $v_{кр}$. Формулы для расчета характеристической скорости можно получить с помощью законов сохранения энергии и момента импульса (см. подробный вывод формул в разделе 13.2).

В Таблице 4.1 приведены значения начальной скорости v_0 космического зонда и соответствующие им значения дополнительной скорости $\Delta v = v_0 - v_{кр}$ для нескольких внутренних эллиптических орбит, пригодных для космических зондов. Эти скорости выражены в единицах круговой скорости $v_{кр}$ орбитальной станции для удобства их использования в моделирующей программе «Маневры на орбите и относительное движение». В таблице приведены также значения расстояний до перигея $r_P = 2a - r_0$ (в единицах радиуса r_0 орбиты базовой станции). Соответствующая внутренняя орбита зонда возможна,

если это расстояние до перигея больше, чем радиус планеты. При этом разность $(r_P - R)$ – это кратчайшее расстояние, на которое зонд приближается к поверхности планеты.

Таблица 4.1: Внутренние резонансные орбиты космических зондов

T_0/T	$v_0/v_{кр}$	$\Delta v/v_{кр}$	r_P/r_0
2/1	0.64234	0.35766	0.25992
3/2	0.83050	0.16956	0.52629
4/3	0.88802	0.11198	0.65096
5/4	0.91630	0.08370	0.72355

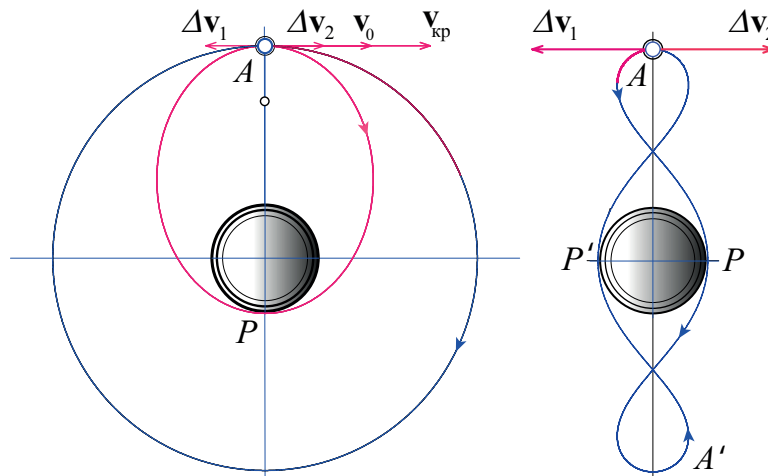


Рис. 4.10: Эллиптическая планетоцентрическая орбита космического зонда с периодом обращения $1/2 T_0$ (слева) и траектория зонда в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

Внутренняя эллиптическая орбита космического зонда, период обращения которого составляет $1/2$ периода обращения орбитальной станции, показана на левой части рис. 4.10. В этом случае необходимая для запуска характеристическая скорость составляет приблизительно $0.358 v_{кр}$. Моделирующая программа «Маневры на орбите и относительное движение» позволяет наблюдать движение зонда одновременно относительно Земли и относительно орбитальной станции в разных окнах на экране компьютера. Чтобы не вводить параметры и начальные условия, необходимые для реализации данного движения, можно просто выбрать соответствующий пример «Внутренний зонд (период $T_0/2$)» из списка заранее заготовленных примеров на панели, которая открывается с помощью пункта меню «Примеры».

В точке A происходит отделение зонда от станции, и бортовой ракетный двигатель сообщает ему дополнительную скорость $\Delta \mathbf{v}_1$ в направлении, противоположном орбитальному движению. В результате скорость зонда уменьшается от круговой скорости до значения $v_0 = 0.642 v_{кр}$, которое должно быть в апогее требуемой эллиптической орбиты с периодом $T_0/2$. В перигее P эллиптической орбиты расстояние зонда от центра планеты равно приблизительно $0.26 r_0$. В течение одного оборота станции вдоль круговой орбиты зонд дважды проходит вдоль своей эллиптической орбиты.

Правая часть рис. 4.10 показывает траекторию этого зонда во вращающейся неинерциальной системе отсчета, связанной с орбитальной станцией. Точнее, эта система отсчета связана с прямой линией, проведенной из центра планеты к орбитальной станции. Другими словами, эта чрезвычайно необычная, с трудом согласующаяся с нашей интуицией траектория соответствует движению зонда, каким оно представляется космонавтам на орбитальной станции.

После расстыковки со станцией зонд по отношению к орбитальной станции сначала движется назад, в направлении сообщенной ему ракетным двигателем дополнительной скорости $\Delta \mathbf{v}_1$ (см. правую часть рис. 4.10). Но вскоре зонд опускается ближе к планете и обгоняет станцию в ее движении относительно планеты. Когда зонд в первый раз проходит через перигей P своей геоцентрической орбиты, он оказывается на кратчайшем расстоянии от поверхности планеты в точке P траектории, по которой он движется относительно станции (правая часть рис. 4.10). В этой точке расстояние r_P зонда от центра планеты равно приблизительно $0.26 r_A$, где r_A — расстояние от центра до апогея (которое равно радиусу r_0 круговой орбиты станции). Как уже отмечалось выше, такая орбита зонда может быть реализована, когда радиус стационарной орбиты станции по меньшей мере в четыре раза больше радиуса планеты.

Зонд оказывается на том же самом минимальном расстоянии от поверхности планеты (в точке P') во второй раз во время второго оборота по своей эллиптической орбите, а затем встречается со станцией в точке A . Чтобы уравнивать скорость зонда со скоростью станции для мягкого причаливания, необходим еще один дополнительный импульс $\Delta \mathbf{v}_2$. Он должен быть таким же по величине, как и $\Delta \mathbf{v}_1$, но его направление должно быть противоположным по сравнению с $\Delta \mathbf{v}_1$, потому что теперь нужно увеличить скорость зонда, чтобы уравнивать ее со скоростью $\mathbf{v}_{кр}$ орбитальной станции.

Эллиптическая орбита космического зонда, период обращения которого составляет $2/3$ периода обращения орбитальной станции, показана на левой части рис. 4.11. В этом случае необходимая для запуска характеристическая скорость составляет приблизительно $0.17 v_{кр}$. Чтобы не вводить параметры и начальные условия, необходимые для реализации данного движения, можно просто выбрать соответствующий пример «Внутренний зонд (период $2T_0/3$)» из списка заранее заготовленных примеров на панели, которая открывается с помощью пункта меню «Примеры».

В точке A происходит отделение зонда от станции, и бортовой ракетный двигатель сообщает ему необходимую дополнительную скорость. В перигее P геоцентрической эллиптической орбиты расстояние от центра планеты равно приблизительно $0.53 r_0$. Таким образом, эта орбита идеальна для космического зонда, если радиус круговой орбиты станции примерно вдвое больше радиуса планеты.

Встреча зонда со станцией происходит после двух оборотов станции. За это время зонд совершает три оборота по эллиптической орбите, трижды приближаясь к поверхности планеты. Правая часть рис. 4.11 показывает, сколь необычной представляется траектория такого зонда космонавтам орбитальной станции. В целом зонд обходит планету по этой траектории в том же направлении, что и станция, несмотря на противоположное на-

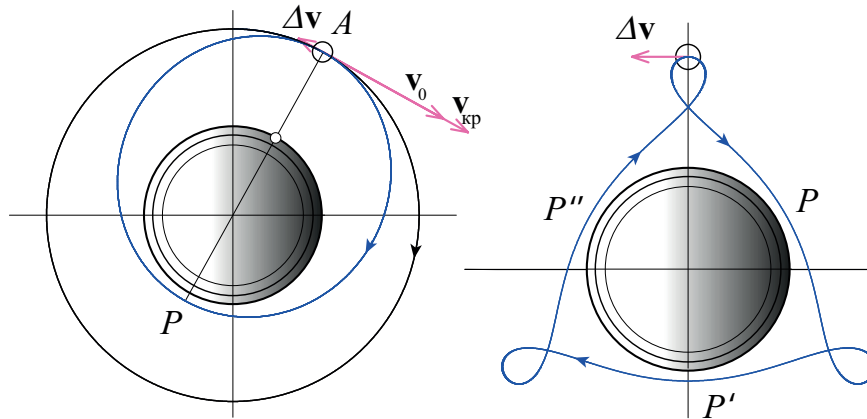


Рис. 4.11: Эллиптическая планетоцентрическая орбита космического зонда с периодом обращения $2/3 T_0$ (слева) и траектория зонда в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

правление дополнительной скорости. Вблизи вершин малых петель траектории (которые соответствуют прохождению зондом через апогей своей геоцентрической орбиты) относительное движение зонда становится попятным.

Чтобы зонд мог причалить к орбитальной станции после завершения своей миссии, необходимо погасить остаточную относительную скорость, т. е. нужно уравнивать геоцентрическую скорость зонда со скоростью станции. Необходимая для этого дополнительная скорость (характеристическая скорость маневра причаливания) имеет точно такую же величину $0.17 v_{кр}$, как и при запуске зонда, но должна быть направлена в противоположную сторону: если при запуске импульс имел направление назад, противоположно орбитальному движению станции, то при причаливании он должен быть направлен вперед.

На рис. 4.12 показано движение зонда с периодом обращения $T = 3/4 T_0$. В этом случае встреча зонда со станцией происходит в начальной точке A после того, как он совершит четыре оборота вокруг планеты. Станция за это время совершает три оборота. Траектория движения зонда относительно станции имеет четыре петли попятного движения, которые соответствуют моментам прохождения зонда через апогей своей планетоцентрической орбиты.

4.5.2 Семейство внешних резонансных орбит

Для внешних орбит период обращения зонда должен быть больше, чем период обращения станции. Поэтому после отстыковки от станции нужно сообщить зонду дополнительную скорость, направленную вперед, вдоль орбитальной скорости станции. При этом зонд перейдет на внешнюю эллиптическую орбиту, касающуюся круговой орбиты станции только в той точке, где сработал ракетный двигатель.

В Таблице 4.2 приведены значения начальной скорости v_0 космического зонда и соответствующие им значения дополнительной скорости $\Delta v = v_0 - v_{кр}$ для нескольких внешних эллиптических орбит, пригодных для космических зондов. Эти скорости выра-

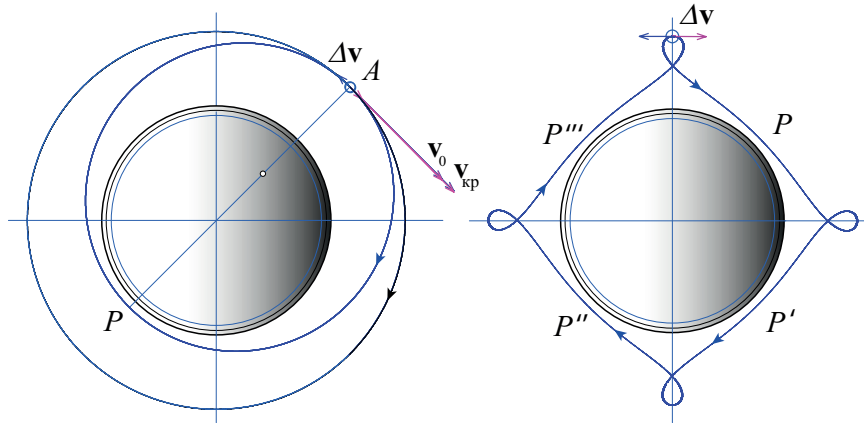


Рис. 4.12: Эллиптическая орбита космического зонда с периодом обращения $(3/4)T_0$ (слева) и траектория зонда в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

жены в единицах круговой скорости $v_{кр}$ орбитальной станции для удобства их использования в моделирующей программе «Маневры на орбите и относительное движение». Детали расчета (выполненного на основе законов сохранения энергии и момента импульса) можно найти в разделе 13.2. В таблице приведены также значения расстояний до апогея $r_A = 2a - r_0$ (в единицах радиуса r_0 орбиты базовой станции). Соответствующая внутренняя орбита зонда возможна, если это расстояние до перигея больше, чем радиус планеты. При этом разность $(r_P - R)$ — это кратчайшее расстояние, на которое зонд приближается к поверхности планеты.

Таблица 4.2: Внешние резонансные орбиты космических зондов

T_0/T	$v_0/v_{кр}$	$\Delta v/v_{кр}$	r_A/r_0
4/5	1.066876	0.06688	1.32079
3/4	1.083752	0.08375	1.42282
2/3	1.112140	0.11214	1.62074
1/2	1.170487	0.17049	2.17480

На рис. 4.13 показаны эллиптические орбиты зондов с периодами $3/2 T_0$ и $2T_0$ (орбиты 1 и 2, соответственно). Сначала зонд движется относительно станции в направлении сообщенной ему дополнительной скорости, но вскоре его траектория отклоняется вверх и затем назад, так что движение зонда становится попятным — зонд отстает от орбитальной станции. В системе отсчета орбитальной станции траектория зонда огибает планету в направлении, противоположном геоцентрическому движению орбитальной станции.

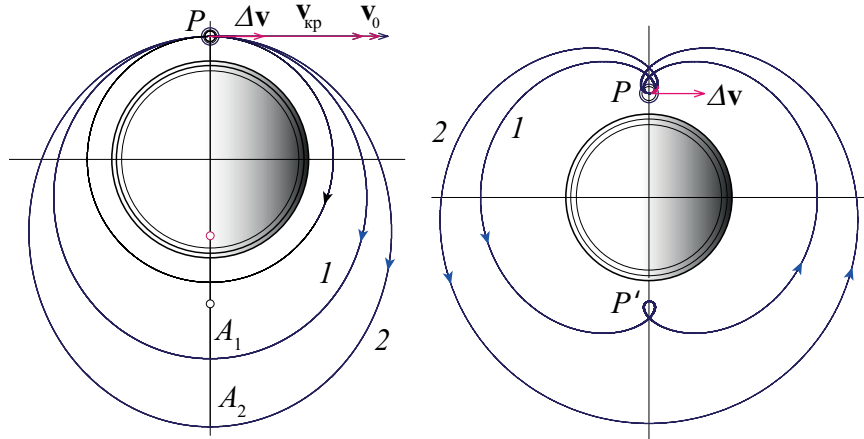


Рис. 4.13: Эллиптические планетоцентрические орбиты космических зондов с периодами обращения $3/2 T_0$ и $2T_0$ (орбиты 1 и 2 соответственно, слева) и траектории этих зондов в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

Для внешней орбиты зонда с периодом обращения $T = 3/2 T_0$ необходимая дополнительная скорость равна приблизительно $0.11 v_{кр}$, а расстояние до апогея составляет $1.62 r_0$. Замкнутая траектория относительного движения зонда (кривая 1 в правой части рис. 4.13)) имеет две небольшие петли, соответствующие моментам прохождения зондом перигея своей эллиптической геоцентрической орбиты. Весь замкнутый путь относительного движения совершается в течение двух оборотов зонда по геоцентрической орбите. За время двух оборотов зонда орбитальная станция совершает ровно три оборота вокруг планеты.

Чтобы запустить зонд на траекторию с периодом $T = 2T_0$, необходима добавочная скорость $\Delta v = 0.17 v_{кр}$, направленная вперед (см. Таблицу 4.2). Расстояние r_A до апогея орбиты зонда (максимальное расстояние от центра планеты, на которое удаляется зонд) равно $2.17 r_0$ (где r_0 — радиус круговой орбиты станции). Замкнутую орбиту относительного движения (кривая 1 на рис. 4.13)) зонд обходит за $2T_0$, т. е. в течение двух оборотов станции по круговой орбите.

4.5.3 Космический зонд с радиальным направлением дополнительной скорости

Чтобы при помощи одного зонда можно было исследовать как поверхность планеты, так и более удаленные области межпланетного пространства, можно воспользоваться эллиптической орбитой, которая получается при сообщении зонду дополнительной скорости в поперечном (радиальном) направлении. Пример такой орбиты с периодом обращения $T = 3/2 T_0$ показан на рис. 4.14.

В точке B круговой орбиты зонд расстыковывается со станцией, и бортовой ракетный двигатель сообщает ему дополнительную скорость Δv_1 в направлении вертикально вниз. Величина дополнительной скорости, необходимой для перехода на требуемую орбиту, может быть рассчитана с помощью законов Кеплера и законов сохранения энергии и момента импульса. Примеры расчетов необходимой для маневра скорости можно найти

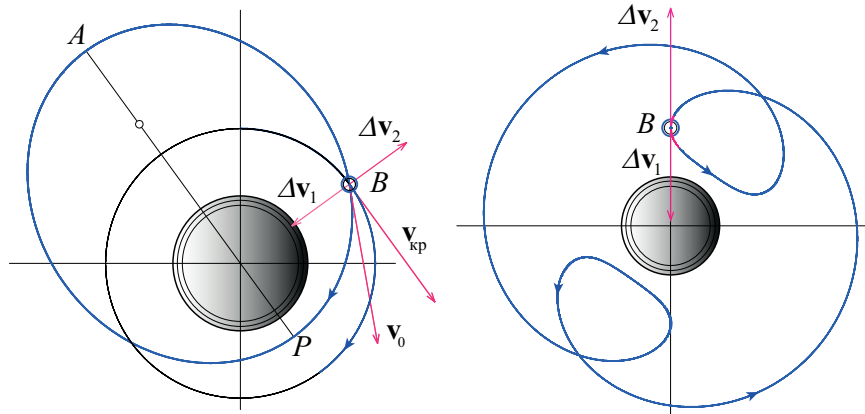


Рис. 4.14: Эллиптическая орбита космического зонда с периодом обращения $(3/2)T_0$ (слева) в случае радиального дополнительного ракетного импульса и соответствующая траектория зонда в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

в разделе 13.2. Учитывая, что направленный радиально импульс ракетного двигателя не изменяет момент импульса зонда относительно центра планеты, можно получить следующие выражения для расстояний перигея и апогея эллиптической орбиты зонда от центра планеты:

$$r_A = \frac{r_0}{1 - \Delta v/v_{кр}}; \quad r_P = \frac{r_0}{1 + \Delta v/v_{кр}}. \quad (4.5)$$

Поэтому большая полуось эллиптической орбиты зонда зависит от величины дополнительной радиальной скорости Δv следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}(r_A + r_P) = \frac{r_0}{1 - (\Delta v/v_{кр})^2}. \quad (4.6)$$

Подходящие для космических зондов орбиты должны характеризоваться определенными периодами обращения. Можно воспользоваться третьим законом Кеплера $r_0/a = (T_0/T)^{2/3}$ и выражением (4.6) для расчета дополнительной скорости Δv , которая требуется для получения заданного периода обращения:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_{кр}}\right) = 1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^{2/3}. \quad (4.7)$$

Например, для вывода зонда на орбиту с периодом, равным полутора периодам обращения базовой станции ($T_0/T = 2/3$), необходимая дополнительная скорость Δv , в соответствии с выражением (4.7), должна составлять $0.48668 v_{кр}$. Зонд встречается со станцией после каждых двух оборотов по своей эллиптической орбите. За это время станция совершает три оборота по круговой орбите, и они вновь встречаются в начальной точке B . Такие резонансные орбиты показаны на рис. 4.14.

Для запуска зонда на орбиту с периодом обращения $T = 3/2 T_0$ требуется весьма значительная радиальная (трансверсальная) характеристическая скорость $0.487 v_{кр}$. Эта величина в несколько раз больше тангенциальной дополнительной скорости $0.11 v_{кр}$, необходимой для запуска зонда на эллиптическую орбиту с таким же периодом обращения и

такой же большой осью. Чтобы объяснить на основе законов физики, почему азимутальный ракетный импульс настолько эффективнее по сравнению с радиальным для перехода на орбиту с такой же полной энергией и, следовательно, с таким же периодом обращения, нужно принять во внимание, что ракетный двигатель совершает максимально возможную работу, когда направление тяги совпадает с направлением скорости. В таких условиях приращение энергии (и скорости) космического аппарата будет наибольшим.

Чтобы мягко причалить к станции, необходим еще один дополнительный импульс от бортового ракетного двигателя. Для уравнивания орбитальных скоростей зонда и станции требуется сообщить зонду дополнительную скорость такой же величины $0.487 v_{кр}$, как и при запуске, но теперь эта скорость должна быть направлена радиально вверх.

Траектория движения зонда относительно станции для этого случая показана в правой части рис. 4.14. В системе отсчета, связанной со станцией, зонд обходит этот петлеобразный замкнутый путь с двумя приближениями к поверхности планеты и двумя удалениями на максимальное расстояние на протяжении трех оборотов станции вокруг планеты.

4.6 В противоположную точку орбиты и назад

Рассмотрим еще один пример орбитального маневрирования. Допустим, что требуется запустить космический аппарат с базовой орбитальной станцией на ту же самую круговую орбиту что и у станции, но так, чтобы между станцией и аппаратом было угловое расстояние 180° . Другими словами, аппарат и станция должны двигаться по одной орбите, находясь на противоположных концах ее диаметра. Какие маневры космического аппарата нужно выполнить, чтобы этого добиться?

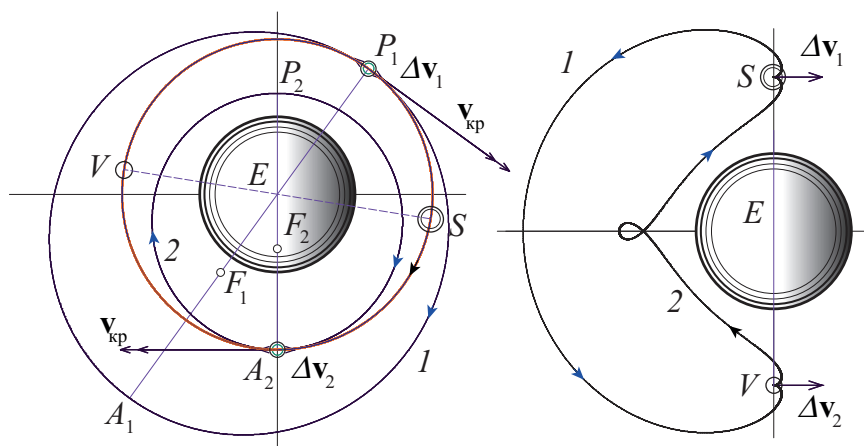


Рис. 4.15: Переходные эллиптические орбиты (внешняя 1 и внутренняя 2) с периодами обращения соответственно $3/2 T_0$ и $3/4 T_0$ в геоцентрической системе отсчета (слева) и соответствующие им траектории относительного движения в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией (справа).

Для того, чтобы перевести космический аппарат в противоположную точку круговой орбиты, необходима промежуточная эллиптическая орбита с периодом обращения, скажем, $3/2 T_0$ или $3/4 T_0$.

Чтобы использовать первую из этих возможностей, аппарату после расстыковки со станцией нужно сообщить дополнительную скорость Δv_1 в направлении орбитального движения. Допустим, что это происходит в точке P_1 (см. левую часть рис. 4.15). Дополнительная скорость Δv_1 складывается с круговой орбитальной скоростью $v_{кр}$, и аппарат начинает движение по внешней переходной эллиптической орбите I , которая касается первоначальной круговой орбиты в перигее P_1 . Апогей переходной эллиптической орбиты находится в противоположной точке A_1 .

Период обращения по новой орбите зависит от размера ее большой оси P_1A_1 . Для поставленной цели этот период должен быть равен $3/2 T_0$, где T_0 — период обращения базовой станции. В таком случае станция совершает ровно полтора оборота по своей круговой орбите за время одного оборота аппарата по эллиптической орбите (кривая I на рис. 4.15).

Таким образом, космический аппарат приходит в общую точку P_1 двух орбит (круговой и эллиптической) как раз в тот момент, когда станция находится в диаметрально противоположной точке круговой орбиты. В этот момент нужно во второй раз включить бортовой ракетный двигатель аппарата для того, чтобы погасить избыточную скорость аппарата. Очевидно, что дополнительная скорость в этом импульсном маневре должна иметь такую же величину Δv_1 , но противоположное направление.

После таких маневров станция и космический аппарат движутся по одной и той же круговой орбите, находясь на противоположных концах ее диаметра — например, в точках S и V на рис. 4.15).

Правая часть рис. 4.15 показывает траекторию космического аппарата в его движении относительно орбитальной станции (кривая I). Движение от станции начинается вперед, в направлении импульса дополнительной скорости Δv_1 , но вскоре траектория отклоняется вверх и затем назад. В этой системе отсчета почти все движение от S до конечной точки V — попятное. После гашения избытка скорости над круговой, в этой системе отсчета аппарат остается неподвижным в точке-антиподе V неограниченно долго.

Для расчета величины необходимой дополнительной скорости Δv_1 для этого маневра можно воспользоваться законами сохранения энергии и момента импульса, а также третьим законом Кеплера. Детали расчета приведены в разделе 13.2. Чтобы период T обращения по переходной орбите равнялся $3/2 T_0$, скорость аппарата в перигее P_1 должна быть $\sqrt{2 - (2/3)^2/3} v_{кр} = 1.1121 v_{кр}$, откуда $\Delta v_1 = 0.1121 v_{кр}$.

Вторая из упомянутых выше возможностей перехода в противоположную точку круговой орбиты основана на использовании внутренней промежуточной эллиптической орбиты с периодом обращения $3/4 T_0$. В моделировании, показанном на рис. 4.15, такая орбита использована для перехода космического аппарата обратно к орбитальной станции. В этом маневре дополнительный импульс скорости Δv_2 , направленный назад, можно сообщить космическому аппарату в произвольный момент времени, например, когда он проходит через точку A_2 (см. левую часть рис. 4.15). Эта точка становится апогеем внутренней переходной орбиты (кривая 2).

После совершения двух оборотов по этой эллиптической орбите космический аппарат встречается в точке A_2 со станцией, которая за это время совершила ровно полтора оборота по своей круговой орбите.

Для выравнивания скоростей аппарата и станции в точке A_2 аппарату необходимо сообщить еще один ракетный импульс такой же величины Δv_2 в направлении орбитальной скорости, после чего возможно мягкое причаливание к орбитальной станции.

Отметим необычный вид траектории движения космического аппарата относительно станции (кривая 2 в правой части рис. 4.15). Маленькая петля этой траектории соответ-

ствуует движению аппарата вблизи апогея A_2 своей геоцентрической орбиты после совершения одного оборота.

Необходимая для этого маневра дополнительная скорость Δv_2 должна быть равна $\sqrt{2 - (4/3)^{2/3}} v_{кр} = 0.8880 v_{кр}$, где $\Delta v_2 = 0.1120 v_{кр}$ (детали расчета приведены в разделе 13.2, стр. 217). Замечательно, что для рассмотренных здесь способов перехода в противоположную точку орбиты (по внешней и внутренней переходным траекториям) нужна практически одна и та же по величине дополнительная скорость: $\Delta v_2 \approx \Delta v_1$.

4.7 Переходы между орбитами и межпланетные перелеты

Здесь мы рассмотрим маневры в космосе, с помощью которых можно перевести космический корабль с одной круговой орбиты на другую. Допустим, что необходимо запустить космический аппарат с орбитальной станции на определенную круговую орбиту, радиус которой отличается от радиуса орбиты станции. После того, как аппарат проведет некоторое время на новой орбите, необходимо, чтобы аппарат вернулся к станции и причалил к ней. Какие маневры нужно запланировать для выполнения такой программы? Какие реактивные импульсы потребуются для оптимального маневрирования? Какие характеристические скорости должен обеспечить ракетный двигатель аппарата при оптимальном маневрировании?

Результаты проектирования таких переходов между круговыми орбитами можно применить и к межпланетным перелетам. Орбиты большинства планет почти круговые, и в первом приближении можно считать, что все они лежат в одной плоскости. В некотором смысле планеты — это орбитальные станции, находящиеся на околосолнечных круговых орбитах. Проектирование путешествия с одной планеты на другую отличается от поставленной проблемы только тем, что планеты (в отличие от искусственных орбитальных станций) имеют большие массы и потому действуют на космический аппарат своими силами тяготения.

Но благодаря тому, что массы планет много меньше массы Солнца, гравитационное поле любой планеты влияет на гелиоцентрическое движение космического аппарата только в пределах сравнительно небольшой пространственной области вокруг планеты, называемой *сферой действия* планеты относительно Солнца. Детальное обсуждение понятия сферы действия планеты и расчет ее размеров приведено в разделе 15.4. Вне сферы гравитационного действия планеты движение космического аппарата (по отношению к гелиоцентрической системе отсчета) в сущности представляет собой кеплерово движение, происходящее под действием солнечного тяготения. Поэтому проблема проектирования межпланетных перелетов вполне аналогична поставленной выше задаче об оптимальном переходе космического аппарата с одной околоземной круговой орбиты на другую. Главное различие заключается в том, что в задаче о межпланетных перелетах дополнительная скорость, которую нужно сообщить аппарату для совершения маневра при моделировании, должна рассматриваться как скорость (относительно планеты), с которой космический корабль покидает не поверхность планеты, а сферу ее действия.

Наиболее экономичный способ перевода космического аппарата с одной круговой орбиты на другую (с точки зрения затрат ракетного топлива) должен происходить по полуэллиптической траектории, которая касается внутренней (меньшей) круговой орбиты снаружи, и касается внешней (большей) круговой орбиты изнутри. Такие переходы называют полуэллиптическими или гомановскими переходами по имени немецкого ученого В.

Гомана (W. Hohman), который впервые предложил использовать их для межпланетных перелетов. Удивительно, что он сделал это еще в 1925 году, в те далекие времена, когда о технической реализации космических полетов можно было только мечтать.

В качестве конкретного примера рассмотрим путешествие космического аппарата с базовой орбитальной станции, которая движется вокруг планеты по круговой орбите некоторого радиуса r_0 , на внешнюю круговую орбиту вдвое большего радиуса $2r_0$. После пребывания на новой орбите в течение некоторого времени и выполнения запланированных работ космический аппарат должен вернуться на орбитальную станцию. Рисунок 4.16 иллюстрирует возможные маневры, позволяющие осуществить поставленную задачу.

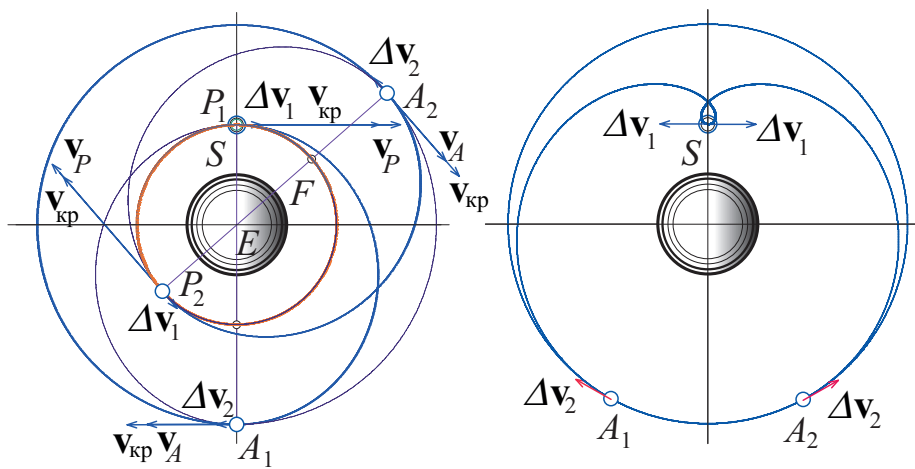


Рис. 4.16: Полуэллиптические (гомановские) переходы между круговыми орбитами. Переход космического аппарата на более высокую круговую орбиту с последующим возвращением на орбитальную станцию.

В точке P_1 космический аппарат расстыковывается с орбитальной станцией, и бортовой ракетный двигатель сообщает аппарату дополнительную скорость Δv_1 в направлении его орбитального движения. Для того, чтобы апогей переходной полуэллиптической траектории находился на заданном расстоянии $2r_0$, величина дополнительной скорости Δv_1 должна быть равна $0.1547 v_{кр}$, где $v_{кр}$ — орбитальная скорость станции. Примеры выполнения расчетов дополнительной скорости приведены в разделе 10.6. Когда аппарат достигает апогея A_1 переходной траектории, необходим второй тангенциальный (направленный по касательной) импульс Δv_2 , чтобы увеличить скорость аппарата до значения, соответствующего круговой скорости на орбите радиуса $2r_0$. На этой орбите круговая скорость равна $v_{кр}/\sqrt{2}$, так как круговая скорость обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса орбиты (здесь $v_{кр}$ — круговая скорость на исходной орбите).

Точно такая же по величине, но противоположно направленная дополнительная скорость необходима для того, чтобы перевести аппарат на полуэллиптическую траекторию, которая может привести его обратно к станции. Однако на этапе возвращения, когда цель заключается в том, чтобы прибыть на внутреннюю круговую орбиту одновременно со станцией, важно правильно выбрать момент времени для совершения этого маневра: момент сообщения аппарату тормозного касательного импульса и точка A_2 (см. рис. 4.16), в которой этот маневр выполняется, должны быть рассчитаны так, чтобы при движении с

внешней круговой орбиты на внутреннюю по переходной полуэллиптической траектории аппарат достиг перигея P_2 , расположенного на расстоянии r_0 , как раз в тот момент, когда орбитальная станция проходит через эту точку.

Для расчета подходящего момента времени можно воспользоваться третьим законом Кеплера. Детальный расчет нужного момента времени приведен в разделе 13.2. В программе «Маневры на орбите и относительное движение» для моделирования описываемых маневров можно просто выбрать соответствующий пример «Перелеты между круговыми орбитами» из списка заранее заготовленных примеров на панели, которая открывается с помощью пункта меню «Примеры».

При достижении перигея переходной орбиты космическому аппарату нужно сообщить еще один дополнительный касательный импульс (снова против движения), чтобы перевести его с переходной орбиты на круговую и уравнять его скорость со скоростью орбитальной станции. Очевидно, что необходимая дополнительная скорость Δv_2 должна иметь такую же величину Δv_1 , как и при первом маневре (но противоположное направление).

Правая часть рис. 4.16) показывает движение космического аппарата при этих маневрах в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией. Сначала аппарат действительно движется вперед, в направлении сообщенного ему дополнительного импульса Δv_1 , но вскоре его траектория относительно станции отклоняется вверх и затем назад. Дальнейшее движение аппарата относительно станции становится попятным. Обратите внимание, что между точками A_1 и A_2 аппарат совершает более одного оборота в своем попятном движении вокруг станции, хотя в планетоцентрическом движении между соответствующими точками A_1 и A_2 (левая часть рис. 4.16) он совершает менее одного оборота.

Контрольные вопросы

- **Относительное движение на орбитах.** Космонавт орбитальной станции, завершая работу в открытом космосе, бросает ставший ненужным небольшой предмет в сторону Земли (вертикально вниз). Каким увидят это движение космонавты с борта орбитальной станции?
- **Замкнутая траектория относительного движения.** Каким условиям должна удовлетворять дополнительная скорость, сообщаемая выбрасываемому с орбитальной станции предмету, для того, чтобы его движение относительно орбитальной станции происходило по замкнутой траектории?
- **Космический зонд.** Рассмотрим космический зонд, запускаемый с базовой орбитальной станции, совершающей облет некоторой планеты по круговой орбите, с целью сбора научной информации и исследования околопланетного пространства. Такая автоматическая научная лаборатория должна приблизиться к планете, произвести фотографирование ее поверхности и выполнить ряд измерений, а затем доставить накопленную научную информацию обратно на орбитальную станцию. Возможна ли необходимая для этого пассивная траектория полета космического зонда? Как ее осуществить?
- **Переход корабля в противоположную точку круговой орбиты.** Допустим, что отделяющийся от орбитальной станции космический корабль требуется вывести на ту же круговую орбиту, по которой движется базовая станция, но так, чтобы корабль и станция при движении по общей орбите находились на угловом расстоянии 180° , т.е. на противоположных концах отрезка, проходящего через центр Земли. Как это можно сделать (какие маневры необходимы для этого)?

- **Межпланетные перелеты.** Будем считать, что планеты обращаются по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости. Объясните на основе законов физики, почему для перелетов космических кораблей между планетными орбитами оптимальны (с точки зрения экономии ракетного топлива) полуэллиптические траектории, касающиеся меньшей круговой орбиты снаружи и большей орбиты изнутри (так называемые гомановские переходы).

Глава 5

Прецессия экваториальной орбиты спутника несферической планеты

Нашу планету можно считать сферически симметричной лишь в первом приближении. Основное отклонение гравитационного поля Земли от сферической симметрии вызвано «сплюснутостью» земного шара, у которого полярный радиус на 21 км короче экваториального. Поэтому гравитационное поле Земли не имеет строгой сферической симметрии. В небесной механике Землю иногда представляют в виде шара с надетым на него по экватору массивным обручем, т. е. вместо полярного сжатия используют эквивалентное представление об экваториальном «вздутии» Земли. В выражении для силы тяготения, действующей на спутник Земли, благодаря экваториальному «обручу» присутствует дополнительный член с осевой симметрией. При учете таких искажений поля тяготения движение спутника происходит уже не по кеплерову эллипсу, а по весьма сложной траектории, в общем случае не замкнутой и не лежащей в одной плоскости. После совершения одного оборота спутник уже не попадает в прежнюю точку.

Для спутника, находящегося на очень большом расстоянии от Земли, фактическое распределение массы Земли несущественно. Другими словами, на очень большом расстоянии поле тяготения Земли можно считать таким, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре: сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра планеты. Искажение центрального поля тяготения планеты, вызванное ее сжатием вдоль оси, описывается малым дополнительным членом, убывающим гораздо быстрее — обратно пропорционально четвертой степени расстояния до центра планеты. Дополнительная сила тяготения, действующая на спутник со стороны массивного экваториального «обруча», в общем случае не направлена к центру обруча. Поэтому полная сила тяготения Земли характеризуется осевой (а не сферической) симметрией.

Когда искажения сферически симметричного поля тяготения невелики, удобно считать, что спутник движется по эллипсу, но сам этот эллипс непрерывно изменяется. Такую кеплерову орбиту с постепенно изменяющимися параметрами Лагранж назвал оскулирующей. Из-за отсутствия сферической симметрии плоскость оскулирующей орбиты постепенно поворачивается в пространстве. При этом угол между осью Земли и плоскостью орбиты остается неизменным, т.е. плоскость орбиты медленно прецессирует вокруг земной оси.

5.1 Сила тяготения в экваториальной плоскости несферической планеты

При движении в экваториальной плоскости планеты задача упрощается, ибо дополнительная сила притяжения спутника «обручем» направлена к центру, т. е. как и в случае сферически симметричной планеты зависит только от расстояния r до центра планеты. Но эта зависимость становится более сложной, так как к главному члену, обратно пропорциональному квадрату расстояния, добавляется небольшой член, обратно пропорциональный четвертой степени расстояния r . На достаточно больших расстояниях (по сравнению с размерами планеты) зависимость силы тяготения планеты от расстояния r в экваториальной плоскости с хорошей точностью описывается следующим выражением:

$$F_r = -G \frac{mM}{r^2} \left(1 + b \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (5.1)$$

В этой формуле G — гравитационная постоянная, m — масса спутника, M — масса планеты, R — ее экваториальный радиус. Значение безразмерной константы b зависит от степени «сплюснутости» планеты: оно равно отношению дополнительного члена силы тяготения к главному (невозмущенному ньютоновскому) члену на расстоянии R от центра планеты.

В случае осевого сжатия планеты константа b положительна ($b > 0$). Если, например, некоторая часть Δm полной массы M сосредоточена в экваториальном поясе, этот параметр дается выражением $b = (3/4)\Delta m/M$ (теоретический расчет этого параметра в рамках принятой модели см. в разделе 14.1, стр. 229). У Земли «сплюснутость» невелика: значение безразмерной постоянной b в уравнении (5.1) составляет всего лишь 0.0016.

Для гипотетической планеты, вытянутой вдоль оси (похожей на мяч для регби), константа b отрицательна ($b < 0$). В последнем случае можно представлять себе планету в виде шара с дополнительными точечными массами на полюсах — своего рода полярными «шапками». В первом случае (случае осевого сжатия планеты) дополнительный член усиливает притяжение экваториального спутника к планете на малых расстояниях, а во втором — ослабляет (по сравнению со случаем сферически симметричного распределения масс, когда всю массу планеты можно считать сосредоточенной в ее центре).

5.2 Экваториальный спутник планеты с осевым сжатием

Наличие дополнительного члена у силы тяготения, быстрее (по сравнению с основным) убывающего с расстоянием, особенно заметно сказывается на сильно вытянутых орбитах спутников, вызывая постепенный поворот большой оси эллипса вокруг фокуса при неизменных максимальном и минимальном расстояниях от центра планеты. Такой непрерывный поворот орбиты в экваториальной плоскости обычно тоже называют прецессией.

Моделирующая программа «Прецессия экваториальной орбиты» позволяет наблюдать на экране компьютера движение спутника в экваториальной плоскости планеты с осевым сжатием или растяжением, поле тяготения которой описывается формулой (5.1) при разных значениях параметра b . Эффект прецессии большой оси выражен сильнее для орбит с большими эксцентриситетами. Для получения таких вытянутых орбит при моделировании нужно задавать начальную скорость, значительно отличающуюся от круговой

скорости для выбранной начальной высоты. Траектория спутника выглядит как многолепестковый цветок, лепестки которого постепенно заполняют всю кольцевую область.

Наблюдаемая в моделирующем эксперименте прецессия экваториальной орбиты в поле тяготения «сплюснутой» планеты иллюстрируется на рис. 5.1. Чтобы эффект был более заметен, при моделировании можно задавать утрированно большие значения (порядка единицы) безразмерного параметра b , входящего в дополнительный член силы притяжения и характеризующего несферичность планеты.

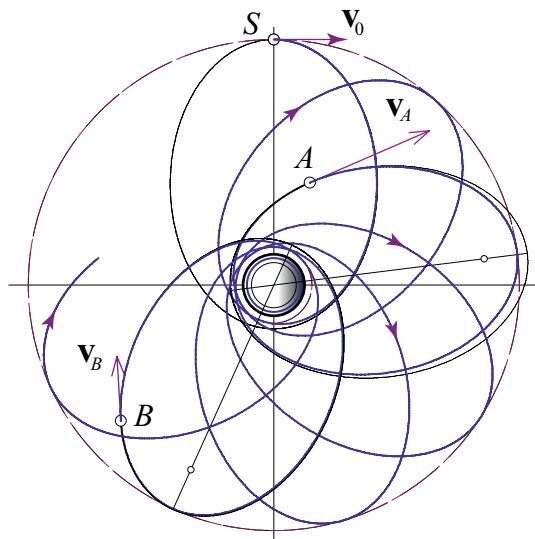


Рис. 5.1: Прецессия орбиты экваториального спутника «сплюснутой» планеты (планеты с осевым сжатием).

Программа позволяет вывести на экран оскулирующий эллипс для любой точки истинной сложной траектории спутника. Чтобы получить этот эллипс во время моделирования, достаточно нажать в нужный момент кнопку «Пауза». Если пункт «Оскулирующий эллипс» в меню «Условия моделирования» отмечен «галочкой», программа производит расчет параметров оскулирующего эллипса для текущих значений положения и скорости спутника, и выводит этот теоретический эллипс невозмущенного движения на экран. На рис. 5.1 такие эллипсы показаны тонкими линиями для трех точек (S , A , и B) истинной траектории. Если бы дополнительный член в выражении для силы тяготения внезапно исчез, все параметры оскулирующего эллипса в дальнейшем оставались бы неизменными, и движение спутника происходило бы по эллипсу, касающемуся действительной траектории в рассматриваемой точке. Нажав затем кнопку «Пуск», можно продолжить моделирование и сравнить истинную траекторию движения спутника с предсказанной аналитически кривой невозмущенного движения. Оскулирующий эллипс дает представление о характере истинной траектории по крайней мере для некоторой окрестности данной точки.

Если точка для построения оскулирующего эллипса выбрана достаточно далеко от планеты (точки S и B на рис. 5.1), то действительное движение происходит почти точно вдоль этого эллипса до тех пор, пока спутник не приблизится к перигею. Вблизи перигея действительное движение значительно отклоняется от оскулирующего эллипса, и на

следующем витке траектории движение уже происходит по эллипсу, большая ось которого повернута на заметный угол в направлении орбитального движения спутника. Если же оскулирующий эллипс построен для точки, находящейся недалеко от планеты (точка A на рис. 5.1), то действительное движение идет вдоль оскулирующего эллипса только вблизи этой точки, и очень скоро значительно отклоняется от теоретической кривой.

Для оскулирующего эллипса, построенного в точке A на рис. 5.1, расхождение с истинной траекторией становится более заметным по мере приближения к апогею. Для точки B оскулирующий эллипс практически совпадает с большей частью предыдущего витка траектории.

Качественное объяснение прецессии вытянутой орбиты заключается в следующем. На больших расстояниях от планеты поле тяготения почти не отличается от кулоновского, и можно считать, что движение спутника происходит по невозмущенному кеплерову эллипсу. По мере приближения к планете роль дополнительного члена силы тяготения возрастает (он сильнее зависит от расстояния). Вблизи планеты сила тяготения в экваториальной плоскости больше, чем в случае шарообразной планеты такой же массы, и соответственно сообщаемое этой силой спутнику ускорение больше, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу. В результате вблизи планеты истинная траектория искривляется сильнее чем у невозмущенного эллипса, что можно трактовать как поворот большой оси эллипса вокруг центра планеты. Такой поворот, как легко видеть, происходит в направлении орбитального движения спутника. Эволюцию орбиты спутника можно представлять себе как медленное непрерывное вращение большой оси эллипса в экваториальной плоскости. Это вращение происходит неравномерно: оно замедляется на больших расстояниях от планеты, когда спутник находится вблизи апогея орбиты, и ускоряется, когда он проходит через перигей эллипса.

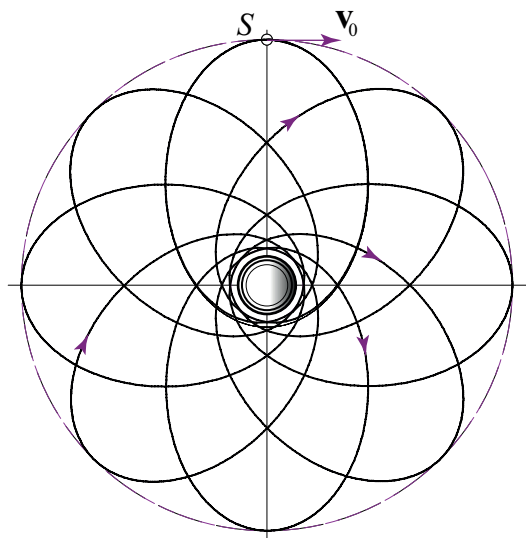


Рис. 5.2: Замкнутая орбита прецессирующего экваториального спутника планеты с осевым сжатием.

Более того, оскулирующие эллипсы для разных точек истинной траектории отличаются от нее не только ориентацией большой оси, но и другими параметрами эллипса. В

частности, большая ось оскулирующего эллипса немного меньше, чем у истинной траектории, если этот эллипс построен в момент прохождения спутником через апогей (точка S на рис. 5.1) или вблизи него (точка B). Если же построить оскулирующий эллипс для перигея орбиты (или поблизости от него), большая ось эллипса будет больше, чем у витков истинной траектории (точка A на рис. 5.1). Однако, в противоположность ориентации большой оси, которая поворачивается все время в одном направлении, изменения других параметров происходят периодически. В результате таких изменений максимальное и минимальное удаления спутника от центра планеты на многолепестковой сложной траектории, генерируемой непрерывным поворотом большой оси и периодическими изменениями ее длины, не изменяются от витка к витку.

Действительное движение спутника характеризуется двумя периодами: одним для радиального движения между максимальным и минимальным удалениями от центра (для периодических изменений модуля радиуса-вектора), и другим — для полного оборота большой оси прецессирующего эллипса. В общем случае эти периоды несоизмеримы, и многолепестковая траектория всюду плотно заполняет кольцевую область экваториальной плоскости между окружностями, показанными штриховыми линиями на рис. 5.1. «Чудо» замкнутых кеплеровых эллиптических орбит обусловлено точным совпадением этих двух периодов при движении под действием центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния. Но в принципе многолепестковая орбита экваториального спутника может замкнуться после конечного числа оборотов вокруг планеты, если отношение периодов выражается рациональным числом. Пример такого замыкания орбиты показан на рис. 5.2. Чтобы добиться замыкания орбиты в компьютерном моделировании, нужно должным образом подобрать величину начальной скорости \mathbf{v}_0 .

У Земли реальная сплюснутость мала, поэтому большая ось эллиптической орбиты за один оборот спутника поворачивается на очень малый угол, однако этот эффект накапливается за большое число оборотов по орбите.

5.3 Экваториальный спутник планеты с осевым растяжением

В случае осевого «растяжения» планеты (или при наличии полярных «шапок»), как уже отмечалось выше, дополнительный член силы тяготения в экваториальной плоскости отрицателен ($b < 0$), так как на малых расстояниях от планеты сила тяготения меньше, чем при сферически симметричном распределении масс. В самом деле, при приближении к планете расстояние до полярных «шапок» уменьшается медленнее, чем расстояние до ее центра. В этом случае при приближении к планете сила тяготения сообщает спутнику меньшее ускорение, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу, так что истинная траектория имеет меньшую, чем у эллипса, кривизну. Эллипс как бы частично «распрямляется» вблизи перигея, что можно трактовать как поворот большой оси эллипса в экваториальной плоскости против направления орбитального движения.

В результате прецессия эллиптической орбиты спутника происходит в направлении, противоположном орбитальному движению спутника. Пример такого движения иллюстрируется моделированием, показанным на рис. 5.3. Здесь также показаны оскулирующие эллипсы, построенные программой для точек S , A и B .

Точка A расположена вблизи апогея, и соответствующий ей оскулирующий эллипс почти совпадает с витком траектории, по которому спутник пришел в точку A . Для точки

B , расположенной на небольшом расстоянии от планеты, большая ось оскулирующего эллипса меньше радиального размера витков истинной траектории. В общем случае траектория, как и в случае сжатой планеты, за большое время движения всюду плотно заполняет кольцевую область экваториальной плоскости, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно минимальному и максимальному удалениям спутника от центра планеты.

Здесь также возможно замыкание траектории после конечного числа оборотов спутника, если отношение периодов радиального движения и поворота большой оси выражается рациональным числом.

Наряду с множеством многопетлистых орбит экваториального спутника планеты с осевым сжатием или растяжением возможны, конечно, строго круговые орбиты любых радиусов. Чтобы получить такую орбиту в моделировании, нужно придать спутнику скорость определенной величины в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору. Для спутника, находящегося на заданном расстоянии от центра планеты, необходимую начальную скорость можно рассчитать, пользуясь формулой (5.1) для силы тяготения, действующей на спутник в экваториальной плоскости. Пример движения по круговой орбите в поле планеты с утрированно большим осевым сжатием показан на рис. 5.4.

Поскольку в случае «сплюснутой» планеты центростремительная сила больше, чем у неискаженной планеты той же массы, скорость спутника на круговой орбите должна превышать круговую скорость, соответствующую неискаженной планете. Если представить себе, что искажение планеты внезапно исчезает, то начиная с этого момента круговой спутник стал бы двигаться по эллиптической орбите, перигей которой находится в исходной точке, где прежняя круговая и новая эллиптическая орбиты соприкасаются.

Иначе говоря, для спутника, движущегося по круговой орбите вокруг искаженной планеты, для каждого момента времени оскулирующая орбита представляет собой эл-

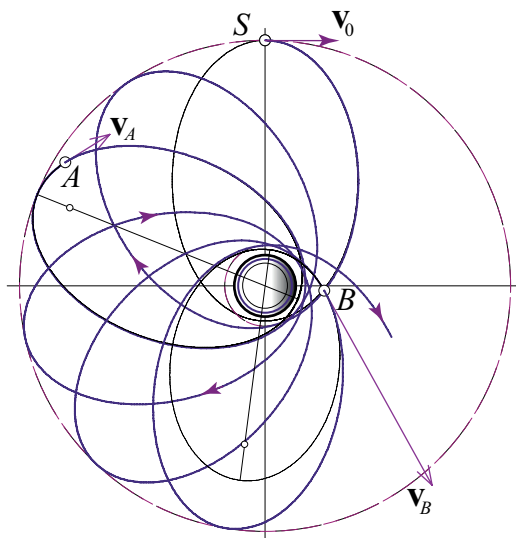


Рис. 5.3: Прецессия орбиты экваториального спутника планеты, «вытянутой» вдоль оси (планеты с полярными «шапками»).

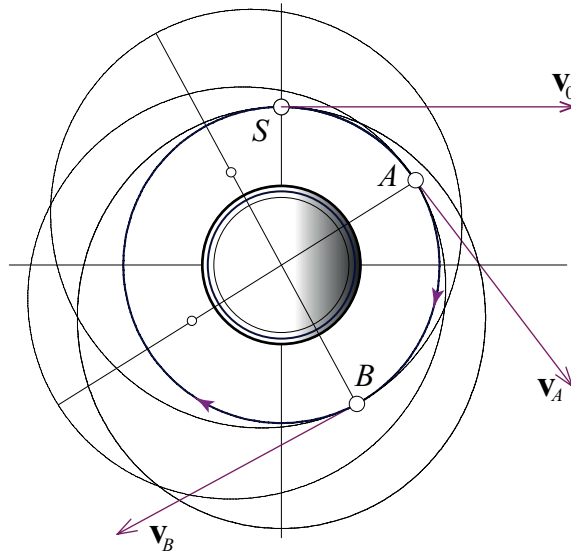


Рис. 5.4: Круговая орбита экваториального спутника планеты с сильным осевым сжатием. Тонкими линиями показаны оскулирующие эллипсы для точек S , A и B .

липс с перигеем в данной точке, большая ось которого совершает ровно один оборот на протяжении периода кругового движения в поле тяготения искаженной планеты.

На рис. 5.4 оскулирующие эллипсы показаны для точек S , A и B . Эти эллипсы в своих перигеях касаются круговой орбиты спутника. Большая ось оскулирующего эллипса поворачивается с той же угловой скоростью, что и радиус-вектор спутника, так что спутник постоянно находится в перигее этого эллипса.

Деформация центрального тела (т. е. отклонение поля тяготения от сферической симметрии) — не единственная причина возможной прецессии орбиты спутника. Прецессия большой оси эллиптической орбиты планеты, обращающейся вокруг Солнца, может быть вызвана гравитационными возмущениями со стороны других планет. В нашей планетной системе этот эффект наиболее значителен для Меркурия — самой близкой к Солнцу планеты.

Расчеты показывают, что поля тяготения других планет действительно должны вызывать наблюдаемую астрономами прецессию орбиты Меркурия, но остается крошечное расхождение между расчетами и наблюдениями. Это расхождение составляет всего $43''$ (43 угловых секунды) за столетие (!), и ему не находится объяснения в рамках ньютоновской теории тяготения. Исчерпывающее количественное объяснение прецессии перигелия эллиптической орбиты Меркурия получила лишь в созданной Эйнштейном релятивистской теории тяготения (общей теории относительности). Объяснение этого экспериментального факта в первой четверти двадцатого столетия на основе только что созданной новой теории тяготения Эйнштейн рассматривал как одно из важных ее подтверждений, наряду с двумя другими фактами, также впервые получившими достоверное теоретическое объяснение — отклонением световых лучей в гравитационном поле Солнца и гравитационным красным смещением спектральных линий, излучаемых атомами в сильном гравитационном поле.

Контрольные вопросы

1. **Сила тяготения несферической планеты (планеты с осевым сжатием).** Почему в случае сплюснутой вдоль оси планеты сила тяготения, действующая со стороны планеты на спутник, находящийся в экваториальной плоскости планеты, на небольших расстояниях до планеты оказывается сильнее, чем при сферически симметричном распределении масс? Что можно сказать о силе тяготения, действующей на спутник над полюсами планеты?
2. **Сила тяготения вытянутой вдоль оси планеты.** Почему в случае осевого растяжения планеты сила тяготения, действующая на спутник в экваториальной плоскости планеты, оказывается меньше, чем при сферически симметричном распределении масс? Будет ли это справедливо для силы тяготения, действующей на спутник над полюсами планеты?
3. **Направление прецессии эллиптической орбиты.** В каком направлении по отношению к направлению орбитального движения происходит прецессия экваториальной эллиптической орбиты спутника в случаях обращения вокруг сплюснутой и вокруг вытянутой планеты? Почему? Приведите физическое обоснование наблюдаемого направления прецессии экваториальной орбиты.
4. **Максимальное и минимальное расстояния спутника.** Поясните, исходя из закона сохранения энергии и второго закона Кеплера, почему максимальное и минимальное расстояния спутника от планеты не изменяются от витка к витку при прецессии его орбиты (т. е. что большая ось прецессирующего эллипса остается неизменной).
5. **Экваториальная орбита.** Опишите общий характер экваториальной орбиты спутника в поле тяготения искаженной (сплюснутой или вытянутой) планеты при движении спутника за много витков.
6. **Замкнутые орбиты.** Попробуйте подобрать (методом проб и ошибок) такие начальные условия, при которых прецессирующая в экваториальной плоскости орбита спутника через несколько витков замкнется. Возможно ли замыкание орбиты после одного оборота вокруг планеты?
7. **Круговая орбита вокруг несферической планеты.** Рассчитайте значение скорости, которое нужно сообщить экваториальному спутнику осесимметричной планеты массы M , чтобы он двигался по круговой орбите радиуса r , если искажение планеты характеризуется определенным значением безразмерного параметра b . Проверьте свой результат компьютерным моделированием.
8. (*) **Оскулирующий (соприкасающийся) эллипс для круговой орбиты.** Объясните, почему для экваториального спутника аксиально искаженной планеты, движущегося по круговой орбите, оскулирующая орбита представляет собой вращающийся эллипс. Какова угловая скорость этого вращения? В каком случае такой спутник всегда находится в перигее, а в каком случае — в апогее соприкасающегося эллипса?

Глава 6

Двойная звезда – задача двух тел

Примерно половина звезд в нашей Галактике образуют систему двух звезд, связанных гравитационными силами. Расстояние между компонентами двойной звезды всегда значительно меньше, чем расстояние до ближайшей соседней звезды. Следовательно, двойная звезда может рассматриваться в очень хорошем приближении как замкнутая динамическая система двух тел.

Движение двух тел, взаимодействующих посредством гравитационных сил, моделируется в программе «Двойная звезда». Когда тела имеют сравнимые массы, такую физическую систему можно рассматривать как модель двойной звезды, компоненты которой обращаются вокруг общего центра масс. Программа показывает, что в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы, тела синхронно описывают геометрически подобные кеплеровы орбиты.

В предыдущих программах пакета «Движение космических тел» моделирование движения под действием гравитационных сил осуществляется в предположении, что масса центрального тела значительно больше, чем масса орбитального тела. Таким образом, более массивное центральное тело (Солнце в задаче о движении планеты, или Землю в задаче о спутнике на орбите вокруг Земли) можно приближенно рассматривать как неподвижное, и тем самым задача сводится к исследованию орбитального движения тела пренебрежимо малой массы в гравитационном поле другого массивного тела (в неподвижном силовом центре).

В общем случае, когда массы взаимодействующих тел сравнимы, такое приближение недопустимо, потому что ни одно из тел на самом деле нельзя считать неподвижным относительно инерциальной системы отсчета, связанной с центром масс. Гравитация взаимна, и если Земля притягивает Луну, то и Луна притягивает Землю. То есть, более массивное центральное тело также вынуждено перемещаться под гравитационным действием, производимым другим орбитальным телом, и это движение центрального тела в свою очередь влияет на движение орбитального тела, и так далее. Чтобы быть точными, мы не должны говорить о том, что Луна обращается вокруг Земли. На самом деле, Луна и Земля обращаются друг вокруг друга, и при этом каждая из них обращается вокруг общего центра масс системы. Поэтому необходимо учитывать движения обоих взаимодействующих тел, т. е. решать так называемую «задачу двух тел».

Силы взаимодействия между телами, в соответствии с третьим законом Ньютона, равны по величине и противоположны по направлению. Этот фундаментальный закон справедлив для всех известных взаимодействий между телами, независимо от физиче-

ской природы взаимодействия. В частности, он справедлив и для гравитационного взаимодействия. Универсальный характер третьего закона Ньютона связан с сохранением импульса в изолированной физической системе и, в более общем плане, с однородностью физического пространства.

Применяя третий закон Ньютона к системе двух взаимодействующих тел, можно свести задачу двух тел к задаче о движении одного тела с некоторой массой μ (так называемой *приведенной массой*), значение которой задается выражением $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Это воображаемое тело движется под действием центральной силы, равной силе взаимодействия между фактическими телами (независимо от физической природы взаимодействия). Можно показать, что решение этой проблемы описывает их относительное движение, то есть движение одного из тел в (неинерциальной) системе отсчета, связанной с другим телом. (подробности приведены в разделе 15.1, стр. 235). Если тела взаимодействуют посредством сил всемирного тяготения, когда сила уменьшается пропорционально квадрату расстояния между телами, существует точное аналитическое решение. Это решение показывает, что относительное движение тел подчиняется законам Кеплера.

После того, как задача о движении одного тела относительно второго решена, можно легко найти движение каждого из тел относительно инерциальной системы отсчета, связанной с центром масс системы. В этой системе отсчета тела движутся по геометрически подобным коническим сечениям с общим фокусом, расположенным в неподвижном центре масс системы. Зная движение каждого из тел относительно центра масс, легко найти их движение относительно любой другой инерциальной системы отсчета, если принять во внимание, что центр масс всей системы в любой инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно.

Моделирующая программа «Двойная звезда», входящая в пакет «Движение космических тел», иллюстрирует задачу двух тел в частном случае двух звезд сравнимых масс, связанных гравитационным взаимодействием. Чтобы лучше осознать особенности этой проблемы, рекомендуется сначала изучить движение тел в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы. Для этого должен быть отмечен «галочкой» соответствующий пункт меню «Условия моделирования».

Перед началом моделирования можно ввести отношение масс компонент двойной звезды и их начальные скорости. Это делается с помощью панели ввода параметров, которая открывается при выборе пункта «Ввод» в верхнем меню программы или во всплывающем (при нажатии правой кнопки) меню. Нет необходимости вводить начальное расстояние между звездами, поскольку в программе все расстояния измеряются в единицах этого начального расстояния. Предполагается, что скорости звезд в начальный момент моделирования перпендикулярны отрезку, соединяющему звезды (в системе отсчета центра масс).

Поскольку в системе центра масс отношение скоростей звезд обратно пропорционально отношению их масс, достаточно ввести начальную скорость только одной из звезд. При вводе эту скорость нужно задавать в единицах круговой скорости. Это значит, что если ввести для этой трансверсальной скорости значение, равное 1, то компоненты двойной звезды будут синхронно описывать круговые орбиты с общим центром в центре масс системы. Если для начальной скорости ввести значение 0.5, каждая из компонент в начальный момент будет иметь скорость, равную половине той скорости, при которой ее движение происходило бы по круговой орбите. Для моделирования допустимо вводить любые значения начальной скорости, не превосходящие 1.3 круговой скорости. Это ограничение не имеет принципиального характера и связано лишь с удобством отображения движения звезд на экране компьютера. Истинные значения начальных скоростей звезд

(скажем, в км/с, а не в единицах круговой скорости) зависят от масс компонент двойной звезды и расстояния между ними.

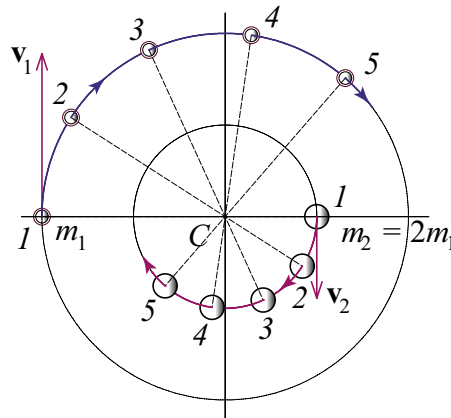


Рис. 6.1: Круговые орбиты, по которым движутся компоненты двойной звезды в системе отсчета центра масс при $v_0 = v_{кр}$. Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами.

Круговые движения компонент двойной звезды показаны на рис. 6.1. В таком движении расстояние между звездами остается неизменным. Соединяющий их отрезок, равномерно поворачиваясь, всегда проходит через центр масс C , где делится на две части в отношении, обратном пропорциональному массам тел.

Если начальная трансверсальная скорость меньше круговой скорости, звезды в начальный момент находятся на максимальном расстоянии друг от друга, и наоборот. На рис. 6.2 показано моделирование эллиптического движения компонент двойной звезды в системе отсчета центра масс. Начальная скорость выбрана равной $1.22 v_{кр}$, отношение масс компонент $m_1/m_2 = 0.5$. Центр масс системы находится на прямой линии, соединяющей звезды, и делит эту линию в постоянном соотношении, обратном отношению масс компонент двойной звезды. В инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс (рис. 6.2), обе звезды движутся синхронно по геометрически подобным эллиптическим орбитам, общий фокус которых расположен в центре масс C системы. То есть обе орбиты имеют одинаковый эксцентриситет. (В частности, орбиты могут быть концентрическими окружностями, как на рис. 6.1). Линейные размеры этих подобных орбит обратно пропорциональны массам звезд. Один из фокусов каждого эллипса находится в неподвижном центре масс системы, а главные оси обоих эллипсов ориентированы вдоль одной прямой линии.

Относительное движение тел в задаче двух тел эквивалентно, как мы уже упоминали, движению одного тела под действием центральной силы, которая равна силе взаимодействия между телами. В частном случае двойной звезды это ньютоновская сила тяготения, обратно пропорциональная квадрату расстояния до силового центра. Поэтому относительное движение компонент двойной звезды — это кеплерово движение, которое изучается в предыдущих программах пакета «Движение космических тел».

По мере своего движения звезды всегда расположены на концах вращающейся прямой, проходящей через неподвижный общий фокус своих орбит, расположенный в центре масс. Эта вращающаяся линия показана для различных моментов штриховыми линиями

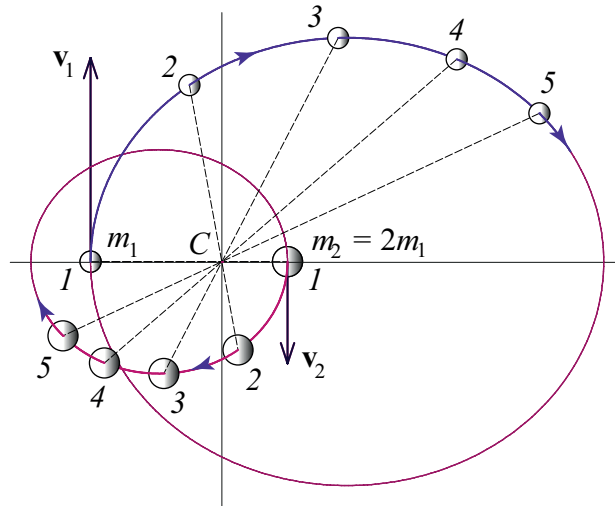


Рис. 6.2: Траектории, по которым движутся компоненты двойной звезды в системе отсчета центра масс. Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами.

на рисунках 6.2 и 6.1. Поэтому траектория относительного движения (движения меньшей звезды относительно большей или наоборот) представляет собой эллипс, геометрически подобный эллипсам, по которым звезды движутся в системе центра масс. Любой линейный размер (например, большая или малая ось этого эллипса относительного движения) равен сумме соответствующих линейных размеров эллипсов, описываемых обеими звездами относительно центра масс.

Так как сила притяжения между звездами в каждый момент направлена вдоль линии, соединяющей звезды, векторы сил направлены к центру масс. Следовательно, момент импульса каждой звезды относительно центра масс не меняется во время движения, т. е. для каждой из звезд выполняется второй закон Кеплера. Это значит, что штриховые линии, показанные на рисунке 6.2, замечают равные площади каждого эллипса за равные промежутки времени. Поэтому для эллиптических движений линия, соединяющая звезды, поворачивается неравномерно. Вращение является самым быстрым, когда расстояние между звездами минимально.

Для того, чтобы объяснить, почему движения звезд относительно центра масс подчиняются первому закону Кеплера (т. е. происходят вдоль эллипсов), можно показать, что движение каждой из звезд, связанных взаимной гравитацией, можно рассматривать происходящим не под ее притяжением другой движущейся звездой, а под притяжением неподвижным центральным гравитационным полем, сила которого уменьшается пропорционально квадрату расстояния от центра масс. Ускорения звезд в этих синхронных движениях относятся как их расстояния от центра масс.

Программа «Двойная звезда» позволяет открыть дополнительное окно для того, чтобы одновременно отображать относительное движение компонент двойной звезды. Соответствующая (неинерциальная) система отсчета может быть связана с какой-либо одной из звезд, в зависимости от Вашего выбора в пункте меню «Системы». Мы можем видеть в процессе моделирования, как одна из компонент движется вокруг другой по эллипсу, геометрически подобному эллипсам, по которым движутся компоненты двойной звезды в

инерциальной системе центра масс.

Чтобы наблюдать движение компонент двойной звезды в произвольной инерциальной системе отсчета (относительно которой центр масс двойной звезды находится в движении), нужно открыть панель «Ввод» и выбрать на ней опцию «Произвольная система отсчета». Затем нужно ввести скорость центра масс относительно той системы отсчета, в которой должно быть отображено движение двойной звезды. Программа моделирования позволяет отображать только двумерные плоские системы. Это ограничение вызвано исключительно трудностями отображения и зрительного восприятия трехмерного движения на двумерном экране компьютера. Поэтому вектор скорости центра масс должна лежать в плоскости орбитального движения звезд. Величина этой скорости должна быть указана в единицах поперечной круговой скорости менее массивной компоненты, измеренной относительно системы центра масс. Направление скорости центра масс должно быть указано введением угла (в градусах), который эта скорость составляет с линией, соединяющей компоненты двойной звезды в начальный момент времени.

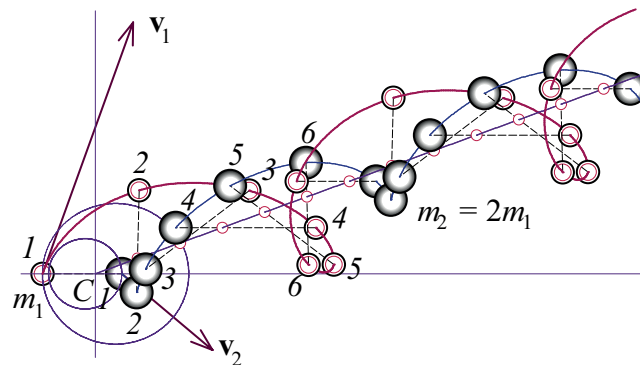


Рис. 6.3: Траектории, по которым движутся компоненты двойной звезды, и прямолинейная траектория центра масс при наблюдении «со стороны» (в произвольной инерциальной системе отсчета). Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами.

Рисунок 6.3 показывает траектории компонент двойной звезды в произвольной инерциальной системе отсчета (эллипсами показаны траектории в системе центра масс). Одновременные положения звезд соединены пунктирными линиями. Очевидно, что центр масс C движется равномерно вдоль прямой линии (на рисунке положения центра масс для тех же моментов времени показаны малыми кружками). Сами звезды движутся неравномерно вдоль сложных волнообразных или петлеобразных траекторий. Эти траектории порождаются наложением периодических кеплеровых эллиптических движений звезд вокруг центра масс и равномерного прямолинейного движения вместе с центром масс.

* * *

Двойная звезда называется *визуальной двойной звездой*, если ее компоненты находятся настолько далеко друг от друга, чтобы их можно было видеть раздельными в оптический телескоп. Измеряя период обращения и орбиты относительного движения, мы можем определить сумму масс звезд. Для того, чтобы определить массу каждой из звезд по отдельности, мы должны измерить орбиты, по которым они движутся вокруг центра масс. Действительно, линейные размеры этих орбит обратно пропорциональны массам

звезд. В настоящее время зарегистрированы тысячи визуальных двойных звезд с орбитальными периодами от нескольких лет до многих тысяч лет.

Двойная звезда называется *астрометрической двойной звездой*, если одна из ее компонент слишком слаба, чтобы ее можно было увидеть в оптический телескоп, и ее присутствие выводится из возмущений в видимом движении другой компоненты на фоне далеких звезд. Именно таким образом были обнаружены первые белые карлики (компактные звездные объекты, образовавшиеся в качестве конечных продуктов эволюции звезд относительно малой массы). Сложная волнообразная траектория звезды Сириус, измеренная по отношению к неподвижным звездам, свидетельствовала о присутствии невидимого спутника, который впоследствии был обнаружен визуально.

В *спектрально-двойной звезде* компоненты настолько близки, что они, как правило, не могут быть разрешены с помощью телескопа, но их относительное движение можно обнаружить по периодическим вариациям наблюдаемого спектра. Эти изменения вызваны различными доплеровскими сдвигами линий, общих для спектров обеих звезд. В соединении обе звезды движутся перпендикулярно к линии зрения, и их спектральные линии совпадают. Через четверть периода одна из компонент приближается к наблюдателю с наибольшей скоростью, в то время как другая удаляется от наблюдателя, и линии в их спектрах смещены в противоположные стороны пропорционально их скоростям вдоль линии зрения.

Контрольные вопросы

- 1. Период обращения компонент двойной звезды по круговым орбитам.** Компоненты имеют одинаковые массы. Обращаясь вокруг центра масс системы, эти компоненты совершают круговые движения. Во сколько раз отличался бы период обращения компонент, если бы расстояние между ними было в 2 раза больше (при тех же массах)? Если бы массы компонент были в 4 раза больше (при том же расстоянии между ними)?
- 2. Период обращения и массы звезд.** Компоненты двойной звезды имеют различные массы и совершают эллиптические движения. Допустим, что наблюдается еще одна двойная звезда, компоненты которой движутся по орбитам, идентичным с орбитами компонент первой звезды, но с вдвое меньшим (чем у первой звезды) периодом обращения. Что можно сказать относительно масс компонент второй звезды? Каково отношение этих масс к массам компонент первой двойной звезды?
- 3. Массы звезд и линейные размеры орбит.** Компоненты двойной звезды имеют различные массы и движутся по эллиптическим орбитам. Допустим, что наблюдается еще одна двойная звезда, компоненты которой движутся с таким же периодом, как у первой двойной звезды, по орбитам, геометрически подобным орбитам компонент первой звезды, но линейные размеры орбит в 2 раза больше, чем у первой двойной звезды. Что можно сказать относительно масс компонент второй звезды? Каково отношение этих масс к массам компонент первой двойной звезды?
- 4. Траектория относительного движения.** В основном окне программы выполняется построение эллиптических (или круговых) траекторий компонент двойной звезды в инерциальной системе отсчета, где центр масс системы неподвижен. Можно открыть дополнительное окно, в котором будет строиться траектория одной из компонент в неинерциальной системе отсчета, связанной со второй компонентой. Какой

будет эта траектория относительного движения? Как она соотносится с траекториями компонент двойной звезды в инерциальной системе отсчета?

5. **Двойная звезда «со стороны».** Какими будут траектории компонент двойной звезды в других системах отсчета, относительно которых центр масс системы движется?

Глава 7

Спутник планеты, обращающейся вокруг звезды

7.1 Введение: ограниченная задача трех тел

Самые удивительные эффекты в небесной механике проявляются при исследовании задачи трех (и многих) тел, тяготеющих друг к другу. Система трех взаимодействующих тел моделируется в нескольких программах пакета «Движение космических тел». В частности, рассматривается движение спутника вокруг планеты, которая в свою очередь обращается вокруг звезды; моделируется движение планеты в системе двойной звезды; изучаются взаимные возмущения планет, обращающихся вокруг одиночной звезды.

В нескольких программах пакета моделируются системы, относящиеся к ограниченной задаче трех тел, в которой масса одного из тел пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел. В таком случае можно пренебречь влиянием тела малой массы («легкого» тела) на движение массивных тел. Поэтому движение массивных тел будет в точности кеплеровым движением, как показывает решение задачи двух тел. Это значит, что движение легкого тела будет происходить под действием сил тяготения, создаваемых двумя массивными телами, движение которых точно известно.

Оказывается, что даже ограниченная задача трех тел в общем случае не имеет аналитического решения. Отсутствие аналитических решений дифференциальных уравнений для столь простой системы, движение которой подчиняется точным и в математическом отношении достаточно простым физическим законам, связано, по-видимому, с необычайной сложностью возможных ее движений.

Возможную сложность движений в системах трех и многих тел наглядно демонстрируют программы пакета «Движение космических тел». При некоторых значениях параметров системы и/или начальных условий движение легкого тела становится нерегулярным, хаотическим, несмотря на полностью детерминистский характер задачи.

Хаотическое поведение нелинейных систем, подчиняющихся простым детерминистским физическим законам, связано с чрезвычайной чувствительностью дифференциальных уравнений, описывающих систему, к малым изменениям параметров и начальных условий: ничтожные различия в начальном состоянии системы могут привести к радикальным изменениям будущих состояний в долгосрочном поведении системы. Небесная механика дает один из многочисленных примеров хаоса в физических системах.

7.2 Планета со спутником — обзор

В данной программе моделируется система, математическая модель которой соответствует ограниченной задаче трех тел: масса одного из тел пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел. В такой системе можно не принимать во внимание влияние тела малой массы («легкого» тела) на движение двух других («массивных», «тяжелых») тел. Поэтому движение тяжелых тел — это в точности кеплерово движение, происходящее так, как описано в программе «Двойная звезда». По отношению к инерциальной системе отсчета, в которой центр масс системы неподвижен, массивные тела синхронно описывают геометрически подобные кеплеровы орбиты, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. Общий фокус этих орбит находится в центре масс системы, и радиусы-векторы массивных тел, проведенные из центра масс, направлены противоположно друг другу. Каждый из них описывает равные площади за равные промежутки времени, в соответствии со вторым законом Кеплера.

В ограниченной задаче трех тел наибольший интерес представляет вопрос о движении легкого тела. Это движение происходит под действием сил тяготения, создаваемых массивными телами, движение которых точно известно. Оказывается, что даже ограниченная задача трех тел в общем случае не имеет аналитического решения, которое описывало бы движение легкого тела при произвольных начальных условиях.

Моделирующая программа «Планета со спутником» позволяет получить численное решение задачи для любых начальных условий при произвольных параметрах системы, и наблюдать движение тел, описываемое этим решением, на экране компьютера. Движение можно отображать как в системе отсчета, связанной с одним из двух массивных тел, т.е. либо в геоцентрической (планетоцентрической) системе отсчета, либо в гелиоцентрической системе, так и в инерциальной системе отсчета (системе центра масс). Можно также наблюдать движение одновременно в двух системах отсчета.

7.3 Как работать с программой «Планета со спутником»

При воспроизведении описываемых ниже экспериментов можно избежать трудоемкого процесса ввода параметров системы и начальных условий, если воспользоваться наборами заранее заготовленных примеров, поставляемыми вместе с программой. Для выбора примеров нужно открыть панель с их описанием, выбрав в верхнем меню программы пункт «Примеры».

Разумеется, программа дает возможность проводить моделирующие эксперименты самостоятельно. Для этого необходимо вводить параметры системы и задавать начальные условия для всех тел, используя панель ввода параметров, которая открывается при выборе соответствующего пункта меню программы. Для двух массивных тел нужно задать отношение их масс и начальную скорость, определяющую характер их относительного движения. По условию эта скорость направлена трансверсально (перпендикулярно отрезку, соединяющему центры тел). Поэтому нужно ввести лишь ее величину, выразив ее в единицах круговой скорости (т.е. скорости, при которой относительное движение этих тел и их движения в системе отсчета центра масс будут круговыми). Это значит, что когда для относительной скорости вводится значение 1, тела будут двигаться по окружностям.

Затем нужно ввести начальное положение и скорость спутника. Для этого можно выбрать одну из следующих систем отсчета: либо систему отсчета, связанную с планетой (далее мы будем для краткости называть ее «геоцентрической»), либо систему, связанную со звездой («гелиоцентрическую»), либо инерциальную систему отсчета, связанную

с центром масс системы тел. Которая из этих систем удобнее, зависит от характера задачи, которую Вы собираетесь исследовать. Выбор той или иной системы отсчета производится с помощью специальных кнопок.

Начальное положение спутника задается либо указанием его расстояния от центра планеты-хозяина, либо от звезды, либо от центра масс системы, в зависимости от того, какую Вы выбрали систему отсчета. Это расстояние нужно выражать в единицах начального расстояния между звездой и планетой. Кроме того, нужно указать угол (в градусах), образуемый радиусом-вектором начального положения спутника (проведенным либо из центра планеты, либо звезды, либо из центра масс) с прямой, проведенной от звезды к планете.

Аналогично вводится начальная скорость спутника. Сначала Вы вводите ее величину. Если используется геоцентрическая система отсчета, величина начальной скорости выражается либо в единицах невозмущенной круговой скорости спутника для выбранного начального расстояния его от планеты (т.е. скорости, с которой спутник двигался бы вокруг планеты по круговой орбите в отсутствие звезды), либо в единицах круговой скорости планеты (для заданного начального расстояния между звездой и планетой). Выбор между указанными возможностями делается с помощью соответствующей кнопки, которая появляется, когда окно для ввода скорости получает фокус. Если Вы используете систему отсчета центра масс или геоцентрическую, величина начальной скорости спутника должна выражаться в единицах круговой скорости планеты (в выбранной системе отсчета).

И, наконец, нужно ввести размеры (значения радиусов) звезды и планеты, выраженные в единицах расстояния между центрами звезды и планеты. При моделировании размеры массивных тел могут оказаться существенными в ситуациях, когда траектория спутника проходит очень близко от звезды или планеты. В зависимости от введенных Вами радиусов этих небесных тел спутник может либо благополучно миновать их, либо вресть в их поверхность.

Когда все эти параметры введены, вы выбираете систему отсчета для отображения движения тел, выставляя «галочку» в соответствующем окне. Можно отображать движение тел одновременно в двух системах отсчета. Затем Вы нажимаете кнопку «Ок», чтобы закрыть панель ввода параметров и приступить к моделированию. Пункт меню «Условия моделирования» позволяет Вам сделать оптимальный выбор. Если, например, в пункте «Метки времени» поставить «галочку», положения тел на экране будут фиксироваться через определенные равные промежутки времени; если «галочку» поставить в пункте «Оскулирующая орбита», программа будет изображать траекторию невозмущенного движения перед началом моделирования и каждый раз, когда Вы будете нажимать кнопку «Пауза».

В процессе моделирования Вы можете переходить от одной системы отсчета к другой или открывать одновременно две системы отсчета, чтобы получить представление о том, как моделируемое движение выглядит для разных наблюдателей. Чтобы сделать это, нужно в пункте меню «Системы отсчета» выбрать пункт «Изменить систему отсчета». Можно также открыть небольшое дополнительное окно для отображения в нем движения спутника относительно звезды или относительно планеты.

Можно самостоятельно создавать новые примеры и наборы примеров, и затем сохранять их в файлах на диске. Чтобы узнать, каким образом можно самостоятельно создавать новые примеры, смотрите раздел «Как создавать новые примеры».

Подчеркнем, что программа может моделировать не только спутник, обращающийся вокруг планеты, которая в свою очередь обращается вокруг звезды, но также и раз-

личные другие системы, поведение которых описывается решением ограниченной задачи трех тел. Например, можно моделировать движение внутренней планеты в системе двойной звезды (хотя для этого лучше воспользоваться программой «Двойная звезда с планетой»), либо движение космического корабля на пути к Луне под действием сил тяготения как Земли, так и Луны. Или же можно исследовать лунные или солнечные возмущения движений искусственных спутников Земли. И, наконец, с помощью этой программы можно моделировать движение в тех интересных экзотических частных случаях, для которых ограниченная задача трех тел имеет точные решения. Можно, например, исследовать движение спутника в окрестности лагранжевых точек либрации в системе двух массивных тел, обращающихся одно вокруг другого под действием сил взаимного притяжения (Земля и Луна, или Солнце и Юпитер дают приближенные примеры таких систем).

Напомним, что при воспроизведении описываемых ниже моделирующих экспериментов можно избежать трудоемкого процесса ввода параметров системы и начальных условий, если воспользоваться наборами заранее заготовленных примеров, поставляемыми вместе с программой. Для выбора примеров нужно открыть панель с их описанием, выбрав в меню программы пункт «Примеры». Во время моделирования можно переходить от одной системы отсчета к другой, или открывать одновременно две системы отсчета, чтобы получить представление о том, как моделируемое движение выглядит для разных наблюдателей.

7.4 Возмущения в движении спутников планеты

В Солнечной системе массы планет очень малы по сравнению с массой Солнца. Поэтому притяжение планет Солнцем играет гораздо более важную роль, чем взаимное притяжение между планетами. Последнее вызывает лишь весьма небольшие отклонения от законов Кеплера. В случае звезды с единственной планетой движение планеты было бы в точности кеплеровым даже тогда, когда масса планеты соизмерима с массой звезды.

Но что можно сказать о движении спутника планеты? В какой мере это движение можно считать кеплеровым? Ведь помимо силы притяжения к планете на спутник действует сила притяжения к Солнцу. Например, сила притяжения к Солнцу нашего естественного спутника Луны, как легко подсчитать, превосходит силу притяжения к Земле. В каком же смысле можно говорить об обращении Луны вокруг Земли?

Дело в том, что при описании движения близкого к планете спутника мы рассматриваем его движение относительно планеты, а не относительно Солнца. А система отсчета, связанная с планетой, не является инерциальной: она вместе с планетой подвержена ускорению, направленному к Солнцу. Когда спутник находится близко к планете, солнечное притяжение сообщает ему почти такое же ускорение, как и самой планете. Поэтому влияние притяжения к Солнцу на движение спутника относительно планеты оказывается незначительным: в главных чертах это движение описывается законами Кеплера. Тяготение к Солнцу проявляется в возмущающем ускорении, которое равно не ускорению, сообщаемому спутнику Солнцем, а разности ускорений, сообщаемых Солнцем спутнику и планете.

Иначе говоря, кеплерово движение спутника относительно Земли возмущается не самим по себе солнечным тяготением, а лишь его неоднородностью на расстояниях порядка удаления спутника от центра планеты. В земных делах (в неинерциальной планетоцентрической системе отсчета) неоднородность поля тяготения Солнца обнаруживает себя (вместе с неоднородностью поля тяготения Луны) в виде приливообразующих сил, возмущающих орбиты спутников Земли и вызывающих океанские приливы.

На протяжении низкой околоземной орбиты спутника неоднородность поля тяготения Солнца сравнительно невелика. Поэтому при расчете движения спутника вблизи планеты оказывается возможным в первом приближении учитывать его притяжение только планетой, т. е. исследовать движение спутника относительно планеты в рамках ограниченной задачи двух тел. Для спутника, масса которого много меньше массы планеты, это будет просто кеплерово движение в ньютоновском центральном поле тяготения. Орбита спутника относительно планеты может быть эллипсом или окружностью, а пролетная траектория космического аппарата — параболой или гиперболой.

Будем называть кеплерово движение спутника относительно планеты невозмущенным движением. Движение спутников по орбитам, пролегающим сравнительно недалеко от планеты, с хорошей точностью можно считать невозмущенным, но при значительном удалении спутника от планеты возмущающее влияние неоднородности поля солнечного тяготения становится существенным. Для каждой планеты можно указать приближенный размер окружающей планету области невозмущенного движения спутников. В небесной механике и космической динамике такую область называют сферой действия планеты относительно Солнца. Количественный расчет размера сферы действия приведен в разделе 15.4.

При приближенном анализе движения спутника (космического корабля и вообще тела пренебрежимо малой массы) под действием сил тяготения планеты и Солнца (т. е. при приближенном решении ограниченной задачи трех тел) можно использовать так называемый метод сопряженных конических сечений. Идея его заключается в следующем. Пока спутник движется в окрестности планеты в пределах сферы ее действия, движение рассматривается как кеплерово планетоцентрическое (в частности, геоцентрическое), происходящее по эллипсу, параболе или гиперболу. При переходе через границу сферы действия спутник (космический аппарат) попадает во власть Солнца, и его движение естественнее рассматривать как кеплерово гелиоцентрическое с фокусом в центре Солнца.

На границе сферы действия планетоцентрическая и гелиоцентрическая траектории сопрягаются («склеиваются», «сшиваются») по определенным правилам (с пересчетом скорости при переходе от одной системы отсчета к другой).

Приближенный метод сопряженных конических сечений широко используется в механике космического полета при предварительном проектировании орбит межпланетных перелетов. В частности, его применяют при отборе возможных траекторий в задаче достижения Луны. Когда орбита спутника лежит глубоко внутри сферы действия планеты, движение спутника устойчиво, т. е. он обречен вечно обращаться вокруг планеты.

В случае орбиты спутника, приближающейся к границе сферы действия планеты относительно звезды, возможны разнообразные варианты неустойчивых движений, оканчивающихся падением спутника на планету или на звезду, либо «выбрасыванием» спутника за пределы системы.

Возможны также очень интересные движения, сопровождающиеся переходом спутника от обращения вокруг планеты к обращению вокруг звезды (когда спутник превращается в самостоятельную планету). Может оказаться, что через некоторое время такой потерянный планетой спутник снова окажется захваченным планетой. Подобная «перепасовка» спутником между планетой и звездой в этом «космическом баскетболе» может повторяться неоднократно. Ниже будут приведены примеры такого хаотического движения спутника некоторой планеты, обращающейся вокруг звезды по эллиптической орбите с небольшим эксцентриситетом. В пакете программ «Движения космических тел» можно найти много подобных примеров необычайно сложного поведения систем, подчиняющихся простым и строгим физическим законам.

7.5 Планета со спутником – примеры моделирования

Моделирующая программа «Планета со спутником» позволяет изучить общий характер и многие особенности влияния звезды на движение спутников вокруг планеты.

7.5.1 Спутник на низкой почти круговой орбите

На рис. 7.1 показано в двух системах отсчета движение спутника по сравнительно низкой почти круговой орбите. Совпадающими цифрами отмечены одновременные положения планеты и спутника.

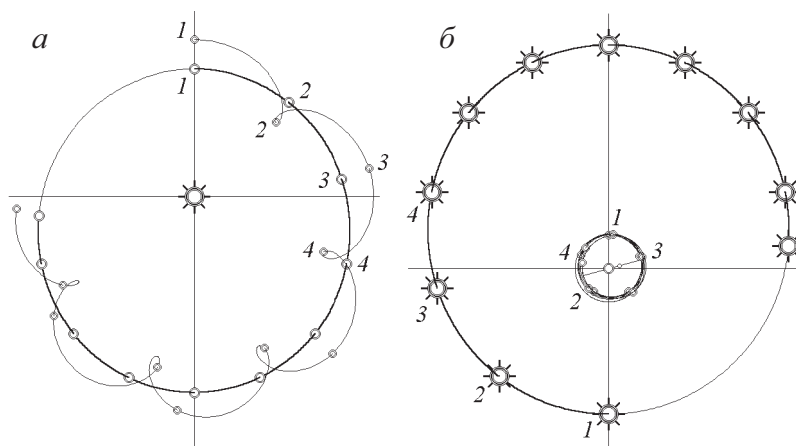


Рис. 7.1: Траектория спутника, обращающегося вокруг планеты, в гелиоцентрической (слева) и в геоцентрической (справа) системах отсчета. Одновременные положения небесных тел отмечены совпадающими цифрами.

Сложная петлеобразная или волнообразная траектория спутника в системе отсчета, связанной со звездой, объясняется сложением двух относительно простых движений: регулярного движения по большой окружности (или эллипсу) вместе с планетой вокруг звезды, и одновременного обращения вокруг планеты по малой окружности (или малому эллипсу). Правая часть рис. 7.1 ясно показывает, что геоцентрическое движение спутника действительно происходит по простой почти кеплеровой орбите, которая лишь слегка возмущается звездой. Мы видим, что влияние массивной звезды на орбитальное движение спутника относительно планеты гораздо менее существенно, чем влияние планеты на гелиоцентрическое движение спутника. В системе отсчета, связанной со звездой, у спутника вместо простой эллиптической орбиты получается сложная петлеобразная или волнообразная траектория.

Чтобы отчетливее выявить эти особенности, здесь для моделирования выбраны значения параметров, далекие от ситуации, характерной для реальных планетных систем: масса планеты составляет почти треть массы звезды, так что моделируемая ситуация скорее применима к движению внутренней планеты вокруг одной из компонент (с меньшей массой) двойной звезды. Впрочем, различие таких систем скорее количественное, чем качественное.

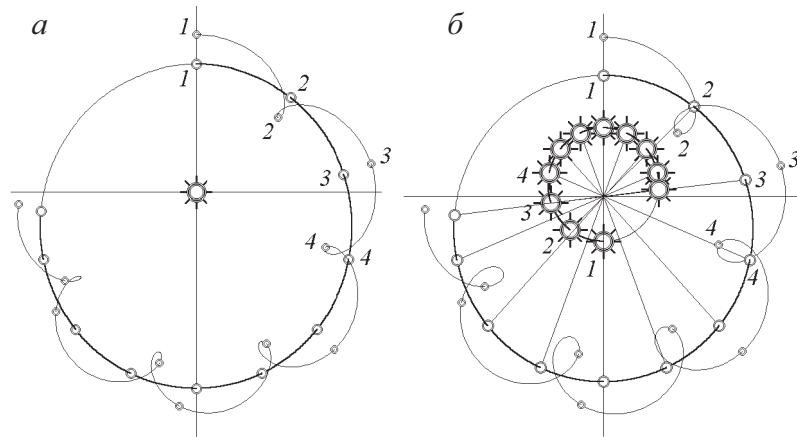


Рис. 7.2: Траектория спутника, обращающегося вокруг планеты, в гелиоцентрической системе отсчета (слева) и в инерциальной системе центра масс (справа). Одновременные положения небесных тел отмечены совпадающими цифрами.

Когда масса второго массивного тела сопоставима с массой наиболее тяжелого тела системы (в данном моделирующем эксперименте отношение масс равно $1/3$), «гелиоцентрическая» система отсчета неинерциальна. На рис. 7.2 то же самое движение показано как в гелиоцентрической системе отсчета, так и в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы. На правой части этого рисунка видно, что звезда и планета синхронно описывают геометрически подобные эллипсы с общим фокусом в центре масс системы, как это должно быть в соответствии с задачей двух тел. Петлеобразная траектория спутника планеты получается в результате сложения кеплерова движения планеты вокруг центра масс с движением спутника вокруг планеты.

7.5.2 «Космический баскетбол»

В рассмотренной выше ситуации движение легкого тела устойчиво в том смысле, что спутник обращается вокруг своего «хозяина» неограниченно долго. Однако в подобных системах трех тел возможны также неустойчивые движения. В зависимости от параметров системы и начальных условий, геоцентрическая орбита спутника может приближаться к границе сферы гравитационного действия планеты, где движение спутника будет сильно возмущаться полем тяготения звезды. Может случиться так, что после нескольких витков вокруг планеты поле тяготения звезды вырвет спутник из гравитационных «объятий» планеты, так что он превратится в независимую планету, обращающуюся вокруг звезды по почти кеплеровой гелиоцентрической орбите, лишь слегка возмущаемой планетой. Подобный случай показан на рис. 7.3, где изображено одно и то же движение легкого тела в «гелиоцентрической» и «геоцентрической» системах отсчета.

Может случиться так, что потерянный планетой спутник после нескольких независимых оборотов вокруг звезды будет снова «захвачен» планетой. На рис. 7.3 это возвращение спутника прежнему хозяину — своего рода «реституция» — происходит приблизительно через год (один оборот планеты вокруг звезды) независимого существования спутника. Аналогичная «перепасовка» спутником между планетой и звездой в таком

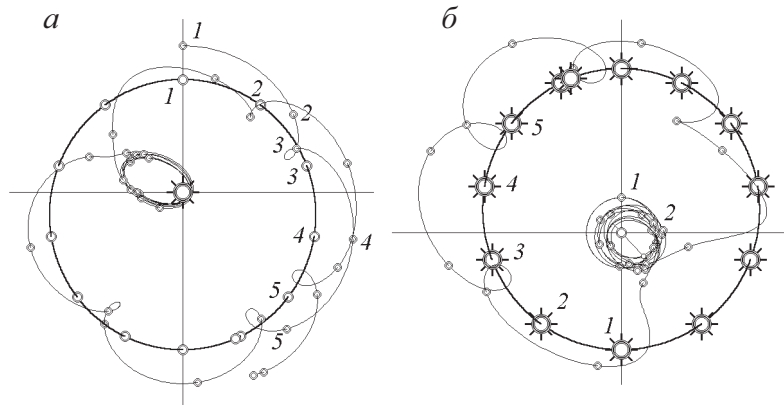


Рис. 7.3: Траектория спутника, поочередно обращающегося вокруг планеты и вокруг звезды. Слева движение показано в «гелиоцентрической» (связанной со звездой) системе отсчета, справа в «геоцентрической» (связанной с планетой) системе отсчета. Совпадающие цифры соответствуют одновременным положениям небесных тел.

«космическом баскетболе» может повторяться неоднократно. Эти «странствования» в конце концов заканчиваются падением спутника на планету или на звезду, или выбрасыванием спутника за пределы системы. Аналогично, внутренняя планета в системе двойной звезды может время от времени совершать переходы от обращения вокруг одной из компонент к другой и обратно. Моделирование таких ситуаций можно наблюдать с помощью программы «Планета со спутником», если выбрать соответствующие примеры из списка заранее заготовленных примеров. Несмотря на простые детерминистские физические законы, управляющие системой, ее долговременное поведение выглядит беспорядочным, хаотическим. Такие нерегулярности в движении связаны с высокой чувствительностью нелинейной физической системы к малым изменениям параметров и начальных условий.

Для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих хаотическое движение спутника, которое наблюдается в приведенных примерах, характерна чрезвычайно сильная чувствительность к начальным условиям: ничтожное изменение начального состояния может привести к радикальным изменениям в долговременном поведении системы. Небесная механика дает нам один из многочисленных примеров хаотических движений в физике. Как мы уже отмечали, отсутствие аналитических решений в подобных случаях отражает не столько бессилие математики, сколько возможную сложность движений в системах, описываемых нелинейными уравнениями.

7.5.3 Спутник с ретроградным обращением

Следующий рисунок 7.4 иллюстрирует интересную ситуацию обращения спутника вокруг планеты в направлении, противоположном обращению планеты вокруг звезды. Такое движение называют попятным или ретроградным, в противоположность прямому обращению. Для того, чтобы смоделировать попятное движение, нужно выбрать противоположное направление скорости спутника при задании начальных условий в геоцентрической системе отсчета. Узкий вытянутый эллипс на рис. 7.4 — это оскулирующая ор-

бита, по которой обращался бы спутник вокруг звезды в отсутствие планеты (при тех же значениях начального положения и гелиоцентрической начальной скорости).

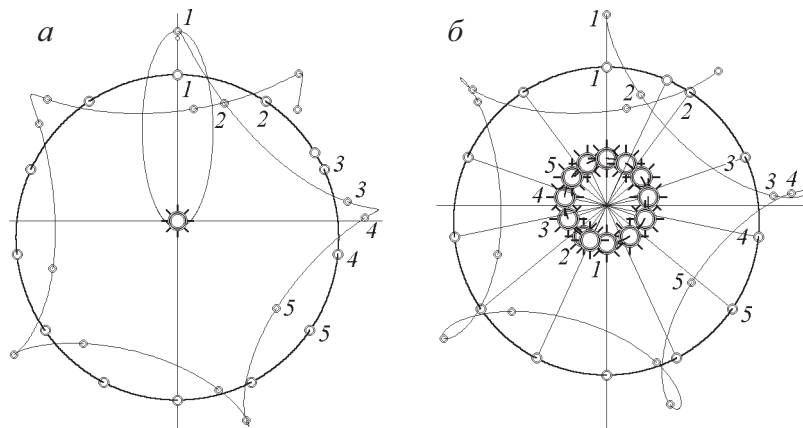


Рис. 7.4: Траектория спутника с ретроградным обращением вокруг планеты в гелиоцентрической системе отсчета (слева) и в инерциальной системе центра масс (справа). Одновременные положения небесных тел отмечены совпадающими цифрами.

Орбита спутника с ретроградным обращением более устойчива к возмущениям со стороны гравитационного поля звезды по сравнению с орбитой такого же радиуса с прямым обращением. Увеличение устойчивости объясняется большей скоростью спутника относительно звезды в области между звездой и планетой, где спутник ближе всего подходит к звезде. При большой скорости спутника уменьшается время его сближения со звездой, в течение которого влияние тяготения звезды на движение спутника наиболее значительно.

Рассмотренные примеры показывают, насколько сложным может быть движение в сравнительно простой системе всего трех взаимодействующих небесных тел. Следующие разделы дают еще много ярких примеров очень сложных движений в системе трех тел.

7.6 Точные частные решения задачи трех тел

Замечательно, что среди множества очень сложных, нерегулярных и чрезвычайно запутанных движений в системе трех тел есть небольшое подмножество поразительно простых регулярных движений, когда все тела системы совершают кеплеровы движения вдоль геометрически подобных конических сечений. Моделирующая программа «Планета со спутником» позволяет продемонстрировать такие движения, описываемые любопытными точными решениями ограниченной задачи трех тел. Ниже рассматриваются некоторые примеры моделирования таких движений.

7.6.1 Простое точное решение задачи трех тел

Когда массы «тяжелых» тел одинаковы, ограниченная задача трех тел имеет очевидное точное решение, в котором третье тело находится ровно посередине между двумя другими (т. е. в центре масс системы, см. рис. 7.5), и его скорость относительно центра масс

равна нулю. Поскольку в этой симметричной коллинеарной конфигурации силы тяготения, действующие на тело в центре со стороны двух других тел, равны и противоположны, т. е. уравнивают друг друга, то находящееся в центре масс неподвижное тело остается там неограниченно долго. Это заключение справедливо при произвольных движениях массивных тел, включая случаи, когда эти тела описывают эллиптические орбиты, для которых центр масс системы является общим фокусом (как показано на рис. 7.5).

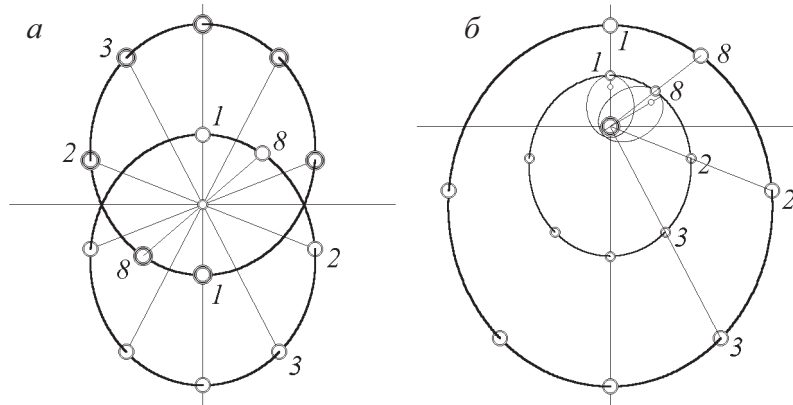


Рис. 7.5: Система трех тел, в которой два тела имеют одинаковые массы, а третье тело находится посередине между ними.

Более того, это частное решение существует даже для системы, у которой третье (находящееся посередине) тело имеет конечную массу, т. е. такое решение справедливо и для неограниченной задачи трех тел. Единственное отличие от рассматриваемого здесь случая заключается в том, что третье тело произвольной массы, находясь на полпути между двумя другими телами одинаковой массы, своим притяжением оказывает влияние на их движение: полная сила, приложенная к каждому из крайних тел в этой коллинеарной конфигурации, представляет собой сумму двух сил тяготения — одной со стороны второго симметричного партнера, и другой — со стороны центрального тела конечной массы. Но как легко показать, эта полная сила, действующая на каждое из крайних тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния от центрального тела. Поэтому в системе отсчета центра масс движение каждого из крайних тел в симметричной коллинеарной конфигурации будет кеплеровым, а среднее тело произвольной массы будет оставаться посередине между ними в покое в состоянии равновесия.

Хотя это точное решение не имеет практического значения, его существование принципиально интересно и заслуживает обсуждения.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на одном из крайних тел (т. е. в системе отсчета, связанной с этим телом, см. правую часть рис. 7.5), центральное тело описывает эллипс, геометрически подобный эллипсу, описываемому вторым партнером массивной пары. Линейные размеры этого эллипса вдвое меньше, чем у эллипса относительного движения массивных тел. Для такого наблюдателя второй партнер пары находится в состоянии перманентного затмения, так как центральное тело, двигаясь синхронно со вторым партнером симметричной пары, все время находится в середине отрезка, соединяющего парные тела. Еще два небольших тонких эллипса на правом рисунке соответствуют невозмущенным траекториям (для начального и конечного расположений тел в

данном моделировании), вдоль которых двигалось бы малое центральное тело при отсутствии второго партнера массивной пары.

Однако положение равновесия центрального тела (как и все это простое движение тел) неустойчиво. Если среднее тело чуть сместить из центра масс системы или сообщить ему сколь угодно малую скорость относительно центра масс, оно будет удаляться от центра с прогрессивно возрастающей скоростью.

Рисунок 7.6 иллюстрирует эту неустойчивость. В данном примере начальное расстояние центрального тела от первого из одинаковых массивных тел сделано немного большее, чем расстояние от второго. Центральное тело, начальная скорость которого относительно центра масс равна нулю, некоторое время остается в непосредственной близости от центра масс (как видно в левой части рис. 7.6, где показаны движения в системе отсчета центра масс системы). Однако вскоре центральное тело начинает двигаться по направлению ко второму (ближнему) массивному телу, вокруг которого оно в конце концов описывает нерегулярную орбиту, сильно возмущаемую первым массивным телом. В системе отсчета, связанной с первым массивным телом, центральное тело отклоняется от эллиптической орбиты, по которой он двигался бы в случае точного аналитического решения. Это отклонение становится заметным в положении, обозначенном цифрой 4 (после трех «месяцев» движения).

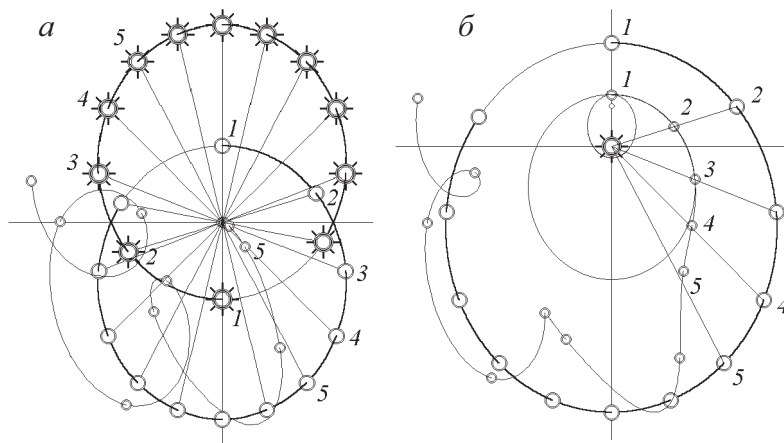


Рис. 7.6: Неустойчивость движения легкого тела (находящегося посередине между массивными телами равных масс), которое описывается точным частным решением ограниченной задачи трех тел.

7.6.2 Спутники в треугольных точках либрации

Круговая ограниченная задача трех тел имеет ряд интересных точных частных решений. Можно показать, что когда два массивных тела, связанные гравитационным взаимодействием, совершают круговые движения, существует пять точек, в которых легкое тело может находиться в равновесии в системе отсчета, вращающейся вместе с прямой, соединяющей массивные тела. Таким образом, вся система трех тел может сохранять неизменную конфигурацию, равномерно вращаясь в одной плоскости как единое твердое тело вокруг своего центра масс. Эти пять точек называют точками либрации или лагранжевы-

ми точками, так они были известны еще Лагранжу. Равновесие тела в точках либрации обеспечивается совместным действием сил тяготения со стороны массивных тел и центробежной силой инерции, обусловленной вращением связанной с массивными телами системы отсчета. Лагранжевы точные решения представляют некоторый практический интерес для космической динамики благодаря возможности (хотя бы принципиальной) запуска стационарного спутника в треугольные точки либрации системы Земля — Луна.

Три точки либрации расположены на прямой линии, проходящей через массивные тела. Их называют коллинеарными точками либрации. Две другие точки расположены в вершинах равносторонних треугольников, основанием для которых служит отрезок, соединяющий массивные тела. Их называют треугольными точками либрации.

Аналитическое доказательство существования треугольных точек либрации и численные расчеты положений коллинеарных точек приведены в Главе 15.2, р. 238. Здесь мы опишем моделирование, в которых проиллюстрированы эти необычные точные решения задачи трех тел.

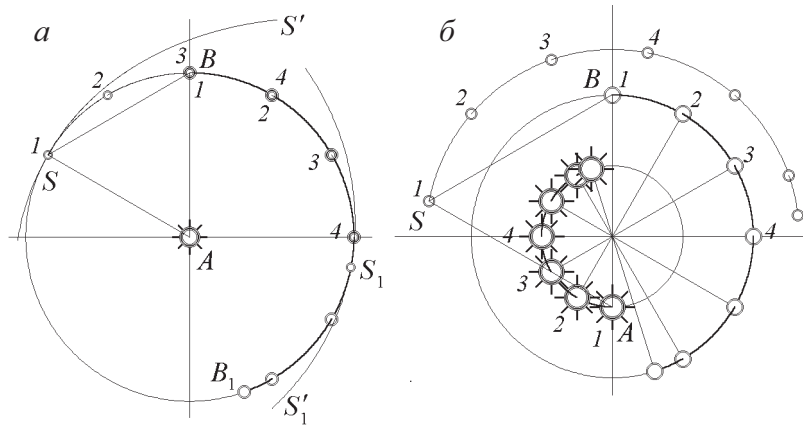


Рис. 7.7: Движение спутника в треугольной точке либрации.

Рисунок 7.7 иллюстрирует стационарное движение спутника в треугольной точке либрации для системы, в которой масса одного из тяжелых тел вдвое больше массы другого.

В начальной конфигурации (перед моделированием) три тела расположены в вершинах равностороннего треугольника BAS . В системе отсчета, связанной с телом A наибольшей массы (левая сторона рисунка), тело B движется по окружности с центром в A . Угловая скорость этого движения зависит от расстояния AB между телами и от масс этих тел.

Чтобы получить регулярное движение легкого тела в точке либрации, его начальную скорость нужно задать равной орбитальной скорости второго тела B . Если бы этого второго тела B не было, спутник S при такой начальной скорости двигался бы под действием только силы тяготения тела A вдоль эллиптической орбиты, ближний фокус которой находится в A , потому что эта начальная скорость больше, чем круговая скорость. Часть такой оскулирующей орбиты (невозмущенной вторым телом B) показана на левой части рисунка. Но действительное движение спутника S происходит вдоль той же самой круговой орбиты, по которой движется тело B . Доказательство приведено в разделе 15.2.1, стр. 238. Силы тяготения, действующие на спутник S со стороны обоих массивных тел, создают как раз такое центростремительное ускорение, какое необходимо для кругового

движения спутника S с той же угловой скоростью, что и у прямой AB . Поэтому начальная равносторонняя конфигурация системы остается неизменной во время движения. Если бы тело B внезапно исчезло в некоторый момент, то дальнейшее орбитальное движение спутника вокруг тела A происходило бы по эллипсу, касающемуся окружности в точке S , лежащей впереди B на 60 градусов (в этой точке находится перигей оскулирующего эллипса).

Таким образом, в системе отсчета, связанной с одним из массивных тел, например с телом A , два других тела обращаются (по часовой стрелке на рис. 7.7) вдоль одной и той же круговой орбиты, на которой одно из тел (спутник S на рис. 7.7) движется на 60 градусов впереди другого тела (B). Во второй треугольной точке либрации спутник двигался бы по той же круговой орбите, отставая от другого тела на 60 градусов. Движение тел в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, показано на правой части рис. 7.7. Равносторонний треугольник ABS , в вершинах которого находятся тела, равномерно вращается как целое (как твердое тело) около центра масс системы тел.

Движение спутника в треугольной точке либрации (или равновесие во вращающейся системе отсчета) устойчиво лишь тогда, когда отношение масс тяжелых тел достаточно мало ($m/M < 0,04$). Поскольку масса Земли приблизительно в 81,3 раза больше массы Луны (отношение масс $m/M = 0,0123$), для системы Земля – Луна эти точки устойчивы.

В Солнечной системе устойчивые треугольные точки либрации образованы совместным действием сил тяготения Солнца и наиболее массивной планеты — Юпитера. По наблюдениям астрономов, две группы астероидов (получившие названия «Греки» и «Троянцы») захвачены в окрестностях этих точек и движутся по орбите Юпитера, соответственно опережая его и отставая на 60 градусов.

Для гипотетической системы с $m/M = 1/3$, движение которой показано на рис. 7.7, треугольные точки либрации неустойчивы. Если спутник чуть-чуть сместить из точки неустойчивого равновесия, вскоре он начнет удаляться от нее. Регулярное движение, которое начиналось как твердотельное вращение всей системы вокруг центра масс, сменяется беспорядочным, хаотическим обращением спутника вокруг массивного тела A .

7.6.3 Коллинеарные точки либрации

Когда два массивных тела, связанные гравитационным взаимодействием, совершают круговые движения, на соединяющей их прямой существуют три точки, в которых третье тело пренебрежимо малой массы также может описывать круговую орбиту вокруг центра масс системы в той же плоскости и с той же угловой скоростью, что и массивные тела. Такие точки называют коллинеарными точками либрации (сравните с треугольными точками либрации).

Одна из коллинеарных точек либрации лежит между телами. Если массы тел равны ($m/M = 1$), эта точка находится точно в середине соединяющего тела отрезка, т. е. совпадает с центром масс системы. Этот частный случай уже обсуждался в разделе 7.6.1. Для системы с $m/M = 1/2$ (см. рис. 7.8) внутренняя точка либрации смещена из центра масс в направлении тела меньшей массы на 0,237 долей расстояния AB между телами. Расстояние этой точки от тела меньшей массы B равно приблизительно 0,43 AB , в то время как расстояние SB от тела большей массы равно 0,57 AB . Расчеты положения коллинеарных точек либрации приведены в разделе 15.2.2, стр. 240.

В этом положении приложенная к спутнику результирующая сила гравитационного притяжения телами A и B направлена к центру масс системы, а ее величина такова, что центростремительное ускорение спутника имеет значение, необходимое для движения по

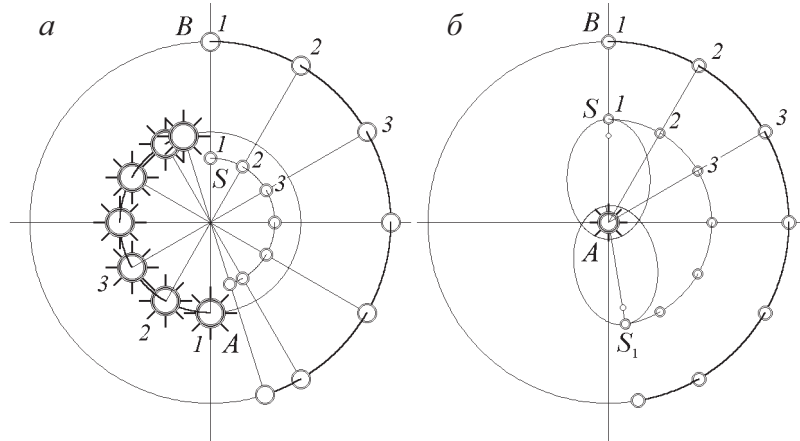


Рис. 7.8: Движение спутника во внутренней коллинеарной точке либрации.

окружности вокруг центра масс с той же самой угловой скоростью, с какой происходит равномерное вращение линии AB , соединяющей массивные тела.

Таким образом, при надлежащем образом заданной начальной скорости спутника, помещенного в эту точку, коллинеарная конфигурация трех тел системы сохраняется во время движения.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на теле большей массы A (см. правую часть рис. 7.8), менее массивное тело B , двигаясь вокруг A по круговой орбите, постоянно находится в состоянии затмения спутником S , поскольку видимое положение S всегда совпадает с B . Подобным же образом, наблюдатель на теле B воспринимает эту ситуацию как равномерное обращение спутника S вокруг своего тела B по круговой орбите радиуса $0,43 AB$. При этом видимое положение спутника перманентно совпадает с положением тела A , обращающегося вокруг B .

Эллипсы на правой половине рис. 7.8 показывают оскулирующие орбиты, по которым происходило бы дальнейшее движение спутника вокруг тела A при внезапном исчезновении тела B . Первый эллипс соответствует начальному моменту, второй — конечному моменту моделирования. Действительно, круговая скорость невозмущенного кругового движения вокруг тела A больше, чем круговая скорость действительного движения, в котором спутник подвержен также действию гравитационного притяжения телом B . Эта дополнительная сила уменьшает центростремительное ускорение спутника, и поэтому действительное движение спутника по окружности происходит с меньшей линейной скоростью.

Две другие коллинеарные точки либрации лежат на соединяющей массивные тела прямой за пределами отрезка AB . Для системы, в которой массы тяжелых тел равны, эти точки расположены симметрично на расстоянии $1,198 AB$ от центра масс, то есть на расстоянии $0,698 AB$ с внешней стороны от каждого из массивных тел (за пределами отрезка AB). Если масса тела B меньше массы A , одна из внешних точек либрации расположена ближе к телу B . При $m/M = 1/2$ ее расстояние от центра масс равно $1,249 AB$, так что эта точка либрации находится на расстоянии $0,582 AB$ от тела меньшей массы B . Противоположная коллинеарная точка либрации расположена на расстоянии $1,136 AB$ от центра масс, так что ее расстояние от тела большей массы A равно $0,803 AB$.

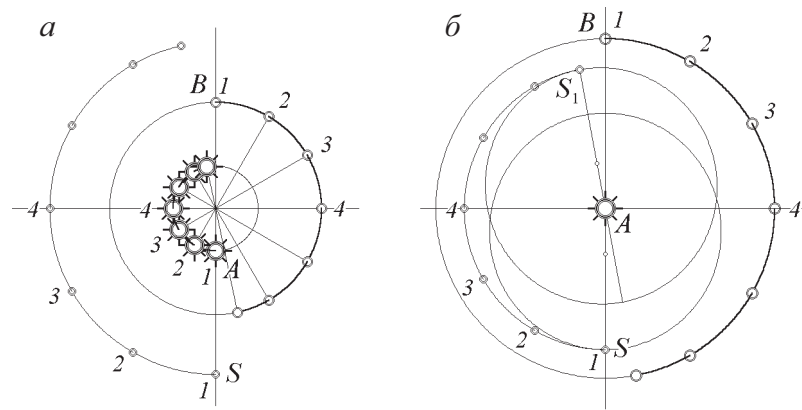


Рис. 7.9: Движение спутника во внешней коллинеарной точке либрации.

Движение системы двух массивных тел с легким спутником, помещенным во внешнюю коллинеарную точку либрации, показано на левой стороне рис. 7.9 (в системе отсчета центра масс). Суммарная сила притяжения к телам A и B сообщает спутнику ускорение, необходимое для движения по круговой орбите с той же угловой скоростью, с которой происходит взаимное обращение тел A и B .

Круговое движение спутника в этой коллинеарной точке либрации с точки зрения системы отсчета более массивного тела A показано на правой стороне рис. 7.9. Оскулирующие эллипсы, касающиеся круговой орбиты спутника в начальной точке и в последней точке моделирования — это траектории, по которым продолжалось бы движение спутника при внезапном исчезновении тела B в моменты, когда спутник проходит через эти точки.

На первый взгляд кажется странным, что присутствие тела B , которое создает дополнительную силу, направленную к центру, уменьшает центростремительное ускорение спутника вместо того, чтобы увеличивать его. Однако нужно иметь в виду, что здесь движение отнесено к неинерциальной системе отсчета, связанной с телом A . Поле тяготения, создаваемое телом B , сообщает ускорение не только спутнику, но даже большее по величине ускорение оно сообщает телу A и тем самым всей системе отсчета, связанной с телом A . Поэтому присутствие второго массивного тела B , как ни странно, уменьшает (а не увеличивает) ускорение спутника в его движении относительно тела A .

Для системы Земля — Луна расстояние внутренней точки либрации от Луны равно приблизительно 58 000 км, что составляет 0,15 среднего расстояния AB между Землей и Луной (384 000 км). Расстояние внешней точки либрации от Луны равно 65 000 км, или 0,17 AB . Третья коллинеарная точка лежит на противоположной (по отношению к Луне) стороне Земли. Ее расстояние от Земли равно 380 600 км, или 0,993 AB .

Движение спутника в любой из коллинеарных точек либрации, как и равновесие в этих точках во вращающейся системе отсчета, неустойчиво при любом соотношении масс тяжелых тел. Рисунок 7.10 иллюстрирует неустойчивость внешней точки. Показано движение в системе отсчета, связанной с телом большей массы E . Начальное положение спутника выбрано вблизи внешней точки либрации. Если бы меньшего тела M не было, в поле тяготения тела E спутник двигался бы вдоль оскулирующего эллипса, касающегося действительной круговой орбиты в начальной точке S . Дополнительная сила тяготения

со стороны тела M заставляет спутник двигаться по круговой орбите.

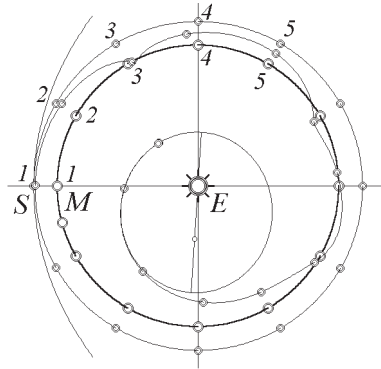


Рис. 7.10: Неустойчивость движения спутника во внешней коллинеарной точке либрации.

Однако спутник движется в непосредственной близости к точке либрации (при данном начальном отклонении от точки либрации) лишь на протяжении приблизительно одного оборота. В начале второго витка он уходит из окрестности точки либрации и становится спутником тела M . Его орбитальное движение вокруг M испытывает сильные возмущения со стороны тела E . После совершения нескольких витков по орбите вокруг M гравитационное поле тела E вырывает спутник из «объятий» тела M , и он становится спутником тела E . Его почти замкнутая орбита вокруг E в свою очередь испытывает сильные возмущения со стороны тела M .

7.6.4 Точки либрации и эллиптические движения

Точные частные решения задачи трех тел могут описывать не только круговые движения, как в рассмотренных выше примерах. Когда два массивных тела движутся вокруг центра масс, синхронно описывая геометрически подобные эллиптические орбиты, третье тело пренебрежимо малой массы, будучи помещенным в одну из пяти лагранжевых точек либрации, тоже может двигаться по замкнутой эллиптической орбите синхронно с массивными телами, если только сообщить ему необходимую для этого начальную скорость. Во время таких периодических движений расстояния между телами системы подвержены периодическим вариациям. Все три тела при этом описывают геометрически подобные эллиптические орбиты с общим фокусом в центре масс системы. Программа «Планета со спутником» позволяет наблюдать моделирование таких необычных движений.

На рис. 7.11 показаны периодические движения трех тел, описываемые точным частным решением, в котором спутник S находится в вершине равностороннего треугольника ABS , основание которого образовано отрезком AB , соединяющим массивные тела A и B . Левая часть рисунка соответствует инерциальной системе отсчета центра масс, в которой все три тела системы синхронно описывают геометрически подобные эллиптические орбиты. Правая часть показывает движения спутника S и тела B в (неинерциальной) системе отсчета, связанной с наиболее массивным телом A .

Такая равносторонняя конфигурация системы сохраняется во время движения, т. е. спутник все время находится в треугольной точке либрации системы тел A и B . Однако, в противоположность случаю круговых движений, на этот раз образованный телами

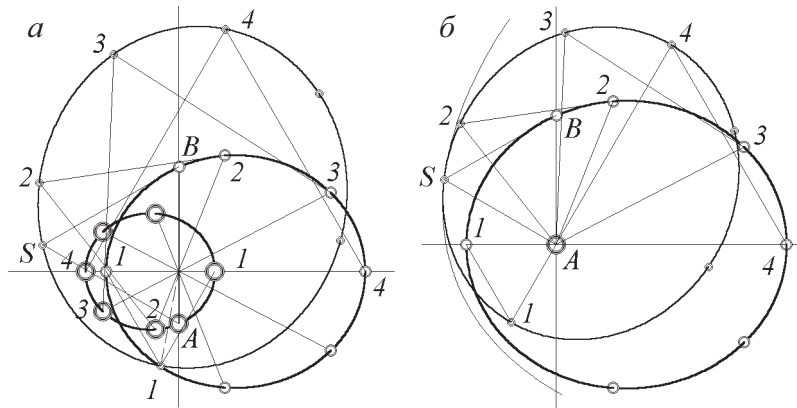


Рис. 7.11: Периодические эллиптические движения тел, описываемые точным частным решением ограниченной задачи трех тел со спутником (телом пренебрежимо малой массы) в треугольной точке либрации.

треугольник вращается неравномерно вместе с отрезком AB , соединяющим тела A и B . Поведение тел A и B и этого отрезка описывается хорошо известным решением задачи двух тел. Действительно, третье тело пренебрежимо малой массы не оказывает никакого влияния на движение двух массивных тел. Поэтому и здесь стороны образованного тремя телами равностороннего треугольника периодически изменяются, как это происходит с расстоянием между телами в задаче двух тел. Большая ось эллиптической орбиты спутника образует некоторый угол с большими осями эллипсов, по которым движутся тела A и B . Все три тела одновременно проходят через соответствующие точки своих эллиптических орбит. В точках, соответствующих началу моделирования (помеченных как A , B и S на рисунке), тела находятся на кратчайших расстояниях от центра масс системы, а их угловая скорость (одинаковая для всех тел) наибольшая. Когда тела проходят через наиболее удаленные точки своих орбит, стороны образуемого ими треугольника имеют максимальную длину, а угловая скорость его вращения минимальна.

В системе отсчета, связанной с телом A (правая часть рис. 7.11), тело B и спутник S движутся по конгруэнтным эллипсам вокруг тела A . Большая ось эллипса, описываемого спутником S , образует угол 60 градусов с большой осью эллипса, описываемого телом B . Если бы тело B внезапно исчезло, спутник сошел бы со своей эллиптической орбиты и начиная с этого момента стал бы двигаться по более крупному оскулирующему эллипсу.

Движение, описываемое рассмотренным точным частным решением задачи трех тел, неустойчиво. Спутник движется некоторое время в окрестности треугольной точки либрации (продолжительность этого регулярного движения зависит от той точности, с которой были введены необходимые для моделирования начальные условия), а затем начинает беспорядочно обращаться вокруг одного из массивных тел. Это движение спутника сильно возмущается другим телом. В конце концов он падает на одно из массивных тел или оказывается выброшенным из системы.

Движение спутника во внутренней лагранжевой точке либрации, когда в своем орбитальном движении массивные тела описывают эллиптические траектории, показано на рис. 7.12. В этом движении легкий спутник все время остается между массивными телами на соединяющем их отрезке. Прямолинейный отрезок, на котором лежат все три тела,

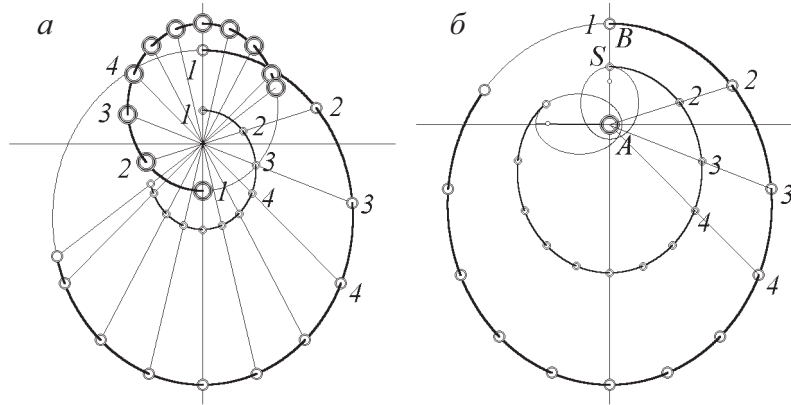


Рис. 7.12: Периодические эллиптические движения тел, описываемые точным частным решением ограниченной задачи трех тел со спутником (телом пренебрежимо малой массы) во внутренней коллинеарной точке либрации.

неравномерно вращается, когда массивные тела движутся по своим эллиптическим орбитам, как должно быть в задаче двух тел. Положение спутника делит отрезок на две части в постоянном отношении, поэтому спутник движется по эллипсу, геометрически подобному эллипсам, описываемым массивными телами.

Положение внутренней точки либрации между массивными телами зависит от отношения масс этих тел точно так же, как и для ограниченной круговой задачи трех тел. Например, для системы, в которой масса тела A ровно вдвое превышает массу тела B , внутренняя точка либрации смещена из центра масс системы по направлению к легкому телу B приблизительно на $0,237$ расстояния AB между телами. Ее расстояние от более легкого тела B равно приблизительно $0,43 AB$, а расстояние SA от наиболее массивного тела A равно $0,57 AB$.

Расчеты положения внутренних и внешних коллинеарных точек либрации приведены в разделе 15.2.2, стр. 240.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на теле наибольшей массы A (см. правую часть рисунка), небесное тело меньшей массы B , двигаясь вокруг тела A по эллиптической орбите, находится в состоянии перманентного затмения спутником S , поскольку видимое положение спутника S всегда совпадает с положением тела B . Небольшие эллипсы на левой части рисунка показывают оскулирующие орбиты, по которым спутник стал бы двигаться вокруг тела A , если бы тело B внезапно исчезло. Первый эллипс соответствует начальному моменту, второй — конечному моменту моделирования.

Движение спутника в любой из коллинеарных точек либрации всегда неустойчиво. Спутник движется некоторое время в окрестности точки либрации (продолжительность этого регулярного движения зависит от той точности, с которой были введены необходимые для моделирования начальные условия), а затем регулярное движение неизбежно переходит в хаотическое, при котором спутник начинает беспорядочно обращаться вокруг одного из массивных тел. Это движение спутника сильно возмущается другим телом. В конце концов он падает на одно из массивных тел или оказывается выброшенным из системы.

Контрольные вопросы

1. **Законы Кеплера и движение спутников.** В какой мере законы Кеплера применимы к движениям спутников планет? Ведь кроме силы тяготения планеты, на спутник действует сила солнечного тяготения, которая может быть сравнима с силой тяготения планеты. Например, сила притяжения Солнцем нашего естественного спутника Луны превосходит силу притяжения Луны Землей. Почему же мы считаем, что Луна обращается вокруг Земли?
2. **Освобождение спутника и сохранение энергии.** Пусть начальные условия выбраны таким образом, что после нескольких оборотов вокруг планеты спутник оказывается выброшенным за пределы системы звезда планета, т.е. удаляется от системы на бесконечно большое расстояние, преодолевая силы тяготения сначала планеты, а затем и звезды. Откуда и каким образом спутник может получить необходимую для этого энергию?
3. **Спутники с прямым и обратным обращением.** В каком случае, при прочих равных условиях, обращающийся вокруг планеты спутник будет испытывать более значительные гравитационные возмущения со стороны звезды если обращение спутника вокруг планеты происходит в ту же сторону, что и обращение планеты вокруг звезды, или в противоположную сторону? Почему? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте на компьютере.
4. **Обратимость механического движения.** В общем случае движение спутника в системе звезда планета может быть очень сложным. Например, после нескольких оборотов спутника вокруг планеты возможна его потеря планетой: спутник начнет обращаться вокруг звезды как самостоятельная планета. Через некоторое время планета может вернуть себе утраченный спутник, затем снова его потерять. Такого рода движения представляют собой примеры так называемого динамического хаоса, когда долговременное поведение системы становится практически непредсказуемым (несмотря на механический детерминизм) из-за неустойчивости движения, проявляющейся в чрезвычайной чувствительности движения системы к малейшим изменениям параметров и/или начальных условий. Тем не менее, любое движение такой системы обратимо во времени: если в произвольный момент времени скорости всех трех тел одновременно обратить (заменить на противоположные), третье тело будет в точности следовать в обратном направлении вдоль сколь угодно сложной и запутанной траектории. С каким свойством системы связана обратимость ее движения во времени?
5. **Точные частные решения ограниченной задачи трех тел.** При каких условиях тело пренебрежимо малой массы (спутник) в системе звезда — массивная планета может совершать периодическое движение вокруг звезды с тем же периодом, что и планета? Приведите физическое объяснение возможности существования таких периодических движений малого тела под действием сил тяготения со стороны двух массивных тел.

7.7 Космический полет над обратной стороной Луны

Расчет траектории космического полета на Луну является еще одним примером ограниченной задачи трех тел. Как уже упоминалось выше, проблема не имеет точного ана-

литического решения, но приближенные решения можно получить методом сопряженных конических сечений, о котором уже говорилось в разделе 7.4. Основная идея метода заключается в том, чтобы игнорировать влияние Луны, пока космический аппарат не пересекает границу области гравитационного действия Луны (количественный расчет размера сферы гравитационного действия Луны приведен в разделе 15.4).

Другими словами, сначала мы рассматриваем движение космического аппарата в геоцентрической системе отсчета как невозмущенное кеплерово движение в гравитационном поле Земли. После того, как космический аппарат пересечет сферу гравитационного действия Луны, мы будем рассматривать его движение в неинерциальной системе отсчета, связанной с Луной (в селеноцентрической системе), и будем считать, что это движение происходит только под действием гравитационного поля Луны. На границе сферы гравитационного действия Луны мы должны пересчитать координаты и скорость космического аппарата от одной системы отсчета к другой.

Таким образом, задача трех тел сводится к двум задачам двух тел, для которых доступны точные аналитические решения. Этот простой метод оказался очень полезным для предварительного исследования возможных траекторий космических экспедиций. Его надежность была доказана с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

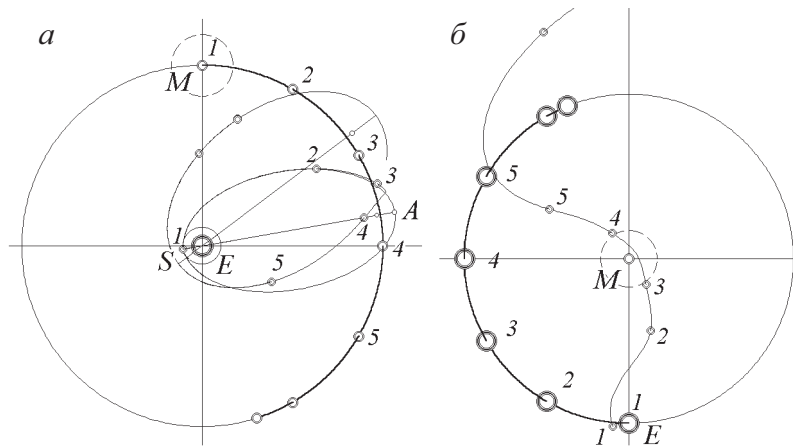


Рис. 7.13: Космический полет над обратной стороной Луны.

Для имитации космического полета на Луну можно использовать программу «Планета со спутником». Будем считать Землю бóльшим из двух массивных тел («звездой») и Луну — меньшим («планетой»). Пусть космический аппарат изначально движется вблизи Земли по круговой орбите, радиус которой, скажем, равен одной десятой расстояния между Землей E и Луной M (рис. 7.13). Чтобы космический аппарат достиг орбиты Луны, мы должны увеличить его скорость. Используя бортовой ракетный двигатель, направим его тягу по касательной к круговой орбите, вдоль орбитальной скорости. В результате аппарат переходит на новую эллиптическую орбиту, перигей которой находится в начальной точке S . В этой точке эллипс касается начальной круговой орбиты.

Если мы планируем получить, скажем, фотографию обратной стороны Луны с помощью нашего автоматического космического аппарата, апогей A этого невозмущенного эллипса должен быть несколько выше, чем орбита Луны.

Простой расчет, основанный на законах сохранения энергии и момента импульса для движения в ньютоновском гравитационном поле Земли (см раздел 10.6, стр. 181) показывает, что требуемая скорость в перигее (в начальной точке I эллиптической траектории) должна быть примерно в 4,26 раза больше, чем орбитальная скорость Луны (в случае исходной круговой орбиты, радиус которой равен 0,1 расстояния от Земли до Луны).

Космический аппарат должен достичь апогея эллиптической орбиты в нужный момент времени, а именно одновременно с прибытием Луны в то же самое положение. Это означает, что радиус, проведенный к исходной точке I перехода на эллиптическую орбиту, должен составлять определенный угол с линией Земля – Луна (около 100 градусов в направлении, противоположном направлению орбитального движения).

Левая сторона рис. 7.13 показывает невозмущенную эллиптическую орбиту (тонкая линия) космического аппарата в геоцентрической системе отсчета. Перигей находится в начальной точке S , и апогей A лежит чуть дальше орбиты Луны. Фактическая траектория получена путем численного интегрирования уравнений движения, которые включают силы тяготения как Земли, так и Луны. Одновременные положения космического аппарата и Луны обозначены одинаковыми цифрами.

Геоцентрическая скорость космического аппарата вблизи апогея A эллиптической орбиты меньше орбитальной скорости Луны. Луна в своем орбитальном движении обгоняет космический корабль и продвигается вперед под ним. Движение корабля над обратной стороной Луны — попятное (ретроградное): относительно поверхности Луны он движется назад, противоположно орбитальной скорости Луны.

Мы видим, что практически для всего путешествия в сторону орбиты Луны фактическая траектория космического аппарата почти совпадает с невозмущенной оскулирующей кеплеровой орбитой. Но в непосредственной близости к Луне эти две траектории заметно расходятся.

Фактическая траектория не достигает апогея A оскулирующего эллипса и резко изгибается между положениями 3 и 4 на рис. 7.13. Очевидно, что это расхождение двух траекторий вызвано тяготением Луны, которое не учитывается в оскулирующем эллипсе.

Правая сторона рис. 7.13 показывает движение космического аппарата и Земли в селеноцентрической (связанной с Луной) системе отсчета. Отметим еще раз ретроградный характер движения космического аппарата над обратной стороной Луны.

Пунктирная линия вокруг Луны показывает границу сферы гравитационного действия Луны относительно Земли. Космический аппарат входит в эту сферу (вблизи точки 3) с гиперболической селеноцентрической скоростью, и покидает сферу (вблизи точки 4) со скоростью, которая имеет такую же величину, но другое направление. Направление селеноцентрической скорости космического аппарата изменяется главным образом под действием гравитационного притяжения Луны.

После того, как космический аппарат покинет сферу гравитационного действия Луны, его дальнейшее движение в геоцентрической системе отсчета можно снова считать с большой точностью почти невозмущенным кеплеровым движением.

Фактическая траектория космического аппарата, полученная в результате моделирования, практически совпадает с новым оскулирующим эллипсом (большой эллипс в левой части рис. 7.13). Переход от прежнего оскулирующего эллипса к новому оскулирующему эллипсу вызывается притяжением Луны и происходит в то время, когда космический корабль движется в пределах сферы гравитационного действия Луны.

7.8 Возмущения орбиты спутника под действием Луны

Гравитационное поле Луны ускоряет как спутник на околоземной орбите, так и саму Землю. Эти ускорения почти равны, если спутник находится недалеко от Земли. Поэтому лунные возмущения орбиты спутника в его геоцентрическом движении вызваны не самим по себе гравитационным полем Луны, а скорее неоднородностью этого поля на расстояниях, равных примерно размерам орбиты спутника. Разница между фактическим ускорением спутника и ускорением, которое он имел бы в отсутствие Луны, называется в данном случае лунным возмущением ускорения спутника.

На поверхности Земли именно эта неравномерность гравитационного поля Луны (и в меньшей степени Солнца) приводит к образованию океанских приливов и отливов. Так как гравитационное поле небесного тела (скажем, Луны) ускоряет Землю и тела на ее поверхности почти одинаково, имеет значение только *разность сил тяготения* небесного тела, действующих на расположенные в разных местах земные тела. Эта дифференциальная гравитационная сила, т. е. разность сил тяготения, называется *приливной силой*. В отличие от полной силы тяготения небесного тела, приливная сила уменьшается как куб, а не квадрат расстояния до небесного тела, которое вызывает эту силу (более подробная информация о приливах и отливах приведена в Главе 16, стр. 251).

Есть несколько других ситуаций в Солнечной системе, в которых играют роль приливные силы. Эти силы приводят к так называемому пределу Роша — самому близкому расстоянию, на которое (естественный) спутник может приблизиться к планете без того, чтобы не быть разорванным приливными силами. В своей простейшей форме предел Роша определяется как расстояние от массивного тела (планеты), на котором приливная сила, создаваемая массивным телом, превысит силу самогравитации меньшего тела (спутника).

Спутник на орбите вокруг Земли также возмущается приливными силами. Лунные гравитационные возмущения тем сильнее, чем больше размер орбиты спутника. Направление ускорения, обусловленного этими возмущениями, зависит от положения спутника относительно Земли и Луны. Если спутник находится непосредственно между Луной и Землей, ускорение от этого возмущения направлено в сторону от Земли к Луне, потому что здесь вызываемое Луной ускорение спутника больше, чем вызываемое Луной ускорение Земли. (Тем не менее, результирующее ускорение спутника направлено к Земле.) На противоположной стороне Земли вызываемое Луной ускорение спутника направлено в сторону как от Луны, так и от Земли, потому что здесь вызываемое Луной ускорение спутника меньше, чем ускорение Земли. (Но, как и раньше, полное ускорение спутника направлено к Земле.)

Когда радиус-вектор спутника образует прямой угол с линией Земля — Луна и, следовательно, спутник находится примерно на том же расстоянии от Луны, как и Земля, приливное ускорение направлено к Земле. Так получается потому, что вызываемые Луной ускорения Земли и спутника, будучи почти равными по величине, имеют немного разные направления. Векторная разность между этими ускорениями — это небольшое ускорение, направленное к Земле. Происхождение приливных сил более подробно обсуждается в разделе 16, стр. 251.

Программа «Планета со спутником» позволяет имитировать лунные гравитационные возмущения орбиты спутника. Как и в предыдущем разделе, пусть Земля будет «звездой» и Луна будет «планетой». Рисунок 7.14 показывает орбиту спутника в геоцентрической (земной) системе отсчета. Первоначально спутник *S* запущен из точки *I* на круговую орбиту (показанную пунктирной линией на рисунке) вокруг Земли *E*, которая почти дости-

гает сферы гравитационного действия Луны M . Гравитационные возмущения со стороны Луны вызывают наблюдаемые отклонения фактической траектории спутника от оскулирующей невозмущенной орбиты. Когда спутник входит в окрестность точек 2 – 3, Луна находится на противоположной (левой) стороне Земли. При этом приливное ускорение направлено вправо, и результирующее геоцентрическое ускорение оказывается недостаточным для того, чтобы удерживать спутник на исходной круговой орбите. Фактическая орбита спутника отклоняется от невозмущенной круговой. Оскулирующая орбита становится эллипсом.

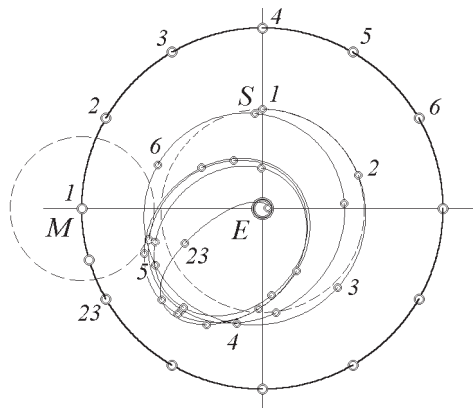


Рис. 7.14: Лунные гравитационные возмущения сравнительно большой (первоначально круговой) орбиты спутника Земли.

При дальнейшем движении возмущения влияют в первую очередь на апогей орбиты спутника, так как там лунные возмущения сильнее из-за большего расстояния от Земли. Кроме того, в апогее орбитальная скорость спутника наименьшая, так что здесь лунные возмущения оказывают большее влияние на орбиту, чем в других точках орбиты. Влияние возмущающего приливного ускорения на апогей орбиты сказывается сильнее, если это ускорение направлено параллельно или антипараллельно орбитальной скорости спутника. То есть, эффект выражен сильнее, когда большая ось оскулирующего эллипса ориентирована не вдоль линии Земля – Луна и не перпендикулярно к ней.

Лунные гравитационные возмущения могут вызвать значительные изменения орбиты спутника, вплоть до его уничтожения (падения на Землю). Орбиты, полученные в моделировании, показанном на рисунке 7.14, постепенно становятся настолько хаотичными от лунных возмущений, что спутник в конечном счете врежется в Землю. Чтобы сделать эффект гравитационных возмущений более очевидным, масса «Луны» в этом моделировании выбрана в несколько раз больше, чем у реальной Луны.

7.9 Космическое путешествие к удаленной планете и обратно

Есть множество подходящих траекторий для космического путешествия с Земли на какую-либо другую планету Солнечной системы. Эти траектории различаются по форме и продолжительности путешествия, по энергетическим затратам (или, что то же самое,

по величине требуемой начальной скорости космического аппарата), а также по требованиям к системам навигации и управления. Эти факторы не равноценны. Их роль существенно зависит от целей экспедиции. Потребности автоматического исследовательского аппарата и пилотируемого межпланетного корабля сильно отличаются.

Для проектирования подходящих траекторий можно использовать приближенный метод сопряженных конических сечений, идея которого изложена в разделе 7.4, а количественные расчеты размера сферы гравитационного действия приведены в разделе 15.4). Разделим всю траекторию пассивного полета к удаленной планете и обратно в гравитационных полях Земли, Солнца и планеты на несколько частей:

1. От точки, в которой выключается двигатель ракеты (несколько сотен километров над Землей) до границы области гравитационного действия Земли;
2. От этой границы до границы сферы гравитационного действия планеты-цели. Можно считать, что на протяжении этой части космический аппарат находится под гравитационным воздействием только Солнца;
3. В пределах сферы гравитационного действия планеты-цели;
4. Обратный путь от точки выхода из сферы гравитационного действия планеты до границы сферы гравитационного действия Земли;
5. Внутри сферы гравитационного действия Земли от границы сферы до верхних слоев атмосферы.

Предполагается, что в течение первого этапа космического рейса космический аппарат подвержен только гравитации Земли; в течение второго только гравитации Солнца; в течение третьего только гравитации планеты-цели, и так далее. Для каждого из этапов мы используем соответствующую систему отсчета: геоцентрическую систему для первого этапа, гелиоцентрическую систему для второго, систему отсчета целевой планеты (планетоцентрическую систему отсчета) для третьего этапа, и снова гелиоцентрическую систему отсчета на четвертом этапе.

На границах областей мы делаем переход в наших расчетах от одной системы отсчета к другой, складывая векторы соответствующих скоростей. То есть, чтобы получить скорость космического аппарата относительно новой системы отсчета, в которую он входит, мы складываем векторно скорость космического аппарата относительно старой системы отсчета, которую он покидает, со скоростью старой системы относительно системы отсчета, в которую он входит. Конечно, в космическом пространстве нет фактических непроницаемых границ для гравитационных полей. Метод сопряженных конических сечений является только приближением, и его результаты должны быть подтверждены прямым численным интегрированием уравнений движения.

Массивные внешние планеты (от Юпитера до Нептуна) имеют почти круговые орбиты больших радиусов: 5,2 астрономических единиц (средних расстояний земля – Солнце) для Юпитера, 9,5 для Сатурна, 19 для Урана, и 30 для Нептуна. Их сферы гравитационного действия имеют большие размеры (для Юпитера сфера действия более чем в пятьдесят раз больше, чем для Земли) из-за их большой массы и больших расстояний от Солнца. С помощью программы «Планета со спутником» мы можем моделировать космическое путешествие к какой-то внешней планете Солнечной системы (к Юпитеру или Сатурну), полагая, что в программе большее из массивных тел («звезда») — это Солнце, меньшее — это планета-цель, а спутник (тело нулевой массы) — это космический аппарат.

Примем для моделирования такого космического путешествия, что радиус орбиты планеты-цели, например, в десять раз больше радиуса орбиты Земли. На фоне такого большого расстояния можно пренебречь размерами сферы гравитационного действия

Земли (радиус этой сферы в 150 раз меньше среднего расстояния от Земли до Солнца). Поэтому с помощью программы «Планета со спутником» мы можем смоделировать второй и третий этапы космического путешествия к далекой массивной планете и обратно (включая участки траектории практически в непосредственной близости от Земли), как в проблеме трех тел. Для этого мы должны при моделировании ввести в качестве начального состояния космического аппарата его гелиоцентрическое положение и скорость не вблизи Земли, а сразу на границе сферы гравитационного действия Земли. Иначе говоря, в качестве начальных условий для моделирования мы принимаем тот момент, когда космический корабль покидает эту сферу.

Начальное расстояние космического аппарата от Солнца можно принять равным радиусу орбиты Земли. Для оценки требуемой начальной скорости можно пренебречь гравитационным притяжением космического аппарата к планете-цели. Афелий эллиптической гелиоцентрической орбиты космического аппарата должен достигать круговой орбиты планеты. Минимально необходимая характеристическая скорость космического аппарата соответствует полуэллиптическому переходу (гомановскому переходу) с орбиты Земли. Для такого перехода дополнительная скорость космического аппарата должна быть направлена вперед — по касательной к орбитальной скорости Земли.

Расчет, основанный на законах сохранения энергии и момента импульса для движения в ньютоновском гравитационном поле Солнца (см раздел 10.6, стр. 181) показывает, что космический аппарат должен покинуть сферу гравитационного действия Земли с гелиоцентрической скоростью, примерно в 4,26 раза большей, чем орбитальная скорость целевой планеты, орбита которой в десять раз больше, чем у Земли.

Когда целью должна быть внешняя планета, очень важным фактором является выбор момента времени для старта. Космический аппарат должен достичь афелия своей гелиоцентрической траектории одновременно с целевой планетой, а именно тогда, когда планета в своем круговом орбитальном движении приближается к этому афелию. Поэтому угловое положение точки начала пути от орбиты Земли должно быть определено надлежащим образом. Мы можем сделать это путем расчета продолжительности движения космического аппарата вдоль полуэллиптической траектории с помощью третьего закона Кеплера.

Принимая во внимание расстояние, которое целевая планета покрывает в течение этого времени, мы находим, что отправная точка космического аппарата в момент начала движения должна иметь угловое положение приблизительно на 100 градусов позади углового положения планеты-мишени. Вводя эти начальные значения в моделирующем эксперименте, мы можем ожидать, что космический аппарат достигнет сферы гравитационного действия целевой планеты. Затем, путем проб и ошибок, мы можем найти уточненные начальные условия, которые обеспечивают желаемую траекторию.

Приближаясь к афелию своей гелиоцентрической траектории, космический аппарат, хотя и движется в одном направлении с планетой-целью, движется гораздо медленнее планеты (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Планета обгоняет космический корабль, и корабль входит в сферу гравитационного действия планеты с передней стороны от планеты. В планетоцентрической системе отсчета скорость, с которой космический аппарат попадает в сферу гравитационного действия планеты, больше, чем параболическая скорость, которая соответствует гравитационному полю планеты на границе сферы ее действия. Так будет для всех планет Солнечной системы и всех возможных полуэллиптических переходных траекторий. Поэтому планетоцентрическая траектория космического аппарата в сфере гравитационного действия целевой планеты всегда будет гиперболой.

Это означает, что после того, как космический аппарат войдет в сферу действия целевой планеты, он неизбежно должен покинуть сферу, если только он не попадает в планету или, по крайней мере, в ее атмосферу. В планетоцентрической системе отсчета выходная скорость имеет ту же величину, что и скорость входа, но направлена выходная скорость вдоль другой асимптоты гиперболы. Чтобы найти гелиоцентрическую скорость, с которой аппарат выходит из сферы действия планеты, мы должны добавить к его планетоцентрической скорости вектор орбитальной скорости планеты. Результирующая скорость выхода, как правило, отличается от скорости входа как по направлению, так и по величине. Эта скорость определяет дальнейшее гелиоцентрическое движение космического аппарата. Если космический аппарат должен вернуться в непосредственную близость Земли, мы должны все планировать так, чтобы эта новая гелиоцентрическая траектория касалась орбиты Земли или пересекала ее.

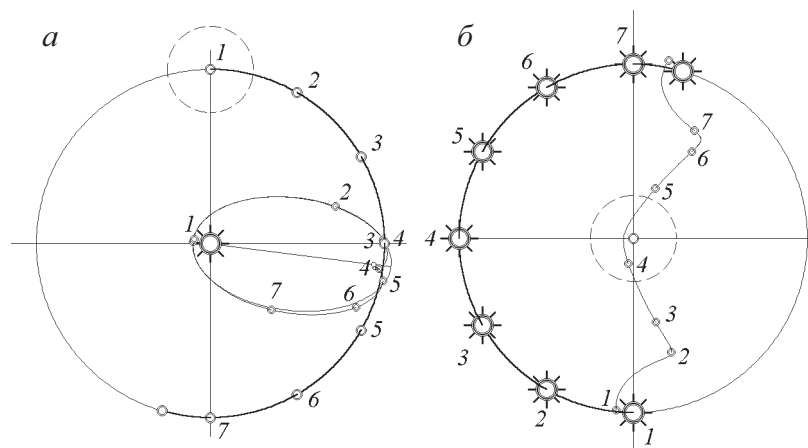


Рис. 7.15: Космическое путешествие к удаленной планете и обратно.

Рисунок 7.15 показывает траекторию космического путешествия как в гелиоцентрической системе отсчета, так и в системе отсчета, связанной с целевой планетой. Для того, чтобы сделать особенности движения в области гравитационного действия планеты более очевидными, мы выбрали преувеличенное значение для массы планеты (3% от массы Солнца) и, следовательно, преувеличенное значение радиуса сферы действия, границы которой показаны штриховыми окружностями на рис. 7.15. Одновременные положения космического аппарата, целевой планеты и Солнца отмечены одинаковыми цифрами. Космический корабль покидает сферу гравитационного действия Земли в точке 1 с гелиоцентрической скоростью, параллельной орбитальной скорости Земли, и в 4,21 раза большей орбитальной скорости планеты-мишени (что составляет примерно 1,33 единиц орбитальной скорости Земли). Угловое положение точки 1 составляет примерно 83 градуса позади углового положения целевой планеты.

Невозмущенная эллиптическая гелиоцентрическая орбита космического аппарата показана в левой части рис. 7.15. Космический аппарат следует вдоль невозмущенного эллипса почти точно до точки 3, в которой он достигает орбиты планеты. Отметим, что планета в этот момент находится довольно далеко позади этой точки. Дальнейшее гелиоцентрическое движение космического аппарата между точками 3 – 4 значительно искажается гравитацией планеты. Планета постепенно догоняет медленно движущийся космиче-

ский корабль, и космический аппарат попадает внутрь сферы гравитационного действия планеты.

Внутри сферы гравитационного действия планеты планетоцентрическое движение космического аппарата определяется в основном тяготением планеты. Гиперболическая часть планетоцентрической траектории внутри пунктирной окружности отчетливо видна в правой части рис. 7.15. Крошечная петля на гелиоцентрической траектории между положениями 4 и 5 (вблизи отдаленного фокуса невозмущенного эллипса в левой части рисунка) образуется при сложении гиперболического планетоцентрического движения и равномерного кругового орбитального движения планеты.

Чтобы убедиться, что космический аппарат проложит путь обратно в окрестность Земли после прохождения вблизи планеты, мы можем выбрать начальные условия отправления (например, путем проб и ошибок) таким образом, чтобы получить невозмущенный гелиоцентрический эллипс для возвращения к Земле почти равным (конгруэнтным) эллипсу движения от Земли. В нашем моделировании эти эллипсы (эллипс для возвращения не показан на рисунке) незначительно отличаются только ориентацией своих главных осей. Оскулирующий эллипс для возвращения имеет те же параметры (большая ось и эксцентриситет), что и для движения от Земли, если две точки, в которых траектория входит в сферу гравитационного действия планеты и выходит из нее, лежат симметрично на одинаковом расстоянии от Солнца, и если векторы гелиоцентрической скорости в этих двух точках равны по величине и образуют равные углы с прямой, соединяющей эти точки. Такое расположение возникает, если ось симметрии планетоцентрической гиперболической траектории перпендикулярна линии, соединяющей эти точки в гелиоцентрической системе отсчета.

Так как длины больших осей и расстояния от Солнца до перигелиев одинаковы для эллипса обратного пути и для эллипса движения от Земли, космический аппарат возвращается по такой траектории к орбите Земли в течение времени, равного времени движения от Земли. Но, чтобы перевести космический корабль на круговую орбиту Земли, требуется сообщить ему дополнительный ракетный импульс в перигелии эллиптической орбиты возвращения. Результирующее изменение скорости должно быть таким же по величине, что и для перехода на эллипс движения от Земли, но противоположным по направлению.

В целях экономии ракетного топлива, мы должны озаботиться продолжительностью проектируемой экспедиции: если космический корабль прибудет в перигелий полуэллиптической траектории возвращения в момент, когда Земля в своем орбитальном движении окажется именно в этой точке, для гашения избыточной скорости космического аппарата можно использовать атмосферу Земли.

Для того, чтобы обеспечить вход в атмосферу под небольшим углом, мы должны при планировании реального путешествия предусмотреть возможность использования дополнительных ракетных импульсов для коррекции траектории. И, конечно, все расчеты траектории для этой последней стадии рейса (внутри сферы гравитационного действия Земли) должны учитывать тяготение Земли.

7.10 Кометы – межпланетные странники

Кометы, несмотря на их ничтожные массы по сравнению с массами планет, обычно видны даже невооруженным глазом, когда они приближаются к Солнцу. Ядра большинства комет представляют собой, по-видимому, нечто вроде глыбы грязного снега диаметром не более нескольких километров. Ядра комет окружены комой — туманным облаком газа и пыли. При прохождении вблизи Солнца некоторые кометы обретаю хвост,

который всегда вытянут в сторону, противоположную Солнцу. При нагревании ядра кометы излучением Солнца образуется шлейф из испарившихся (сублимированных) газов, который простирается на большие расстояния под действием светового давления и солнечного ветра. Длина хвоста кометы может превышать расстояние от Земли до Солнца. Длинный яркий хвост в сочетании с крошечной массой дал повод окрестить этих небесных странников «видимое ничто».

Входя в состав Солнечной системы, кометы движутся вокруг Солнца по чрезвычайно сильно вытянутым орбитам. Некоторые из комет имеют очень длинные периоды обращения, превышающие 100 000 лет. Столь сильно вытянутые эллиптические орбиты таких долгопериодических комет почти невозможно отличить от парабол, тем более, что мы можем наблюдать только малые части их орбит, которые проходят в окрестности Солнца. Эти кометы появляются неожиданно, непредсказуемо, в противоположность короткопериодическим кометам с орбитальными периодами менее 150 лет.

Самая известная из короткопериодических комет — комета Галлея — названа в честь английского астронома Эдмунда Галлея (Edmund Halley, 1656 — 1742), который впервые осознал, что кометы, наблюдавшиеся в 1531, 1607 и 1682 годах фактически были одним и тем же небесным телом, периодически возвращавшимся к Солнцу приблизительно каждые 76 лет. Последнее посещение кометой Галлея окрестностей Солнца состоялось в 1986 году. Афелий ее эллиптической орбиты (с ретроградным обращением) находится за пределами орбиты Нептуна, самой удаленной из планет-гигантов Солнечной системы. В настоящее время известно много короткопериодических комет с периодами обращения от трех до десяти лет.

Массы комет слишком малы для того, чтобы влиять на движение планет даже в тех случаях, когда они проходят в непосредственной близости от планет. Напротив, массивные планеты, такие, как Юпитер, существенно изменяют орбиты комет. В зависимости от взаимного расположения планеты и кометы при их сближении, такой «гравитационный удар» может значительно повлиять на вытянутость орбиты кометы. Если орбита становится более протяженной, период ее обращения тоже возрастает. Комета может даже перейти на гиперболическую орбиту и тем самым оказаться выброшенной из Солнечной системы. И наоборот, если протяженность орбиты уменьшается, долгопериодическая комета может оказаться захваченной на небольшую орбиту с коротким периодом обращения.

Подобно большинству планет Солнечной системы, орбиты многих короткопериодических комет имеют сравнительно небольшие наклоны к плоскости земной орбиты (к эклиптике). Программа «Планета со спутником», в которой моделируется планарное (происходящее в одной плоскости) движение трех тел, позволяет воспроизвести возмущения, испытываемые такими кометами со стороны планет. При постановке такой задачи моделирования «спутник» (тело пренебрежимо малой массы) играет роль кометы. Чтобы эффект гравитационных возмущений со стороны планет был легко наблюдаем, нужно для первоначальной вытянутой орбиты кометы выбрать расстояние до перигелия меньшим, чем радиус орбиты планеты, так, чтобы орбиты планеты и кометы пересекались.

Результаты такого моделирования показаны на рис. 7.16. В начале моделирования комета C находится недалеко от Солнца S на стороне, противоположной планете P (это может быть, например, Юпитер), которая движется вокруг Солнца (против часовой стрелки) по круговой орбите. Комета делает один оборот по своей первоначальной вытянутой эллиптической орбите приблизительно за семь оборотов планеты, т. е. за семь юпитерианских лет. Маленькие кружки с цифрами показывают положение кометы каждый раз в моменты времени, когда планета завершает очередной оборот и возвращается в точку P .

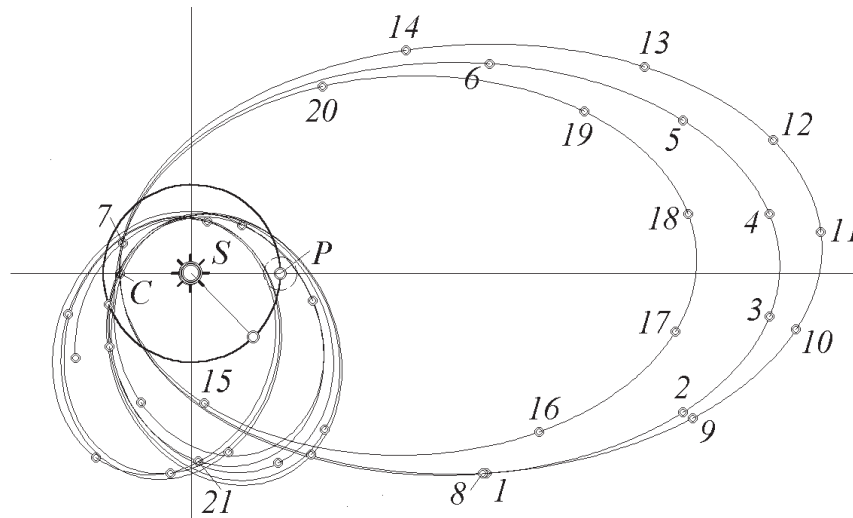


Рис. 7.16: Возмущения орбиты короткопериодической кометы, вызванные массивной планетой. Кружки с цифрами показывают положение кометы после каждого оборота планеты вокруг Солнца.

Если комета проходит вблизи Солнца (через перигелий своей орбиты) в момент, когда планета находится далеко от этой точки (скажем, на противоположной стороне от Солнца), орбита кометы лишь слегка возмущается планетой. Именно так происходит после первого оборота кометы, который длится почти целое число юпитерианских лет (положение 7 на рис. 7.16, а планета в этот момент в точке P). Поэтому на втором витке комета движется по орбите, лишь слегка отличающейся от первоначальной. Однако период ее обращения немного увеличился, так что при следующем ее проходе через перигелий (между положениями 14 и 15) планета оказывается ближе и сильнее возмущает орбиту кометы. Такие весьма скромные возмущения, искажающие вытянутую гелиоцентрическую орбиту кометы вблизи ее перигелия, вызывают нерегулярные вариации большой полуоси и периода обращения кометы.

Большинство известных короткопериодических комет испытывают такие вариации. Например, период обращения кометы Галлея колеблется между 74 и 79 земными годами.

Раньше или позже обращение по пересекающимся орбитам с несоизмеримыми периодами приведет комету в близкую окрестность планеты. В моделировании, показанном на 7.16, такая встреча происходит после третьего витка кометы, между положениями 20 и 21.

Комета входит в сферу гравитационного действия планеты с гиперболической скоростью относительно планеты. Это означает, что комета не может быть захвачена планетой на планетоцентрическую орбиту, т. е. она не может стать спутником планеты.

Прочертив отрезок гиперболы (в системе отсчета планеты), комета покидает сферу гравитационного действия планеты (если, разумеется, гипербола не пересекла поверхность планеты) с такой же по модулю скоростью (относительно планеты), но иначе направленной. Это изменение направления планетоцентрической скорости кометы можно образно назвать гравитационным маневром или даже «гравитационным ударом», хотя тела при этом не входят в непосредственное соприкосновение. Возникающее в результа-

те гравитационного удара изменение направления и модуля гелиоцентрической скорости кометы вызывает значительное изменение ее орбиты.

В некоторых успешно осуществленных проектах космических экспедиций подобные гравитационные взаимодействия использовались для преднамеренного изменения траектории космического аппарата. Например, проект «Вояджер» был предложен и осуществлен NASA с намерением использовать преимущество необычного взаимного расположения внешних планет в течение 1970-х и 1980-х годов. С помощью серии последовательных гравитационных ударов с внешними планетами, которую позволило осуществить это расположение планет группы Юпитера, удалось в одной экспедиции послать Вояджер исследовать с близкого расстояния несколько далеких планет. Большой Тур «Вояджера» значительно расширил наши знания о далеких планетах Солнечной системы и их многочисленных спутниках.

В моделировании, показанном на рис. 7.16, комета испытывает сильный гравитационный удар с планетой после трех оборотов по своей первоначальной почти эллиптической орбите, которая на протяжении трех витков испытывала лишь слабые возмущения со стороны планеты. В результате гравитационного удара комета оказалась захваченной на небольшую короткопериодическую гелиоцентрическую орбиту. Такая орбита тоже долго не просуществует, потому что она пересекается с орбитой планеты. После нескольких оборотов по новой орбите комета вновь встречается с планетой, и этот второй гравитационный удар снова значительно изменяет орбиту кометы.

Очевидно, что судьба кометы чрезвычайно чувствительна к начальным условиям. Это еще один пример динамического хаоса: ничтожно малое различие в начальных условиях может привести к драматическим различиям в дальнейшем движении системы. Например, гравитационный удар с планетой может настолько увеличить гелиоцентрическую скорость кометы, что она окажется выброшенной из системы. Или же гравитационный удар так изменит орбиту кометы, что через несколько витков она врежется в планету.

Короткопериодические кометы можно моделировать также, используя программу «Система планет».

Глава 8

Двойная звезда с планетой

Моделирующая программа «Двойная звезда с планетой» аналогична программе «Планета со спутником», обсуждавшейся в предыдущей главе. Обе программы имеют дело с ограниченной задачей трех тел, в которой рассматривается движение тела пренебрежимо малой массы под действием сил тяготения двух массивных тел, обращающихся одно вокруг другого по окружностям либо кеплеровым эллипсам. Как уже отмечалось, эти ситуации (спутник планеты, обращающейся вокруг звезды и планета в системе двойной звезды) различаются скорее количественно чем качественно. Поэтому моделирование спутника массивной планеты, которая обращается вокруг звезды, может рассматриваться и как моделирование внутренней планеты, которая обращается вокруг одной из компонент двойной звезды. Однако метод задания параметров системы и начальных условий, предлагаемый в программе «Двойная звезда с планетой», более удобен для моделирования внешней планеты, т. е. планеты, обращающейся по орбите, охватывающей обе звезды.

8.1 Как работать с программой «Двойная звезда с планетой»

Для моделирования орбитального движения планеты в системе двойной звезды, сначала нужно ввести параметры системы и начальные условия с помощью панели «Ввод параметров», которая открывается выбором соответствующего пункта меню. Сначала вводятся отношение масс компонент двойной звезды и начальная скорость, определяющая относительное движение компонент двойной звезды. В начальный момент моделирования скорости звезд по условию направлены трансверсально (т. е. перпендикулярно линии, соединяющей центры звезд). Поэтому достаточно ввести лишь величину относительной скорости в единицах круговой скорости (т. е. скорости, при которой относительное движение звезд и их движения в системе центра масс будут происходить по окружностям).

Затем нужно ввести начальное положение и скорость планеты. Для этого можно выбрать одну из двух систем отсчета: либо связанную с одной из звезд (любой из них), либо инерциальную систему отсчета, связанную с центром масс.

Система центра масс удобна для моделирования внешней планеты, орбита которой охватывает обе звезды. Для выбора системы отсчета на панели ввода имеется специальная кнопка.

Начальное положение планеты задается указанием ее расстояния от соответствующей звезды (или от центра масс системы, если выбрана система отсчета центра масс) в единицах расстояния между звездами, и указанием угла, образуемого радиусом-вектором планеты, проведенным из соответствующей звезды (или из центра масс), с прямой, соединяющей звезды.

Начальная скорость планеты указывается аналогичным образом. Сначала нужно ввести ее величину. Когда используется система отсчета, связанная с одной из звезд, начальная скорость планеты должна быть выражена в единицах невозмущенной круговой скорости планеты при ее движении вокруг соответствующей звезды (т. е. в единицах скорости, с которой планета обращалась бы по круговой орбите вокруг этой звезды в отсутствие гравитационного притяжения другой звездой).

Такие единицы скорости удобны при моделировании внутренней планеты, обращающейся вокруг одной из звезд. Если же выбрана система отсчета центра масс, то величина начальной скорости планеты должна быть выражена в единицах круговой скорости, с которой происходило бы обращение планеты вокруг центра масс системы в предположении, что массы обеих звезд сосредоточены в этом центре. Затем нужно указать угол между направлением начальной скорости и радиусом-вектором планеты (проведенным из соответствующей звезды либо из центра масс системы).

И, наконец, нужно ввести размеры (значения радиусов) звезд, выраженные в единицах расстояния между их центрами. При моделировании размеры звезд могут оказаться существенными в ситуациях, когда траектория планеты проходит очень близко от одной из звезд. В зависимости от введенных Вами радиусов звезд планета может либо пройти поблизости от звезды и благополучно миновать ее, либо врезаться в поверхность звезды.

Когда все эти параметры введены, вы выбираете систему отсчета для отображения движения тел, выставив «галочку» в соответствующем окне. Можно отображать движение тел одновременно в двух системах отсчета.

Затем Вы нажимаете кнопку «Ок», чтобы закрыть панель ввода параметров и приступить к моделированию. Пункт меню «Условия моделирования» позволяет Вам сделать оптимальный выбор.

Если, например, в пункте «Метки времени» поставить «галочку», положения тел на экране будут фиксироваться через определенные равные промежутки времени; если «галочку» поставить в пункте «Оскулирующая орбита», программа будет изображать траекторию невозмущенного движения планеты перед началом моделирования и каждый раз, когда Вы будете нажимать кнопку «Пауза».

В процессе моделирования Вы можете переходить от одной системы отсчета к другой или открывать одновременно две системы отсчета, чтобы получить представление о том, как моделируемое движение выглядит для разных наблюдателей. Чтобы сделать это, нужно в пункте меню «Системы отсчета» выбрать пункт «Изменить систему отсчета». Можно также открыть небольшое дополнительное окно для отображения в нем движения планеты относительно одной или другой звезды.

При воспроизведении описываемых моделирующих экспериментов можно избежать трудоемкого процесса ввода параметров системы и начальных условий, если воспользоваться наборами заранее заготовленных примеров, поставляемыми вместе с программой.

Для выбора готовых примеров нужно открыть панель с их описанием, выбрав в меню программы пункт «Примеры». Можно также создавать новые примеры и наборы примеров, и затем сохранять их в файлах на диске. Чтобы узнать, каким образом можно самостоятельно создавать новые примеры, откройте раздел «Как создавать новые примеры».

8.2 Примеры сложных движений планеты в системе двойной звезды

Поведение планеты в системе двойной звезды может быть очень сложным. На рис. 8.1 приведен пример нерегулярной петлеобразной траектории, описываемой планетой P в системе отсчета одной из звезд. Первоначально планета беспорядочно обращается вокруг меньшей из звезд B , которая движется вокруг большей звезды A по эллиптической кеплеровой орбите.

Затем звезда A захватывает планету, и она в течение некоторого времени обращается вокруг A по небольшой почти эллиптической орбите. Совершив в одиночестве один оборот вокруг звезды A , меньшая звезда B перехватывает планету на свою орбиту, и в течение следующего витка B вокруг A планета обращается вокруг своего прежнего «хозяина» по небольшой орбите, следуя за ним в его орбитальном движении вокруг A .

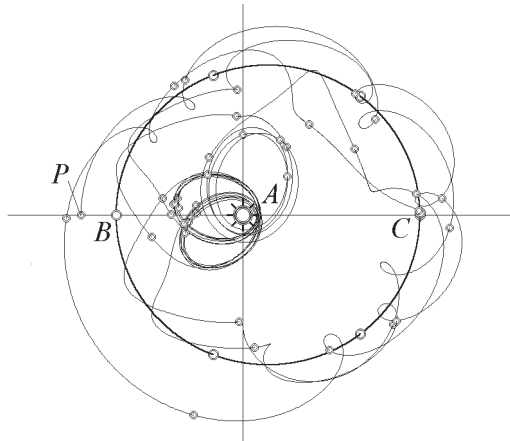


Рис. 8.1: Пример нерегулярного движения планеты в системе двойной звезды.

В приведенном здесь примере моделирования переходы планеты от обращения вокруг одной из звезд к другой происходят несколько раз. Такое нерегулярное, хаотическое движение планеты заканчивается падением на одну из звезд.

Долговременное поведение моделируемой системы очень чувствительно к начальным условиям. При слегка измененных начальных условиях планета может закончить свое существование падением на другую звезду, либо может быть выброшена из системы. Во включенном в программу «Двойная звезда с планетой» списке моделирующих экспериментов можно найти множество других примеров нерегулярного поведения планеты в системе двойной звезды.

Но наряду с таким хаотическим поведением планета в системе двойной звезды может двигаться регулярным образом по стационарной орбите. Рисунки 7.1 и 7.2, стр. 114 и 115, показывают примеры таких движений.

Низкие, почти круговые орбиты вокруг одной из звезд вполне устойчивы. Низкие внутренние орбиты лишь слегка возмущаются другой звездой, и движение планеты по ним может продолжаться неопределенно долго. Петлеобразная траектория планеты в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, образуется в результате слож-

ния регулярного, почти кеплерова движения вокруг звезды-хозяина и строго регулярного движения «хозяина» вокруг центра масс всей системы.

Такая ситуация вполне аналогична рассмотренным ранее примерам ограниченной задачи трех тел, в которых спутник обращается вокруг планеты (Земли), обращающейся в свою очередь вокруг звезды (Солнца). Но большие орбиты внутренних планет в системе двойной звезды испытывают сильные возмущения со стороны другой звезды.

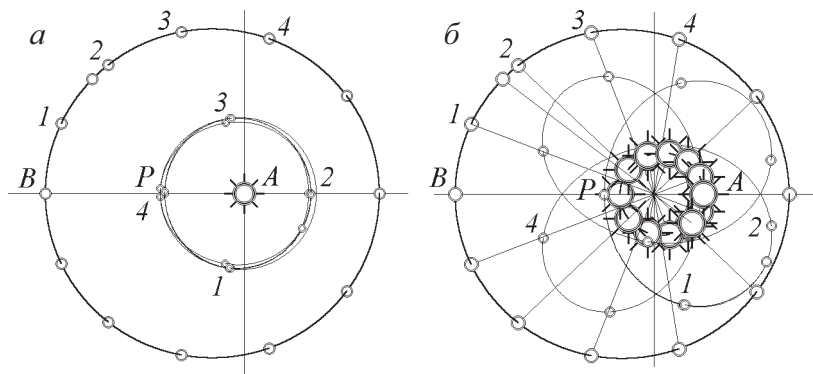


Рис. 8.2: Периодическое движение внутренней планеты в системе двойной звезды.

После всего, что было сказано выше, может показаться удивительной возможностью для внутренней планеты в системе двойной звезды двигаться по большой, регулярной периодической орбите, которую никоим образом нельзя рассматривать без учета возмущений со стороны второй звезды. Приведенный здесь рис. 8.2 показывает пример внутренней планеты P , движущейся (против часовой стрелки) вокруг звезды A большей массы по сравнительно большой орбите, размеры которой достигают почти половины орбиты относительного движения звезд (происходящего по часовой стрелке). В системе отсчета, связанной со звездой A (левая часть рисунка), планета совершает ровно три оборота вокруг A на протяжении одного оборота относительного движения звезд. Несмотря на сильные возмущения со стороны второй звезды, орбита планеты все же замыкается после трех оборотов. В момент, когда звезда меньшей массы B завершает свой оборот, планета возвращается в исходную точку пространства и имеет там такую же скорость, как и в начале моделирования. Начальное состояние системы воспроизводится, т. е. ее движение периодическое.

В инерциальной системе отсчета центра масс (правая часть рисунка) это регулярное движение системы представляется еще более своеобразным. Замкнутая траектория планеты похожа на контур красивого цветка. Все его четыре лепестка планета обходит за один период взаимного обращения звезд.

Движение планеты по внешней орбите, охватывающей обе звезды, также может быть устойчивым. Если размеры орбиты много больше расстояния между компонентами двойной звезды, в системе отсчета центра масс орбита может быть почти эллиптической (или почти круговой) и практически замкнутой.

На рис. 8.3 показан пример такой орбиты, охватывающей сразу обе звезды, которые движутся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс. Хотя в общем случае период обращения планеты несоизмерим с периодом взаимного обращения компонент двойной звезды, движение внешней планеты вполне устойчиво и может продолжаться

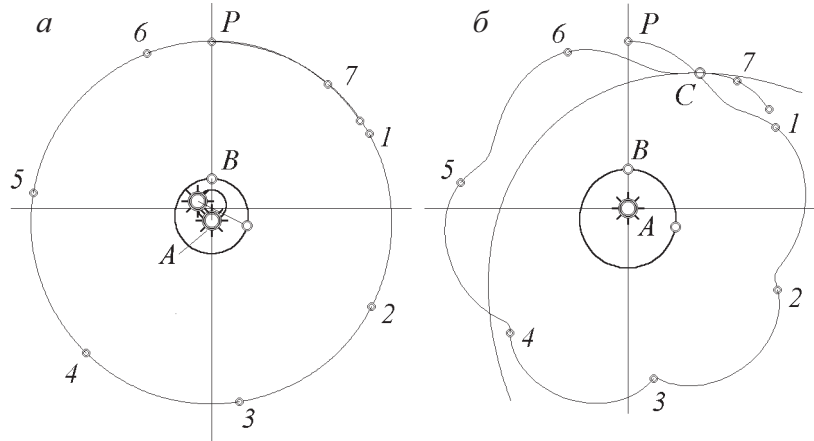


Рис. 8.3: Стационарное движение внешней планеты в системе двойной звезды.

неопределенно долго. Правая часть рисунка показывает это движение в системе отсчета более массивной звезды A . Волнообразная форма траектории планеты в этой системе отсчета объясняется периодическим движением звезды A (т. е. движением системы отсчета, выбранной для отображения траектории, а не движением самой планеты) по небольшому (в масштабах орбиты планеты) эллипсу относительно центра масс.

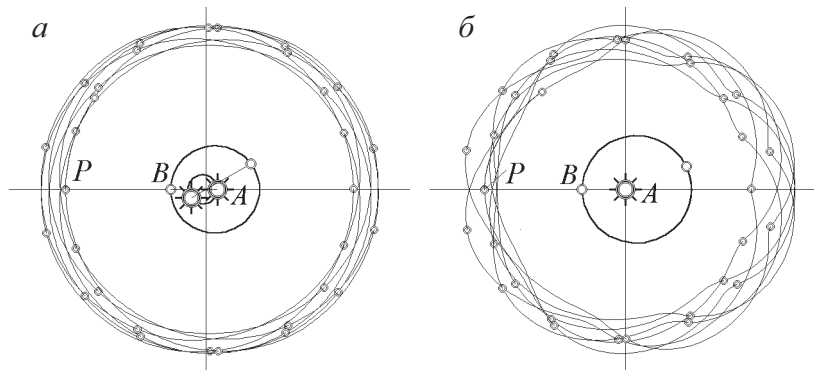


Рис. 8.4: Периодическое движение внешней планеты в системе двойной звезды.

Для внешних планет, обращающихся вокруг двойной звезды, периодическое движение по замкнутой орбите также возможно. Рисунок 8.4 показывает удивительный пример такого движения. В начальный момент моделирования звезды A и B находятся в перигелиях эллиптических орбит, по которым они обращаются вокруг общего центра масс. Начальное положение планеты выбрано на одной линии со звездами, и начальная скорость планеты перпендикулярна этой линии. В этом примере внешнюю орбиту, охватывающую обе звезды, нельзя считать большой по сравнению с расстоянием между звездами.

Маленькие кружки на траектории планеты фиксируют ее положение через каждую половину оборота и каждый целый оборот звезд, когда звезды снова оказываются с на-

чальной конфигурации. Отдельные витки траектории планеты не замыкаются, поскольку под действием сил притяжения двумя движущимися центрами ее движение не будет кеплеровым. Тем не менее, после семи оборотов вокруг звезд планета P оказывается в начальной точке и имеет там ту же скорость, что и в начале моделирования, и ее траектория замыкается. Самое удивительное, что в этот момент звезды тоже оказываются в тех же положениях, что и в начале. За то время, пока планета совершает семь оборотов вокруг двойной звезды, компоненты звезды совершают ровно тридцать взаимных оборотов, и начальное состояние системы воспроизводится. Правая часть рисунка показывает волнообразную замкнутую траекторию планеты в системе отсчета, связанной с более массивной компонентой A двойной звезды.

Когда компоненты двойной звезды имеют равные массы, существует простое точное решение: если планета находится ровно посередине между звездами (и центре масс системы) и ее скорость в системе центра масс равна нулю, планета остается там и дальше, в то время как звезды синхронно движутся по конгруэнтным эллиптическим орбитам с общим фокусом в центре масс системы или движутся по общей круговой орбите, находясь на противоположных концах диаметра орбиты. Пример такого движения рассмотрен в разделе 7.6.1, стр. 117 (см. рис. 7.5). Это точное решение соответствует неустойчивому движению: если массы звезд не точно равны, или симметричные начальные условия чуть нарушены, какое-то время планета остается в окрестности центра масс, но затем покидает эту точку и начинает беспорядочно обращаться вокруг одной из звезд.

Точные частные решения ограниченной задачи трех тел (например, планета в системе двойной звезды) существуют также для систем, в которых тяжелые компоненты имеют неравные массы. Пять типов таких решений связаны с точками Лагранжа. Если планета находится в одной из точек Лагранжа и имеет определенную начальную скорость, все три тела системы движутся синхронно по геометрически подобным эллипсам, так что при движении конфигурация системы остается подобной начальной конфигурации. Три из этих решений характеризуются коллинеарным расположением трех тел (см. раздел 7.6.3). В одном из них планета находится между компонентами двойной звезды (во внутренней точке Лагранжа). Рассмотренное выше простое точное решение представляет собой частный случай внутренней коллинеарной точки Лагранжа для двойной звезды с одинаковыми массами компонент. Две другие коллинеарные точки Лагранжа расположены с внешних сторон отрезка, соединяющего звезды. Точные частные решения двух других типов характеризуются треугольным равносторонним расположением трех тел (см. раздел 7.6.2).

Контрольные вопросы

- 1. Внешние и внутренние планеты.** Объясните, почему в системе двойной звезды могут быть устойчивы движения внешних планет, орбиты которых имеют размеры, значительно превышающие размеры орбит компонент двойной звезды, и, напротив, орбиты внутренних планет, обращающихся вокруг отдельных компонент по орбитам, малым по сравнению с орбитами самих звезд. Почему невозможны устойчивые движения по орбитам, размеры которых сравнимы с размерами орбит компонент двойной звезды?
- 2. Точки либрации для круговых движений в ограниченной задаче трех тел.** Компоненты двойной звезды имеют одинаковые массы и обращаются по круговым орбитам. Объясните, почему третье тело, масса которого мала по сравнению с массах звезд (например, планета), может двигаться по окружности вокруг центра масс

синхронно с массивными телами, находясь в вершине равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий компоненты двойной звезды. Какую начальную скорость нужно сообщить телу в моделирующем эксперименте для того, чтобы воспроизвести это движение?

Глава 9

Система планет — задача многих тел

С помощью моделирующей программы «Система планет» можно изучить модель Солнечной системы, или создать свою собственную воображаемую планетную систему вместе со звездой, планетами, спутниками планет, кометами, астероидами, и изучить ее движение, происходящее под действием сил взаимного тяготения. Программа дает возможность даже промоделировать гипотетическую ситуацию встречи двух планетных систем и увидеть возможные катастрофические последствия такого «звездного randevu».

Моделирование движения в программе основано на численном интегрировании дифференциальных уравнений для системы многих тел. При этом принимаются во внимание силы гравитационного взаимодействия между всеми небесными телами. Массы, начальные положения и начальные скорости всех тел могут быть заданы произвольно. Единственное ограничение заключается в том, что в этой программе предусмотрено моделирование только планарных систем, в которых все тела и скорости всех тел лежат в одной плоскости. Это ограничение связано с трудностями визуального восприятия изображений трехмерных систем небесных тел на двумерном плоском экране компьютера.

9.1 Как работать с программой «Система планет»

При воспроизведении описываемых в этой главе экспериментов можно избежать трудоемкого процесса ввода параметров системы и начальных условий, если воспользоваться наборами заранее заготовленных примеров, включенных в программу. Для выбора примеров нужно открыть панель с их описанием с помощью пункта «Примеры» из верхнего меню программы.

Разумеется, программа дает возможность проводить моделирующие эксперименты самостоятельно. Для этого необходимо вводить параметры системы и задавать начальные условия для всех тел, используя панель ввода параметров, которая открывается при выборе соответствующего пункта меню программы. Как это делать, описано ниже в данном разделе.

9.1.1 Управление программой

Моделируемое движение можно отображать либо в «гелиоцентрической» системе отсчета (связанной со звездой), либо в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс всей системы тел, либо в «геоцентрической» (планетоцентрической) системе отсчета, связанной с одной из планет. Движение системы можно также наблюдать на экране в двух системах отсчета одновременно.

Программа «Система планет» позволяет изменять пространственный и временной масштабы, в которых движение тел отображается на экране. Для изменения временного масштаба моделирования предусмотрены управляющие элементы (горизонтальные линейки прокрутки) с надписями «Ускорить» и «Замедлить», движки на которых можно перемещать мышью. Пространственный масштаб можно изменять, выбирая в меню программы пункты «Zoom in» и «Zoom out». При этом масштаб изображения каждый раз соответственно увеличивается либо уменьшается на множитель 1,25.

Можно также выбрать некоторую область экрана (где происходят наиболее интересные для нас события) и увеличить ее изображение на весь экран. Для этого нужно при помощи мыши выделить прямоугольник на экране (нарисовав его таким же способом, как это делается в популярных графических редакторах, таких, как Microsoft Paint). После освобождения левой кнопки мыши границы прямоугольника автоматически немного изменятся, чтобы его стороны стали пропорциональны соответствующим сторонам окна, в котором отображается движение. После этого можно передвинуть мышью этот прямоугольник в другое положение, чтобы точнее задать область экрана для просмотра в увеличенном масштабе. (Отказаться от сделанного выделения можно щелчком левой кнопки где-либо вне этого прямоугольника.) Чтобы растянуть выделенную область на весь экран, можно либо выбрать «Zoom in» в меню программы, либо просто сделать двойной щелчок мышью внутри выделенного прямоугольника. Если движение отображается сразу в двух окнах (в двух системах отсчета), такой выбор области для увеличенного изображения можно сделать либо в одном из окон, либо независимо в каждом окне.

Когда программа моделирует систему трех и более тел, их движение может быть очень сложным. В процессе эволюции система может придти к конфигурации, которая лишь отдаленно напоминает или даже совсем не напоминает начальную. В общем случае начальное состояние системы никогда не повторяется. Однако эта сложная эволюция системы обратима, поскольку движение консервативной системы симметрично к обращению времени. Программа позволяет при моделировании движения продемонстрировать обратимость во времени эволюции системы. В меню «Условия моделирования» есть пункт «Обращение скоростей» (или пункт «Реверс» в меню, всплывающем при нажатии правой кнопки мыши), при выборе которого программа одновременно обращает направления скоростей всех тел системы. После этого можно наблюдать, как тела движутся в обратном направлении по тем же самым траекториям, и система развивается в направлении своего начального состояния. Если, допустим, начальное состояние характеризуется симметричной конфигурацией, в процессе движения рано или поздно эта симметрия, как правило, утрачивается.

Однако наблюдаемая во всех случаях эволюция системы в направлении менее симметричных конфигураций не является внутренним свойством системы: моделирующие эксперименты с обращением скоростей совершенно ясно показывают, что динамические законы движения допускают также и эволюцию в направлении более симметричных конфигураций. Разумеется, подобные случаи эволюционного развития в реальном мире следует трактовать как чрезвычайно редкие и невероятные, потому что они требуют очень специфичных начальных условий.

Обратимость движения во времени нарушается в случаях столкновений тел, во время которых в игру вступают силы иной физической природы (не гравитационные). Программа интерпретирует такие события как абсолютно неупругие удары, в результате которых происходит соединение сталкивающихся тел в одно небесное тело. В таких процессах сохраняется суммарный импульс сталкивающихся тел, но механическая энергия системы не сохраняется (уменьшается).

9.1.2 Самостоятельное моделирование системы многих тел

Чтобы ввести параметры задуманной для моделирования системы, нужно открыть специальную панель, выбрав в меню программы пункт «Ввод данных». На этой панели показано начальное расположение звезды, планет и других небесных тел, а также список, в котором приведены значения масс всех планет, расстояний от звезды и угловых положений планет, а также скоростей планет для начальной конфигурации.

Если Вы собираетесь создать совершенно новую модель, нажмите кнопку «Очистить» (Clear), чтобы удалить все планеты из имеющегося списка. После этого для вновь создаваемой модели нужно ввести массу первой из планет (будем называть ее «Землей»), выраженную в единицах массы звезды, и начальное расстояние планеты от звезды в астрономических единицах, т. е. в единицах среднего расстояния от Земли до Солнца, угловое положение планеты (в градусах), ее начальную скорость (в единицах невозмущенной круговой скорости, т.е. скорости, с которой эта планета двигалась бы вокруг звезды в отсутствие других планет), направление начальной скорости планеты (угол, образуемый вектором скорости с радиусом-вектором планеты), и радиус планеты (в единицах радиуса звезды). Эти параметры можно вводить в соответствующие окна панели ввода в любой последовательности.

Когда введены значения всех параметров данной планеты, нужно нажать кнопку «Добавить», и планета с такими параметрами появится в списке. Затем эта процедура повторяется для второй планеты, третьей и т.д. При добавлении каждой новой планеты к системе, изображение новой конфигурации планет с их невозмущенными теоретическими орбитами появляется в небольшом окне на панели ввода параметров.

Чтобы выбрать систему отсчета, в которой будет отображаться движение системы, нужно поставить «галочку» в соответствующем боксе. Можно выбрать «гелиоцентрическую» систему отсчета (связанную со звездой), либо инерциальную систему отсчета, в которой центр масс всей системы тел неподвижен, либо «геоцентрическую» систему отсчета, т.е. систему, связанную с одной из планет, а именно, с первой из планет в списке (любую из введенных в список планет можно переместить на первую позицию). Чтобы наблюдать движение сразу в двух системах отсчета, поставьте «галочки» в два бокса.

Для перехода к моделированию нажмите кнопку «Ок». Во время моделирования можно переходить от одной системы отсчета к другой с помощью пункта «Системы» в главном меню программы.

Внести изменения в моделируемую систему планет можно с помощью панели «Ввод параметров». Чтобы исключить некоторую планету, достаточно отметить ее в списке и нажать кнопку «Удалить» (Remove). Добавить к системе новую планету (или несколько планет) можно с помощью описанной выше процедуры. Если Вам нужно модифицировать один или несколько параметров планеты, уже имеющейся в списке, отметьте ее в списке двойным щелчком. Тогда в окнах ввода параметров будут отображаться значения, соответствующие этой планете (когда Вы открываете панель ввода, в окнах отображаются значения параметров, соответствующие первой планете в списке).

После ввода новых (модифицированных) значений параметров для данной планеты нужно нажать кнопку «Добавить» (Add), и планета с новыми параметрами появится в конце списка (добавляемая планета всегда появляется в конце списка). Когда Вы намереваетесь только изменить параметры существующей планеты, а не ввести новую планету в систему, то планету с неизменными параметрами следует удалить из списка описанным выше способом. И если Вы не внесли изменений в начальное положение планеты, то Вам следует удалить из списка планету с немодифицированными параметрами до того, как Вы нажмете кнопку «Добавить», потому что невозможно поместить две планеты в одну точку пространства.

С помощью пункта меню «Примеры» можно открыть панель, в которой приводится список заранее заготовленных примеров, поставляемых вместе с программой. Кнопки «Основной набор» и «Расширенный набор» позволяют переключаться между двумя наборами примеров. При выборе какого-либо примера из списка, его краткое описание появляется в расположенном ниже окне. Чтобы сразу начать моделирование, сделайте двойной щелчок на выбранном примере. Если Вы хотите предварительно просмотреть параметры системы для выбранного примера, нажмите кнопку «Ок», в результате чего откроется панель ввода параметров со списком планет системы. Начать моделирование можно, нажав кнопку «Ок» на этой панели.

9.1.3 Как создавать и сохранять новые примеры

Чтобы создать свой собственный пример (и сохранить его в файле на диске), в панели «Примеры» среди доступных наборов нужно выбрать «Модифицируемый набор». При этом становится доступен пункт «Редактировать» в меню панели примеров. Этот пункт позволяет Вам модифицировать существующие наборы примеров, удаляя из них одни примеры и добавляя новые, либо же создавать новые наборы. Выбирая пункт «Редактировать название и комментарий», можно изменить название и текст описания, не изменяя параметров моделируемой в этом примере системы. Пункты меню «Удалить пример», «Переместить вверх», «Переместить вниз» позволяют организовать набор в соответствии с Вашими потребностями.

Чтобы добавить в модифицируемый набор новый пример, нужно прежде всего сконструировать свою планетную систему (с помощью панели «Ввод параметров», как было описано выше), выполнить моделирование и при этом выбрать опции, обеспечивающие оптимальные условия наблюдения моделирования. Затем нужно открыть панель «Примеры» и в меню «Редактирование» выбрать пункт «Создать новый пример». Программа предложит Вам ввести для нового примера название и снабдить его кратким описанием, которое в дальнейшем будет появляться при просмотре созданных Вами наборов примеров. Нажав кнопку «Ок», Вы добавляете новый пример в конец списка. Пункт меню «Переместить вверх» (и «Переместить вниз») позволит Вам поместить пример в должном месте списка.

Чтобы сохранить модифицированный или вновь созданный набор примеров, выберите «Сохранить» в меню панели примеров. Программа предложит Вам ввести название для сохраняемого набора примеров (это название будет появляться в дальнейшем, когда Вы будете открывать набор), а также имя файла (и путь для него на диске), в котором будет сохранен набор примеров. Можно создать любое количество наборов. Чтобы впоследствии открыть любой из них, в меню панели «Примеры» нужно выбрать пункт «Открыть примеры» и найти желаемый набор по имени файла, в котором он был сохранен.

9.2 Модель Солнечной системы и кинематика планетных движений

Орбиты Меркурия и Нептуна (а тем более Плутона) настолько сильно различаются в размерах, что практически невозможно отобразить их в одном масштабе на экране компьютера. Поэтому целесообразно моделировать отдельно планеты земной группы и группы Юпитера. На рис. 9.1 показано моделирование трех планет группы Земли — Венеры V , Земли E и Марса M , обращающихся вокруг Солнца S . В начальный момент моделирования все планеты находятся в перигелиях своих орбит. Цифрами 1 и 2 отмечены положения планет в их орбитальном движении вокруг Солнца через год и через два года соответственно. В эти моменты Земля, конечно, оказывается на прежнем месте — в своем начальном положении E . Кружками без цифр показаны положения планет в конце моделирования (2,5 года).

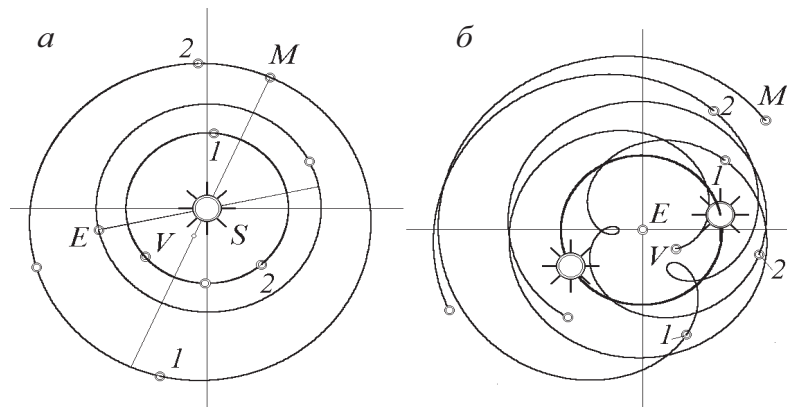


Рис. 9.1: Моделирование трех планет земной группы в гелиоцентрической (слева) и геоцентрической (справа) системах отсчета.

Правая часть рис. 9.1 показывает траектории планет (и Солнца) в геоцентрической системе отсчета. В этой системе Солнце описывает замкнутую эллиптическую (почти круговую) орбиту. Для земного наблюдателя Солнце за один год совершает полный путь по эклиптике, перемещаясь против часовой стрелки по зодиакальным созвездиям. Сложные петлеобразные траектории планет в геоцентрической системе отсчета объясняются сложением этого движения Солнца со сравнительно простыми (почти круговыми) обращениями планет вокруг Солнца. Когда планета проходит через вершину маленькой петли, обращенной к Земле, для земного наблюдателя движение планеты на фоне звезд выглядит попятным (ретроградным).

Чтобы лучше понять происхождение сложных движений планет, какими они представляются наблюдателю на Земле, здесь мы рассмотрим отдельно движения верхних (внешних) и нижних (внутренних) планет.

9.2.1 Кинематика верхних (внешних) планет

Рисунок 9.2 показывает орбиту Юпитера, которая в размере превосходит орбиту Земли в 5,2 раза. Юпитер совершает один оборот по своей орбите на фоне далеких звезд за

11,86 земных лет. Это время называется сидерическим периодом планеты. Другими словами, за время одного оборота Юпитера вокруг Солнца Земля совершает 11,86 оборота по своей орбите. В начальный момент моделирования Юпитер и Земля находятся в перигелиях своих орбит (точки P и E соответственно). Положения Юпитера на орбите через один (земной) год, два года и т.д. отмечены цифрами $1, 2, \dots$. В эти моменты Земля оказывается в своем начальном положении E .

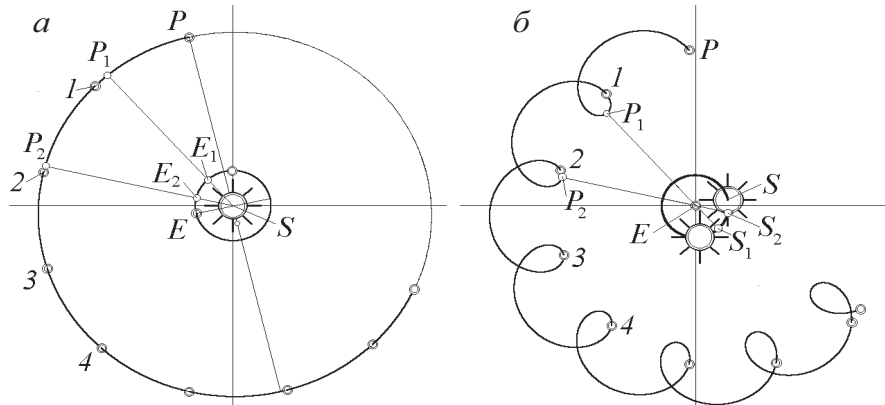


Рис. 9.2: Солнце, Земля и Юпитер в гелиоцентрической (слева) и геоцентрической (справа) системах отсчета.

Когда Юпитер проходит через точку P_1 , Земля находится в точке E_1 на линии, соединяющей Юпитер и Солнце. Такая коллинеарная конфигурация внешней планеты с Землей и Солнцем (планета и Солнце находятся на противоположных сторонах от Земли) называется противостоянием. В момент противостояния расстояние от Земли до Юпитера минимально. Поскольку Земля обращается вокруг Солнца быстрее, чем Юпитер (с большей угловой скоростью), для наблюдателя на Земле движение Юпитера на фоне звезд в окрестности противостояния представляется попятным.

Через год после отмеченного противостояния $P_1 - E_1$ Земля опять возвращается в точку E_1 . Но к этому времени Юпитер сдвинулся из точки P_1 вперед по своей орбите. Поэтому следующее противостояние наступает не через год, а через несколько больший промежуток времени, когда Земля снова будет проходить между Солнцем и Юпитером (положения P_2 и E_2 на рис. 9.2).

Среднее время S , которое проходит между одним противостоянием Земли с планетой и следующим противостоянием, называется синодическим периодом планеты. Этот промежуток времени между последовательными противостояниями определяется разностью орбитальных угловых скоростей Земли и планеты. Поэтому для внешней планеты $1/S = 1/E - 1/T$, где T – ее сидерический период, а E – сидерический период Земли (сидерический год, равный 365,257 солнечных суток). Для Юпитера сидерический период $S = 398,88$ дней. (Тропический год, т. е. промежуток времени между последовательными прохождениями Солнца через точки весеннего равноденствия, примерно на 20 минут короче сидерического года из-за медленного движения точек равноденствия на запад по эклиптике, обусловленного прецессией Земли. Гравитационные силы, действующие со стороны Солнца и Луны на экваториальное «вздутие» Земли, создают момент сил, стремящийся повернуть земную ось. Под действием этого момента земная ось прецессирует

(описывает конус) с периодом около 25 800 лет.)

В геоцентрической системе отсчета (правая часть рис. 9.2) петли на траектории Юпитера возникают как следствие орбитального движения Земли вокруг Солнца, а не отражают движение самого Юпитера. Траектория образует обращенную в сторону Земли петлю каждый раз, когда планеты сближаются в своем гелиоцентрическом движении и выстраиваются вдоль одного радиуса на одной стороне от Солнца. В вершине каждой петли Юпитер находится от Земли в стороне, противоположной Солнцу (отсюда и происходит термин «противостояние»).

Когда Юпитер проходит вдоль большой дуги своей геоцентрической орбиты (на полпути между противостояниями), для наблюдателя на Земле его движение представляется прямым (против часовой стрелки). Посередине дуги Юпитер для земного наблюдателя находится позади Солнца. Коллинеарная конфигурация двух планет с противоположных сторон от Солнца называется соединением. В моменты соединений видимое нами прямое движение Юпитера на фоне звезд происходит быстрее всего. Угловая скорость этого видимого с Земли движения Юпитера в большей степени обусловлена орбитальным движением Земли, нежели движением самого Юпитера, хотя собственное движение Юпитера тоже дает вклад в угловую скорость видимого с Земли движения.

Тем не менее, видимое с Земли движение Солнца (вызванное орбитальным движением Земли) происходит еще быстрее, потому что Солнце значительно ближе к Земле, нежели Юпитер. Поэтому в моменты соединений кажется, что Солнце обгоняет Юпитер.

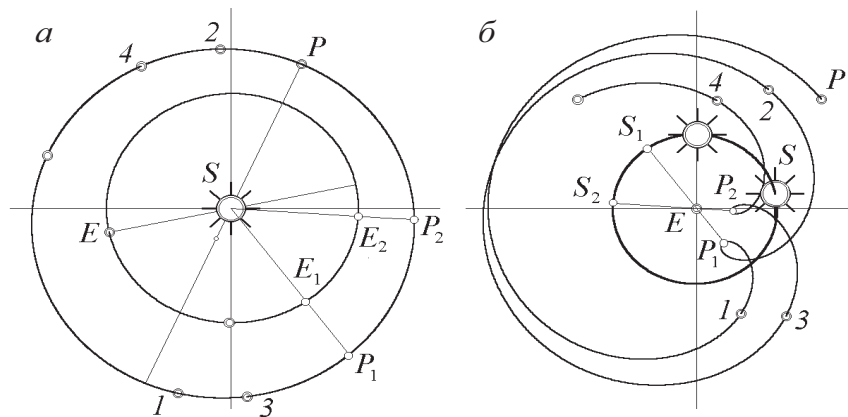


Рис. 9.3: Солнце, Земля и Марс в гелиоцентрической (слева) и геоцентрической (справа) системах отсчета.

Из верхних (внешних) планет, чьи орбиты проходят за пределами орбиты Земли, Марс находится ближе всех. Орбита Марса всего в полтора раза больше орбиты Земли (см. рис. 9.3). В показанном здесь моделировании Земля и Марс сначала расположены в перигелиях своих орбит (E и P соответственно). Кружки с номерами $1, 2, \dots$ показывают положения Марса через год, два года и т.д. Первое противостояние происходит более чем через год, когда Марс находится в точке P_1 , а Земля — в точке E_1 . Различие угловых скоростей Земли и Марса не столь велико, как в случае Юпитера, так что последовательные противостояния Земли и Марса происходят через промежутки времени, превышающие два года — синодический период Марса равен 780 дням. Сравните это значение с синодическим периодом в 399 дней для медленно движущегося Юпитера, последовательные

противостояния которого с Землей повторяются через промежутки времени, лишь на месяц продолжительнее земного года.

Во время второго противостояния ($P_2—E_2$) расстояние между планетами E_2P_2 меньше, чем расстояние E_1P_1 , потому что орбита Марса обладает сравнительно большим эксцентриситетом. Для наблюдателя на Земле наиболее благоприятные условия для наблюдения Марса складываются во время великих противостояний, когда Марс проходит через перигелий своей орбиты и расстояние между орбитами Земли и Марса минимально. Великие противостояния происходят один раз в течение каждых 15 – 17 лет, приблизительно в августе, потому что в августе Земля проходит через точку своей орбиты, ближайшую к орбите Марса. Правая часть рис. 9.3 показывает (в несколько уменьшенном масштабе) орбиту Солнца и петлеобразную траекторию Марса в геоцентрической системе отсчета.

9.2.2 Кинематика нижних (внутренних) планет

Рисунок 9.4 иллюстрирует кинематику нижних (внутренних) планет. На левой стороне показаны гелиоцентрические орбиты Меркурия и Земли. Моделирование начинается, когда планеты находятся в перигелиях P и E своих орбит. Положения планет в нижнем соединении (коллинеарная конфигурация планет и Солнца, в которой нижняя планета находится между Землей и Солнцем) отмечены как P_1 и E_1 . Это уже второе нижнее соединение после начала моделирования; первое произошло почти сразу после начала моделирования. Следующее (третье) нижнее соединение ($P_2—E_2$) происходит после того, как Земля совершает менее трети своего оборота вокруг Солнца. За это время Меркурий совершает целый оборот и еще треть оборота по своей орбите. Этот синодический период равен 116 суткам.

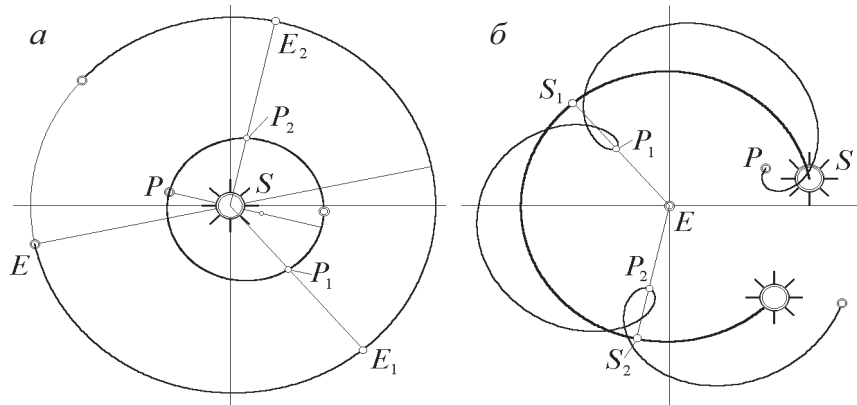


Рис. 9.4: Кинематика нижней планеты (Меркурия) в гелиоцентрической (слева) и геоцентрической (справа) системах отсчета.

На правой стороне рис. 9.4 показаны орбита Солнца и петлеобразная траектория Меркурия в геоцентрической системе отсчета. Для наблюдателя на Земле движение Меркурия среди звезд вблизи его нижних соединений (положения P_1 и P_2) представляется попятным. В этих соединениях Меркурий проходит через точки P_1 и P_2 , в которых он находится ближе всего к Земле. Эти точки лежат на самом «дне» обращенных к Земле

петель его траектории. В нижних соединениях P_1 и P_2 Меркурий находится на одной линии между Землей и Солнцем: в эти моменты Солнце проходит через положения S_1 и S_2 соответственно.

В промежутке между нижними соединениями видимое с Земли движение Меркурия вдоль большой выпуклой петли его геоцентрической траектории представляется прямым (против часовой стрелки). Приблизительно в середине этой дуги Меркурий снова оказывается на одной прямой с Землей и Солнцем, но в этот раз позади Солнца (по другую, чем Земля, сторону от Солнца). Такое расположение называется верхним соединением. В моменты верхних соединений видимое движение Меркурия среди звезд происходит наиболее быстро, так как здесь в это движение дают вклад (одного знака) и его собственное орбитальное движение вокруг Солнца, и кажущееся движение Солнца вокруг Земли.

9.3 Гипотетические планетные системы

Вокруг многих планет Солнечной системы обращаются естественные спутники — луны. Несмотря на то, что некоторые из спутников по своим размерам столь же велики, как и планеты (например, наш естественный спутник — Луна), довольно трудно наблюдать моделирование реальной планеты со спутником с помощью компьютерной программы, потому что обычно расстояние от планеты до спутника много меньше расстояния от планеты до Солнца. Компьютерный экран слишком мал для отображения орбит планеты и спутника в одном масштабе. Поэтому в предлагаемых моделирующих экспериментах мы выбираем преувеличенные расстояния между планетами и их лунами. В таких случаях орбитальное движение спутника гораздо сильнее возмущается Солнцем и другими планетами, нежели для реально существующих спутников планет Солнечной системы.

9.3.1 Двойная планета на орбите вокруг звезды

С помощью моделирующей программы «Система планет» можно также промоделировать движение двойной планеты вокруг звезды, т.е. системы двух гравитационно связанных тел типа Земля — Луна, в которой массы компонент сопоставимы или даже одинаковы. Рисунок 9.5 показывает сложные переплетающиеся траектории, по которым движутся компоненты такой двойной планеты в системе отсчета, связанной со звездой. Тонкими линиями показаны эллипсы, по которым каждая из компонент двойной планеты двигалась бы вокруг звезды в отсутствие силы притяжения со стороны второй компоненты.

Наша Солнечная система — это сравнительно спокойное место во Вселенной. Серьезные космические катастрофы, вызванные разрушительными столкновениями небесных тел, происходили лишь на ранних стадиях ее эволюции. Многочисленные кратеры на поверхности Луны и Меркурия — свидетели событий далекого прошлого в истории Солнечной системы. Эти следы древних столкновений и бомбардировок меньшими небесными телами хорошо сохранились до наших дней на небольших планетах и лунах (естественных спутниках больших планет) благодаря тому, что на таких планетах нет атмосферы, и потому их поверхность не подвержена атмосферной эрозии.

В нашу эпоху такие масштабные события как крупные метеориты или новые кометы, чьи гигантские хвосты грозили бы покрыть Землю или другие планеты, редко случаются в Солнечной системе. Программа «Система планет» позволяет нам сконструировать произвольное собрание небесных тел и тем самым воспроизвести некоторые события, типичные для «молодой» системы планет во времена ее ранней эволюции.

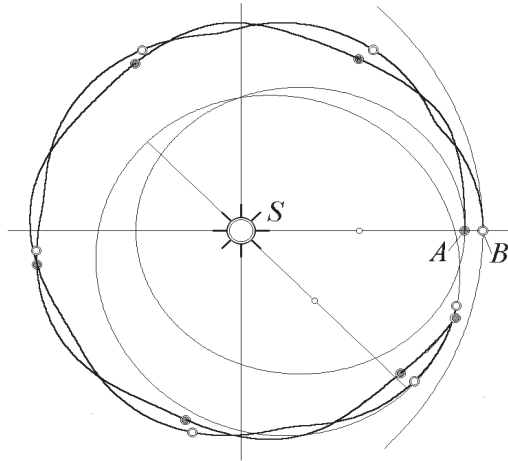


Рис. 9.5: Двойная планета на орбите вокруг звезды.

Например, можно показать, что две планеты на соседних (близких или пересекающихся) орбитах не могут существовать в течение продолжительного времени. Раньше или позже они окажутся в опасной близости и либо произойдет их столкновение, либо их орбиты испытают столь сильные возмущения, что одна из планет может оказаться выброшенной из системы. Когда в моделируемой системе два небесных тела приходят в непосредственное соприкосновение, программа интерпретирует это событие как абсолютно неупругое столкновение. Это значит, что два пришедших в контакт тела соединяются в одно тело, масса которого равна сумме масс столкнувшихся тел, а его скорость сразу после столкновения определяется законом сохранения импульса.

Конструируя систему планет по собственному усмотрению, мы можем дать большой простор воображению. Затем мы можем испытать построенную систему в моделирующем эксперименте и выяснить, будет ли система двигаться устойчиво в течение продолжительного времени, или же она будет эволюционировать и видоизменяться путем небесных катастроф и взаимных столкновений входящих в нее тел с образованием новых планет, превращаясь в нечто совсем не похожее на то, что было в начале.

В частности, можно проследить и изучить экспериментально процесс формирования крупных тел (планет) в результате аккумуляции вещества при многочисленных столкновениях с малыми небесными телами. Множество гипотетических систем, демонстрирующих порой довольно неожиданное поведение, можно найти среди заранее заготовленных примеров, список которых можно открыть с помощью пункта «Примеры» в главном меню программы.

9.3.2 Встречи планетных систем – космические катастрофы

Звезды на небе представляются нам неподвижными. Однако тщательные измерения показывают, что относительные положения так называемых «неподвижных» звезд на самом деле медленно изменяются. Эти изменения доказывают, что звезды перемещаются в направлениях, перпендикулярных лучу зрения. Такие движения трудно заметить лишь из-за огромных расстояний до звезд (и между звездами). Если известно расстояние до звезд-

ды, по измеренному угловому перемещению можно рассчитать тангенциальную (перпендикулярную лучу зрения) проекцию скорости звезды. С другой стороны, движение звезды вдоль луча зрения обнаруживает себя в сдвиге частоты спектральных линий ее излучения (эффект Доплера). Наблюдаемые радиальные и тангенциальные скорости звезд частично обусловлены собственными движениями звезд, и частично — движением Солнца по отношению к окружающим звездам.

Солнце находится на периферии Галактики, где звезды расположены на сравнительно больших расстояниях одна от другой. В обозримом будущем не предвидится встречи Солнца с какой-либо звездой. Но где-то ближе к центру Галактики концентрация звезд значительно выше, и события типа парных встреч звезд представляются весьма вероятными. Взаимное тяготение сообщает звездам ускорения и вызывает отклонения от прямолинейных траекторий. При сближении двух звезд их центры описывают открытые гиперболические орбиты. После такого небесного «рандеву» звезды расходятся и удаляются одна от другой по асимптотам соответствующих гипербол.

Программа «Система планет» позволяет воспроизвести подобное звездное рандеву. Такая космическая встреча может быть особенно интересной в тех случаях, когда звезды обладают собственными планетными системами. Гравитационные возмущения со стороны проходящей поблизости другой звезды могут привести к катастрофическим изменениям в планетной системе. На рис. 9.6 воспроизведен возможный сценарий встречи двух звезд с планетными системами.

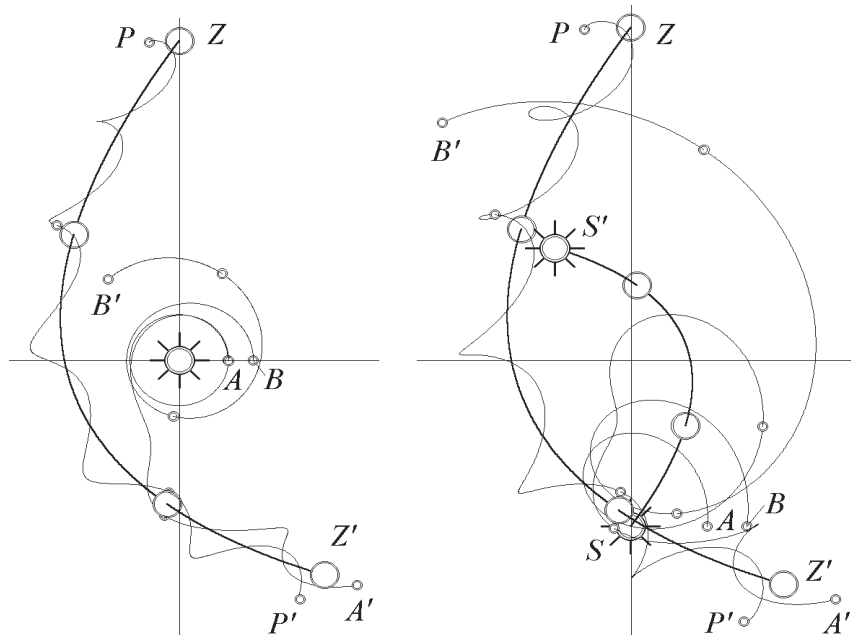


Рис. 9.6: Встреча двух планетных систем.

Массы звезд S и Z отличаются вдвое. Первоначально вокруг звезды S обращаются (против часовой стрелки) почти по круговым орбитам две планеты A и B , и одна планета P обращается (также против часовой стрелки) вокруг звезды-«пришельца» Z .

Влияние планет на движение звезд пренебрежимо мало, потому что массы планет малы по сравнению с массами звезд. Это значит, что при встрече звезды описывают почти гиперболические траектории (в инерциальной системе отсчета, связанной с общим центром масс). Отрезки этих гипербол (с общим фокусом в начале координат) показаны на правой стороне рис. 9.6.

Левая сторона рис. 9.6 соответствует системе отсчета, связанной со звездой S . По мере приближения вторгающейся звезды Z к S обе планеты, обращающиеся вокруг S , испытывают со стороны Z все более сильные гравитационные возмущения. Орбита верхней планеты B , первоначально почти круговая, трансформируется в вытянутый эллипс. В момент сближения звезд конфигурация планет такова, что влияние «пришельца» на нижнюю планету A оказывается еще более значительным: вторгающаяся звезда Z захватывает планету A к себе на орбиту. Когда звезды расходятся после встречи, захваченная планета A обращается вокруг Z , так что сразу две планеты (новая A и старая P) обращаются вокруг Z . Хотя планета B продолжает обращаться вокруг своего прежнего «хозяина» S , ее орбита очень сильно отличается от первоначальной.

Правая часть рис. 9.6 показывает траектории всех тел в инерциальной системе отсчета (системе отсчета центра масс), в которой звезды движутся по геометрически подобным гиперболам с общим фокусом в центре масс. Кружками отмечены положения всех тел через одинаковые промежутки времени. Буквы со штрихами отмечают положения тел в конце моделирования.

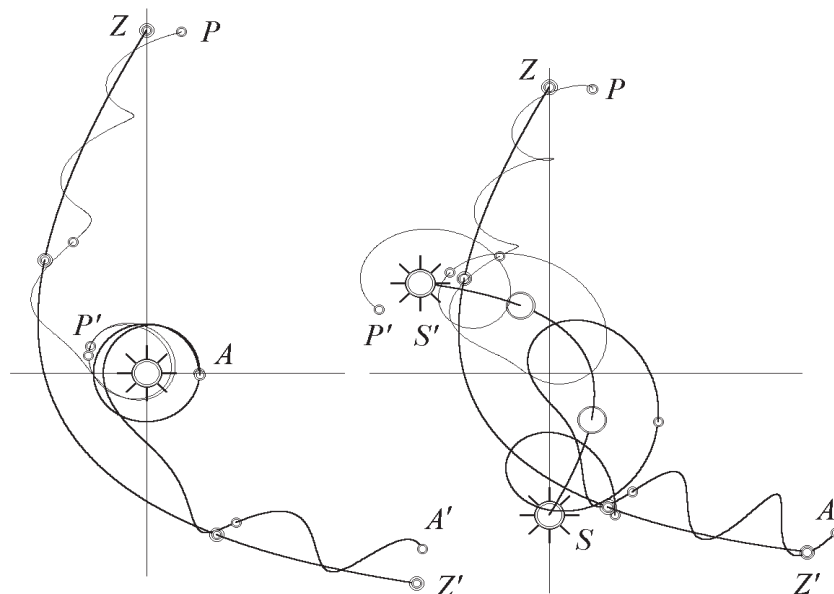


Рис. 9.7: При встрече звезд происходит обмен планетами.

Судьба встречающихся планетных систем очень чувствительна к (малым) изменениям начальных условий. На рис. 9.7 показан аналогичный предыдущему пример встречи двух звезд, вокруг каждой из которых до встречи обращается по одной планете. В результате встречи звезды обмениваются планетами.

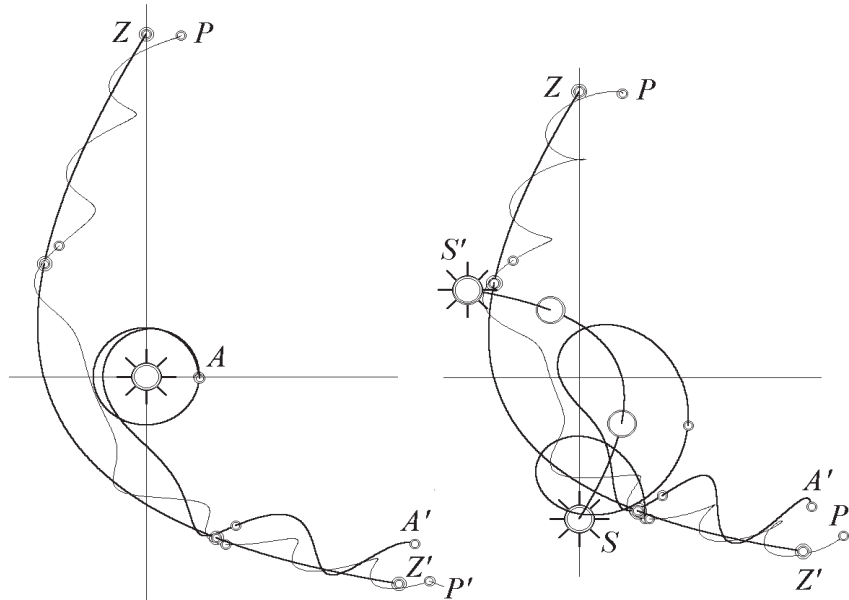


Рис. 9.8: Звезда-«пришелец» захватывает планету.

Сравним эту картину с рис. 9.8, где показаны те же самые планетные системы, но на этот раз до встречи звезд планета P обращается вокруг Z по слегка отличающейся орбите. Начальная орбита планеты A (спутника звезды S), как и все остальные параметры системы, оставлены без изменения. На этот раз вторгающаяся звезда Z сохраняет свою планету P и захватывает планету A . Таким образом, когда звезды расходятся, обе планеты обращаются вокруг звезды Z .

9.4 Кратные звезды

Кратная звезда — это система двух или большего числа звезд, связанных гравитационно так, что они совершают совместные орбитальные движения. Кратные звезды, состоящие из трех или четырех звезд, встречаются в нашей Галактике почти так же часто, как и двойные звезды, компоненты которых движутся одна вокруг другой (и вокруг центра масс) по кеплеровым эллипсам. По оценкам астрономов, около половины всех видимых на небе звезд принадлежат к двойным, тройным и вообще кратным системам.

В наиболее типичных тройных звездах две компоненты обычно образуют тесную бинарную систему (двойную звезду), обращаясь одна вокруг другой на сравнительно небольшом расстоянии, а третья звезда обращается вокруг тесной пары по орбите значительно большего размера. Гравитационное действие тесной пары на удаленного третьего компаньона в основном такое же, каким было бы действие единственной массы. Третье (внешнее) тело находится так далеко, что его гравитационное поле (точнее, неоднородность гравитационного поля) не в состоянии повлиять сколько-нибудь значительно на устойчивое относительное движение партнеров внутренней тесной пары.

Двойные звезды, вокруг которых на большом расстоянии обращается еще и третья

звезда, по оценкам могут составлять до 25 процентов общего их числа.

Программа «Система планет» позволяет промоделировать движение компонент кратной звезды. Чтобы сделать это, мы можем рассматривать «Солнце» как одну из компонент (наиболее массивную) кратной звезды, а «планеты», массы которых могут быть заданы столь же большими, как и масса звезды — в качестве других компонент кратной звезды.

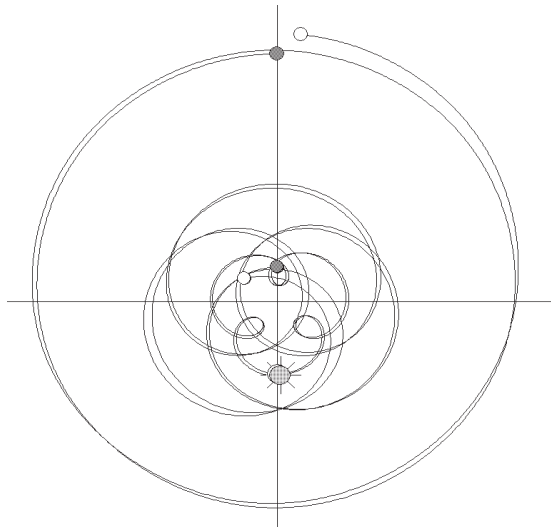


Рис. 9.9: Траектории компонент тройной звезды, массы которых относятся как 1:0.3:0.25.

На рис. 9.9 показаны возможные траектории звезд в системе тройной звезды, описываемые в инерциальной системе центра масс. В начале моделирования все три звезды лежат на одной прямой (вертикальной на рисунке). Третья (удаленная) звезда делает один оборот по почти круговой орбите вокруг тесной пары за время приблизительно четырех взаимных оборотов входящих в нее звезд.

Четверные звездные системы, образованные двумя тесными парами, обращающимися одна вокруг другой на сравнительно большом расстоянии, тоже широко распространены, хотя и встречаются не так часто, как тройные системы.

Звезда эpsilon созвездия Лиры дает хороший пример четверной системы. Все компоненты эpsilon Лиры, как у большинства (если не у всех) кратных систем, движутся в одной плоскости. Астрономы предполагают, что устойчивые конфигурации кратных звезд возможны только для планарных систем, подобных эpsilon Лиры, но это утверждение не доказано окончательно.

Рисунок 9.10 иллюстрирует моделирование движения компонент четверной звезды с помощью программы «Система планет». Внешняя (верхняя) пара взаимно обращающихся звезд движется как целое по сравнительно большой орбите под совместным действием гравитационного притяжения внутренней тесной пары.

Системы из пяти и более звезд встречаются, по-видимому, гораздо реже, чем системы из четырех и менее звезд. Одна из наиболее знаменитых и наиболее сложных кратных звезд — это Кастор, самая яркая звезда в созвездии Близнецов. В системе Кастора шесть звезд обращаются вокруг общего центра масс: две тесные бинарные системы образуют

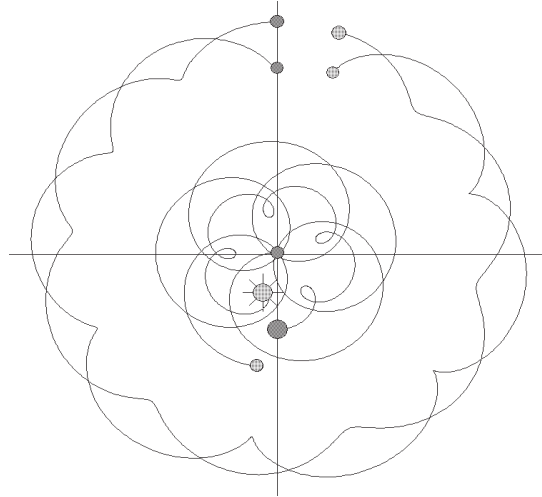


Рис. 9.10: Четверная звезда, состоящая из двух тесных пар, компоненты которых обращаются одна вокруг другой.

четверную звезду, а третья пара, состоящая из остывших красных карликов, совместно движется как целое вокруг внутренней четверной системы на значительно большем удалении. Сложные системы типа Кастора составляют лишь от 0,1 до 1 процента известных кратных звезд.

Большинство существующих кратных звезд организованы в иерархические системы: звезды в системе могут быть разделены на более мелкие группы, каждая из которых движется по большей орбите вокруг центра масс системы. Каждый уровень иерархии можно рассматривать как систему двух тел, рассматривая тесные пары, как если бы они были одной звездой. В этих системах взаимодействие между парами почти такое же, как между одиночными звездами, и их движение происходит по почти кеплеровым орбитам вокруг центра масс системы.

9.5 Точные решения задачи многих тел

Для системы трех гравитационно взаимодействующих тел математики нашли небольшое количество особых случаев, в которых орбиты трех масс периодические. В 1765 году Леонард Эйлер открыл пример, в котором три массы в начальной конфигурации лежат на одной прямой линии и движутся так, что они и в дальнейшем сохраняют коллинеарную конфигурацию (см также раздел 15.2.2, стр. 240). Однако такие простые движения неустойчивы и вряд ли происходят в природе. Затем в 1772 году Джозеф Лагранж нашел устойчивую периодическое движение, в котором три тела, одно из которых имеет незначительную массу, расположены по углам равностороннего треугольника (в лагранжевых точках, см. раздел 15.2.1, стр. 238). Каждая масса движется по эллипсу таким образом, что треугольник, образованный тремя массами, всегда остается равносторонним. Тесная группа астероидов, называемых Троянцами, образует треугольник с Юпитером и Солнцем и движется по такой схеме.

Программа «Система планет» позволяет выполнить моделирование интересных примеров точных частных решений задачи трех и многих тел. Хотя эти решения едва ли могут иметь какое-либо практическое значение, само их существование в принципе представляет несомненный интерес и заслуживает подробного обсуждения. Ниже рассмотрено несколько примеров таких точных решений.

9.5.1 Звезда с двумя одинаковыми планетами

На рис. 9.11 показано возможное простое симметричное движение системы, состоящей из звезды с двумя планетами одинаковой (сколь угодно большой) массы. В начальный момент планеты A и B расположены на одинаковых расстояниях от звезды S на одной прямой с звездой с противоположных сторон от нее (см. левую часть рисунка). Если при этом скорости планет (в гелиоцентрической системе отсчета или системе центра масс) равны и направлены в противоположные стороны, то, как легко видеть, симметричное взаимное расположение всех трех тел такой гипотетической планетной системы будет сохраняться и при последующем движении, которое будет весьма простым и регулярным.

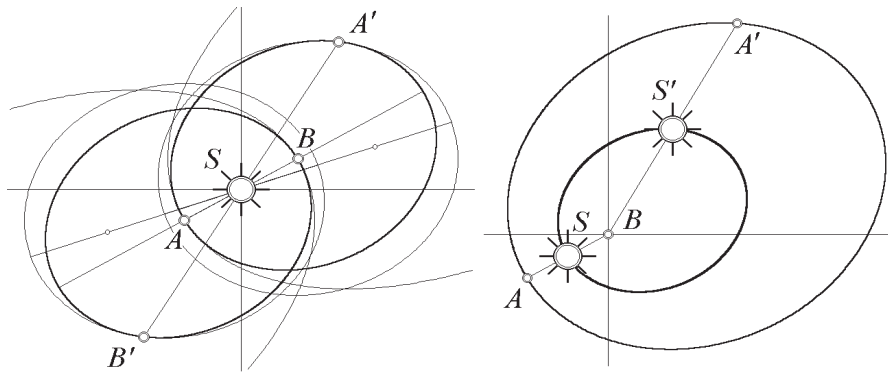


Рис. 9.11: Простые периодические движения, описываемые точным частным решением задачи трех тел в симметричной коллинеарной конфигурации (звезда с двумя идентичными планетами).

Невозмущенные орбиты, по которым каждая из планет двигалась бы в отсутствие другой (относительно центра масс) только под действием силы гравитационного притяжения звездой, показаны тонкими линиями в левой части рисунка. Эти оскулирующие орбиты, касающиеся действительных эллиптических орбит планет, показаны для перигелиев A и B и для точек A' и B' , расположенных недалеко от афелиев. Правая часть рисунка показывает (в несколько меньшем масштабе) траектории Солнца S и планеты A в системе отсчета, связанной с планетой B .

Такое простое поведение данной системы трех тел нетрудно объяснить. В этой симметричной конфигурации силы тяготения, действующие на звезду со стороны планет, равны и противоположны, так что звезда находится в состоянии равновесия и может покоиться в инерциальной системе отсчета при произвольно больших массах планет до тех пор, пока симметричная конфигурация не будет нарушена. Силы тяготения, действующие на каждую из планет со стороны звезды и второй планеты направлены к центру звезды, поскольку вторая планета лежит на той же прямой, что и звезда. Поэтому результирующе-

щая сила, действующая на каждую из планет, является центральной.

Можно показать (см. раздел 15.3.1), что величина этой силы обратно пропорциональна квадрату расстояния планеты от центра звезды. Поэтому можно считать, что в симметричной конфигурации любая из планет движется в статическом ньютоновском центральном поле тяготения, неподвижный источник которого (силовой центр) совпадает с центром звезды, несмотря на то, что одно из небесных тел, создающих это поле (а именно вторая планета) находится в движении. Эффективная масса $M_{\text{эфф}}$ этого неподвижного источника несколько больше, чем масса звезды, благодаря дополнительному гравитационному притяжению со стороны второй планеты ($M_{\text{эфф}} = M + m/4$, где M — масса звезды, m — масса любой из планет). В этом эффективном гравитационном поле планета движется по кеплерову эллипсу. Вторая планета движется в точно таком же эффективном поле и синхронно с первой описывает конгруэнтный эллипс.

Рассматриваемая система иллюстрирует частный случай одного из лагранжевых точных решений задачи трех тел, когда звезда S находится во внутренней коллинеарной точке либрации двух тел A и B .

Симметричная конфигурация системы сохраняется при движении тел лишь при условии, что начальные скорости планет относительно звезды в точности равны по модулю и противоположно направлены. Если же это условие не выполнено, или начальные расстояния планет от звезды не точно равны, или три тела не лежат точно на одной прямой, траектории планет рано или поздно начнут отклоняться от кеплеровых эллипсов, и эти отклонения будут прогрессивно нарастать. Это значит, что периодическое движение системы, описываемое рассмотренным частным решением задачи трех тел, неустойчиво.

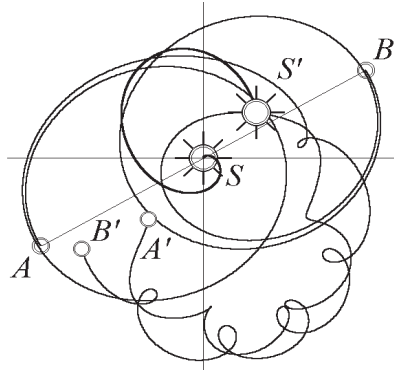


Рис. 9.12: Неустойчивость периодических движений, описываемых точным частным решением задачи трех тел в симметричной коллинеарной конфигурации (звезда с двумя идентичными планетами).

Через некоторое время движение системы становится нерегулярным и очень сложным. Рисунок 9.12 иллюстрирует неустойчивость для случая, когда начальные расстояния планет A и B от звезды S слегка отличаются. Эти сложные траектории после нескольких взаимных оборотов тел изменятся до неузнаваемости, если перед моделированием внести казалось бы самые ничтожные изменения в начальные условия.

Аналогичные точные решения существуют для систем нескольких одинаковых тел, образующих симметричную конфигурацию вокруг центрального тела (см. ниже «Хоровод» одинаковых «планет»).

9.5.2 «Хоровод» одинаковых «планет»

Периодические точные решения, в которых тела описывают кеплеровы орбиты, существуют для систем из нескольких тел одинаковой массы, симметрично окружающих центральное тело. Частный случай симметричной конфигурации двух идентичных планет, обращающихся вокруг звезды на одинаковых расстояниях от нее с противоположных сторон, рассмотрен в предыдущем разделе «Звезда с двумя одинаковыми планетами». Здесь мы рассмотрим симметричную систему произвольного числа тел.

Допустим, что n тел равных масс («планеты») расположены во всех n вершинах правильного (равностороннего) многоугольника, а еще одно тело произвольной массы («звезда», масса которой может отличаться от масс планет) расположено в центре этого многоугольника. В такой симметричной конфигурации центральное тело находится в равновесии под действием сил тяготения всех остальных тел, как это немедленно следует из симметрии системы. Из симметрии ясно также, что результирующая гравитационная сила, приложенная к любой из «планет» со стороны центрального тела и всех остальных тел, также направлена к центру многоугольника. Можно показать, что величина результирующей силы обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра (или, что то же самое, квадрату линейных размеров многоугольника, например, квадрату длины его сторон).

Поэтому при условии сохранения симметрии начальной конфигурации возможно такое движение, когда все «планеты» синхронно описывают конгруэнтные кеплеровы эллипсы. Для этого необходимо, чтобы в начальной симметричной конфигурации начальные скорости всех «планет» были равны по модулю и направлены под одинаковыми углами к соответствующим радиусам-векторам планет.

В частности, «планеты» могут равномерно двигаться по одной и той же окружности, описанной вокруг многоугольника. В этом случае многоугольник с планетами в его вершинах равномерно вращается вокруг своего центра. Чтобы получить такое движение при моделировании, нужно всем «планетам» сообщить равные по модулю начальные скорости, перпендикулярные их радиусам-векторам, а величина скорости должна иметь вполне определенное значение, зависящее от заданных расстояний и масс тел.

При произвольно выбранной величине скорости (и при направлении скоростей под иным углом) траектории будут эллиптическими. В случае эллиптических траекторий «планет» образованный планетами правильный многоугольник будет вращаться неравномерно (его угловая скорость максимальна в моменты одновременного прохождения всех «планет» через перигелии своих орбит), а длины его сторон при этом будут периодически изменяться. При достаточно большой начальной скорости возможно симметричное «разбегание» планет на бесконечно большие расстояния по параболическим или гиперболическим траекториям (или радиальным прямым, если начальные скорости направить вдоль радиусов-векторов планет).

На рис. 9.13 вверху показаны примеры таких точных решений для систем трех (слева) и четырех «планет» (справа). Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым (в системе отсчета центра масс) двигалась бы каждая из «планет» в отсутствие других «планет» только под действием силы тяготения, действующей на нее со стороны «звезды». Эти оскулирующие орбиты показаны для перигелиев истинных орбит и для моментов, когда «планеты» проходят через точки, помеченные маленькими кружками.

Движения шести и восьми «планет» в симметричных равносторонних конфигурациях, описываемые аналогичными точными решениями задачи многих тел, показаны в нижней части рис. 9.13. В этих случаях система отсчета центра масс совпадает с «гелиоцентрической» и потому истинные орбиты (показанные жирными линиями) в этих системах от-

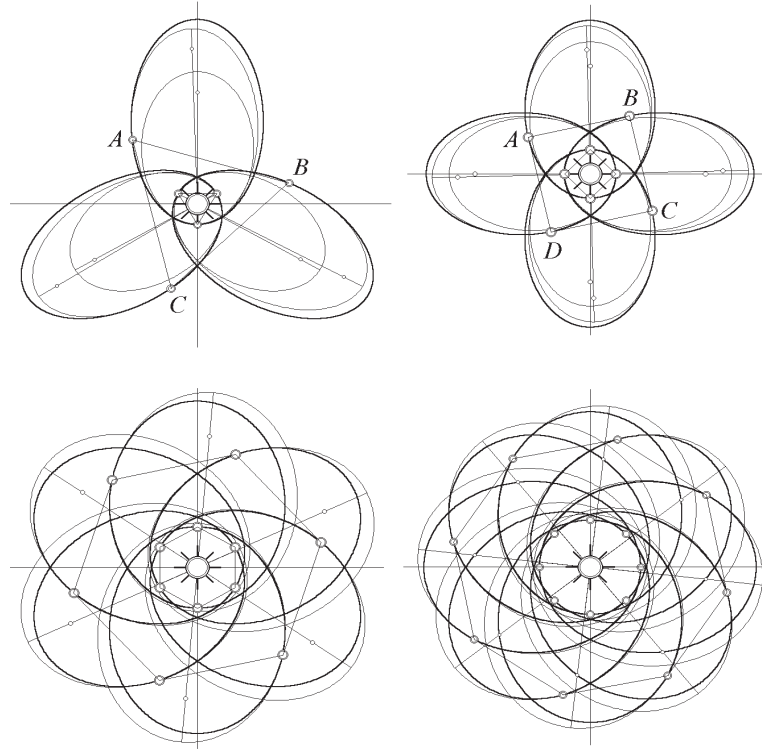


Рис. 9.13: Регулярные кеплеровы движения идентичных массивных тел, расположенных в вершинах правильного многоугольника и окружающих центральное тело. Такие симметричные движения описываются точным частным решением задачи многих тел.

счета одинаковы. Но оскулирующие орбиты для системы центра масс и гелиоцентрической различаются. На верхнем рисунке оскулирующие эллипсы соответствовали системе центра масс и потому проходили внутри действительных траекторий. На нижнем рисунке невозмущенные эллипсы соответствуют «гелиоцентрической» системе отсчета, и лежат вне действительных траекторий.

9.5.3 Равносторонние конфигурации идентичных тел (правильный многоугольник) в отсутствие центрального тела

Напомним, что в рассмотренных в предыдущем разделе (см. «Хоровод» одинаковых «планет») точных частных решениях задачи многих тел масса центрального тела могла иметь любое значение, в том числе и нулевое. Это значит, что система n тел одинаковой массы, расположенных в вершинах правильного n -угольника, может совершать красивый «хоровод» даже в отсутствие центрального тела, только под действием сил взаимного притяжения между одинаковыми телами.

В частности, три тела одинаковой массы в равносторонней конфигурации могут синхронно описывать конгруэнтные эллипсы, большие оси которых образуют углы по 120 градусов одна с другой. Чтобы осуществить моделирование такого движения с помощью

программы «Система планет», нужно ввести две «планеты», которые в начальной конфигурации образуют со звездой равносторонний треугольник, и задать массы этих планет равными массе звезды. Гелиоцентрические начальные скорости планет должны быть равны по модулю и образовывать равные углы с радиусами-векторами планет.

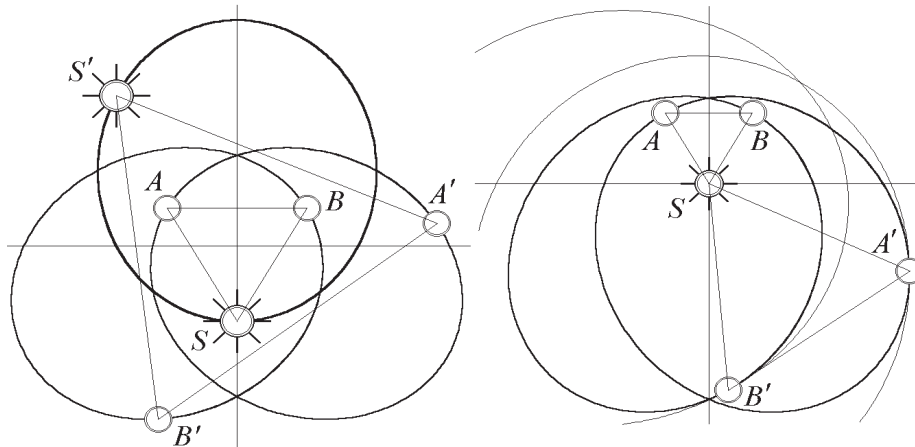


Рис. 9.14: Регулярные кеплеровы движения трех одинаковых массивных тел, расположенных в вершинах правильного треугольника. Такие симметричные движения описываются точным частным решением задачи многих тел. Траектории тел показаны в системе отсчета центра масс (слева) и в системе отсчета, связанной с одним из тел (справа).

На рисунке 9.14 показаны орбиты трех тел A , B и S равных масс в системе отсчета центра масс (левая часть) и в «гелиоцентрической» системе отсчета, связанной с телом S (правая часть, где масштаб изображения несколько меньше). Тонкие линии, касающиеся действительных траекторий тел, показывают части «невозмущенных» гелиоцентрических орбит, по которым двигалось бы каждое из тел A и B в отдельности при отсутствии второго тела, т. е. только под действием гравитационного притяжения «звезды» S . Эти оскулирующие орбиты построены для момента времени, когда тела проходят через точки A' и B' .

В частном случае все три эллиптические орбиты трех тел, движущихся в равносторонней конфигурации, могут слиться в одну окружность. В этом случае длины сторон треугольника, образованного телами, во время движения остаются неизменными, и весь треугольник равномерно вращается как целое вокруг своего центра. Чтобы при моделировании получить круговые движения, нужно начальные скорости тел в «гелиоцентрической» системе отсчета направить перпендикулярно радиусам-векторам «планет» и задать вполне определенное значение модуля скорости.

Как уже отмечалось, в симметричной конфигурации в виде правильного многоугольника без центрального тела «хоровод» с синхронным движением по конгруэнтным эллипсам может совершаться произвольным числом одинаковых тел. Действительно, нетрудно показать, что в такой конфигурации полная гравитационная сила, приложенная к каждому из тел со стороны всех остальных, направлена к центру многоугольника и обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра. Другими словами, в симметричной многоугольной конфигурации любое из тел движется так, как если бы на него действо-

вало центральное поле тяготения, создаваемое единственным неподвижным источником, расположенным в центре системы.

В частном случае такие эллиптические орбиты тел могут слиться в одну окружность, описанную вокруг образованного телами многоугольника. В этом случае образуемый телами правильный многоугольник просто вращается равномерно вокруг своего центра.

В случае движения «планет» по конгруэнтным эллиптическим орбитам образуемый ими правильный многоугольник вращается неравномерно: его угловая скорость максимальна, когда планеты проходят одновременно через перигелии своих орбит, и минимальна, когда они проходят через афелии. В таком неравномерном вращении многоугольника длина его сторон периодически изменяется. Пример регулярного вращения системы четырех тел, расположенных в вершинах квадрата, показан на рис. 9.15.

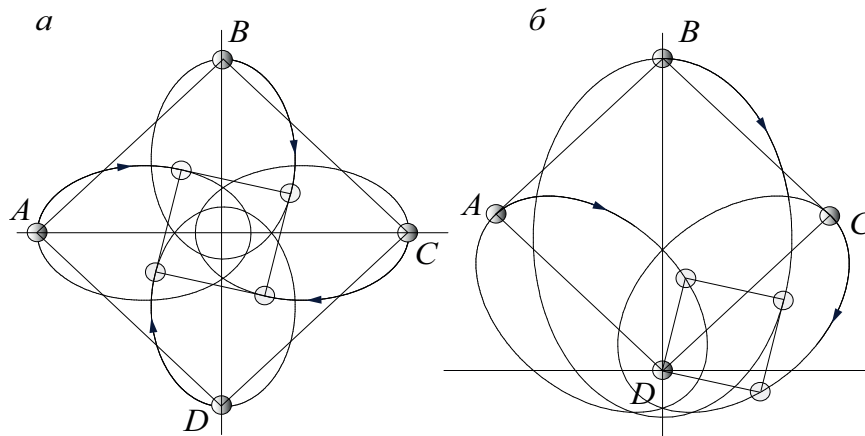


Рис. 9.15: Регулярные движения четырех тел равных масс, расположенных в вершинах квадрата. Траектории тел показаны в системе отсчета центра масс (слева) и в системе отсчета, связанной с одним из тел (справа).

9.5.4 Равносторонние конфигурации трех тел произвольных масс

Равносторонняя конфигурация трех тел представляет особый интерес, потому что она может сохраняться во время движения даже в том случае, когда массы всех тел различны. Можно показать (подробности можно найти в разделе 15.3.2), что полная гравитационная сила, приложенная к каждому из тел со стороны двух других тел системы, в равносторонней конфигурации направлена к центру масс системы и обратно пропорциональна квадрату расстояния от этого тела до центра масс. Поэтому начальная равносторонняя конфигурация системы будет сохраняться во время движения при условии, что начальные скорости тел имеют должные значения.

Другими словами, можно считать, что в равносторонней конфигурации системы трех тел, связанных взаимными силами тяготения, каждое из тел движется не под действием сил, действующих на него со стороны двух других движущихся тел, а в статическом центральном гравитационном поле, неподвижный источник которого расположен в центре масс системы, несмотря на то, что это поле создается движущимися телами. Действующая на тела центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния тела

от силового центра, поэтому тела могут описывать синхронно геометрически подобные эллиптические (либо параболические или гиперболические) кеплеровы орбиты с общим фокусом в центре масс системы. Линейные размеры орбит пропорциональны расстояниям тел от центра масс.

Для моделирования такого движения (рис. 9.16) мы задаем равностороннюю конфигурацию тел и вводим для каждого из них определенные значения начальных скоростей. Пример такого простого периодического движения показан на следующем рисунке (массы тел A и B равны соответственно 0,3 и 0,6 массы тела S). Относительно инерциальной системы отсчета, связанной с центром масс системы (левая часть рис. 9.16), тела описывают геометрически подобные эллипсы разных размеров и ориентаций.

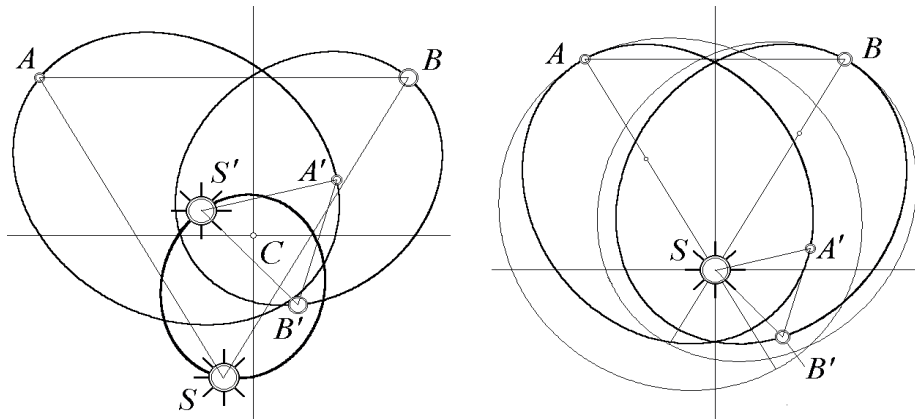


Рис. 9.16: Регулярные движения трех тел с различными массами в равносторонней конфигурации. Траектории тел показаны в системе отсчета центра масс (слева) и в системе отсчета, связанной с одним из тел (справа).

Относительно «гелиоцентрической» системы отсчета, связанной с телом S наибольшей массы (правая часть рис. 9.16), тела A и B описывают конгруэнтные эллипсы, показанные жирными линиями. Большие оси этих эллипсов образуют угол 60 градусов. Тонкими линиями показаны (неравные) гелиоцентрические оскулирующие орбиты, по которым двигалось бы каждое из тел A и B вокруг тела S в отсутствие второго тела. Оскулирующие эллипсы показаны для момента, когда тела A и B проходят через афелии своих орбит.

Рассмотренное регулярное периодическое движение, описываемое точным частным решением задачи трех тел, неустойчиво по отношению к малым отклонениям в начальных условиях. Эту неустойчивость легко продемонстрировать в моделирующем эксперименте (см. рис. 9.17). Если внести ничтожные изменения либо в начальные расстояния между телами, либо в величину или направление начальной скорости хотя бы одного из тел, через некоторое время после начала моделирования мы увидим разрушение равносторонней конфигурации тел и переход начального регулярного движения в сложное хаотическое взаимное обращение тел по запутанным траекториям.

Похоже, что природа справляется с проблемой многих тел весьма простым способом применительно ко многим звездным системам в нашей Галактике, состоящим из трех и более звезд, связанных взаимным гравитационным притяжением. Во всех этих системах объекты, по-видимому, вырождаются в иерархические последовательности задачи двух

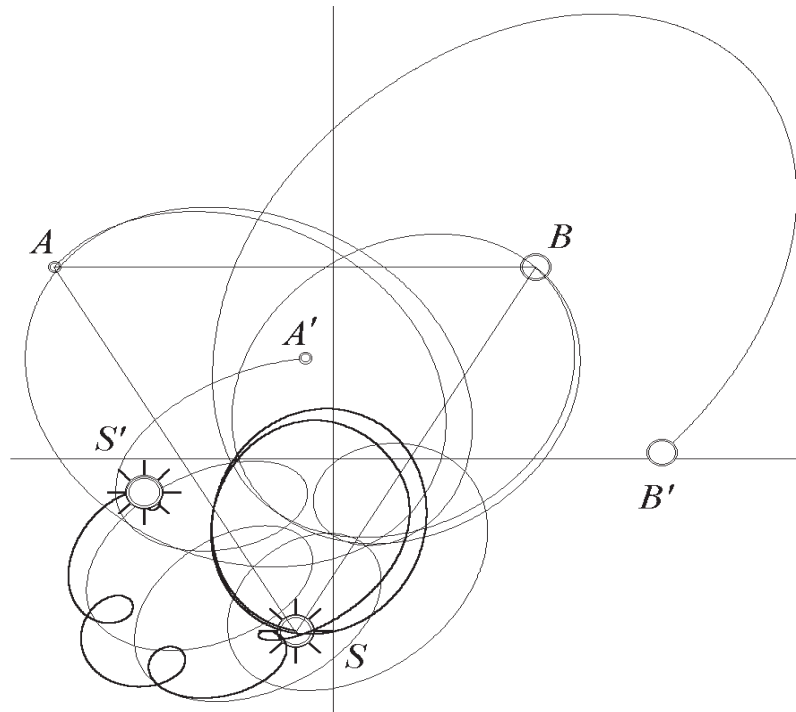


Рис. 9.17: Переход к нерегулярным движениям в системе трех тел, движение которой первоначально было близким к регулярному движению, описываемому точным частным решением.

тел. Например, если система содержит три звезды, две из них тесно связаны во взаимном орбитальном движении, как можно было бы ожидать от решения задачи двух тел, а третья находится на расстоянии, во много раз превосходящем размер тесной орбитальной пары. Четыре гравитационно связанных звезды всегда представляются в виде бинарной комбинации двойных звезд, и так далее. По общепринятому мнению, не существует никаких устойчивых орбит с участием трех тел сравнимых масс на сопоставимых расстояниях между телами.

9.5.5 Великолепная «восьмерка»

В самом начале 21-го века математики Ричард Монтгомери и Ален Шенсинье добавили еще одно красивое периодическое решение уравнений движения для трех тел, связанных гравитационным взаимодействием. Они пришли к совсем свежему и неожиданному (скорее даже сенсационному) открытию в теоретической небесной механике, обнаружив удивительно простую периодическую орбиту для ньютоновской задачи трех тел: три тела одинаковой массы гонятся друг за другом по высоко симметричной замкнутой траектории, имеющей вид цифры 8 (в системе отсчета центра масс). По-видимому это наиболее простое периодическое решение проблемы трех тел после описанных выше точных решений Лагранжа и Эйлера. Новое найденное регулярное движение характеризуется нулевым угловым моментом и очень богатым набором элементов симметрии. Одинаковые

тела (A, B, C на рис. 9.18) начинают движение из коллинеарной конфигурации, в которой они расположены на равных расстояниях друг от друга. Скорости тел A и C равны по величине и имеют одинаковое направление; скорость среднего тела B в два раза больше и направлена в противоположную сторону.

Тела точно воспроизводят эту исходную конфигурацию через определенный промежуток времени T , в течение которого каждое тело описывает целиком одну и ту же замкнутую восьмерку.

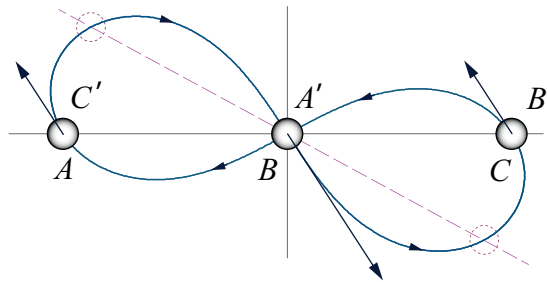


Рис. 9.18: Периодическое движение трех одинаковых тел, связанных гравитационным взаимодействием, вдоль замкнутой траектории в виде цифры 8.

Через интервал времени $T/3$ (треть полного периода движения) тела опять оказываются на той же прямой, что и в исходной коллинеарной конфигурации, но располагаются на этой прямой в ином порядке (положения C', A', B' на рис. 9.18). Таким образом, через каждый интервал $T/3$ данного движения происходят циклические перестановки трех тел.

Еще одна прямая линия (пунктирная линия на рис. 9.18), на которой все три тела оказываются одновременно через интервал времени $T/6$ после прохождения через исходную коллинеарную конфигурацию, расположена симметрично исходной относительно продольной оси восьмерки. Эта пунктирная линия образует такой же угол (в обратном направлении) по отношению к оси симметрии цифры восемь, как в исходной коллинеарной конфигурации A, B, C . В промежутке между этими коллинеарными конфигурациями (через интервал времени $T/12$) тела образуют равнобедренный треугольник.

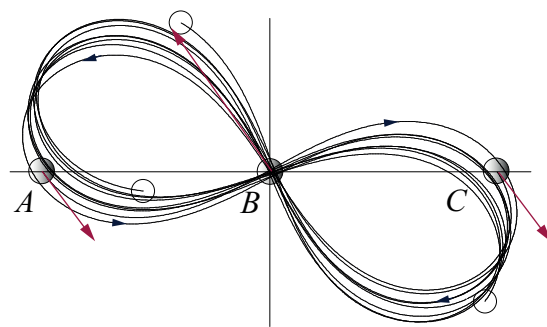


Рис. 9.19: Иллюстрация устойчивости движения по «восьмерке» трех тел одинаковой массы. Показаны почти повторяющиеся траектории всех тел на протяжении примерно двух циклов после небольшого возмущения регулярного периодического движения.

Наиболее удивительная и неожиданная черта движения по восьмерке заключается в его динамической устойчивости. Если слегка изменить начальные условия (при сохранении нулевого значения полного момента импульса), движение утрачивает периодичность, но общий его характер (восьмеркообразная траектория) сохраняется. На рис. 9.19 показаны траектории тел (на протяжении чуть более двух полных циклов) в движении, которое происходит при слегка измененных направлениях начальных скоростей. Движение продолжается неограниченно долго без столкновений. Это значит, что движение по восьмерке устойчиво по отношению к малым изменениям начальных скоростей и положений тел.

Более того, движение по восьмерке, будучи точно периодическим для трех тел равных масс, сохраняет свой характер в некотором диапазоне значений масс, когда три массы не в точности одинаковы. Это означает, что есть шанс, что такую орбиту в виде цифры восемь можно на самом деле обнаружить в некоторой звездной системе. Однако это весьма ничтожный шанс — где-то около одного случая в Галактике или даже во Вселенной!

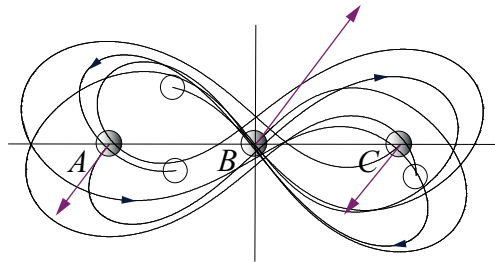


Рис. 9.20: Хаотическое движение в виде восьмерки в системе трех тел равных масс после сильного возмущения.

Общий характер движения в виде восьмерки сохраняется даже после довольно сильных возмущений: компьютерное моделирование показывает, что три тела продолжают гоняться друг за другом до бесконечности таким же образом в пределах ограниченного пространственной области без столкновений, как показано на рисунке 9.20.

Существование орбиты в виде восьмерки в системе трех тел побудило математиков к поискам подобных орбит с участием четырех и более масс. На данный момент найдены сотни точных решений для случая N равных масс, движущихся вдоль фиксированной плоской кривой. Тем не менее, все такие движения неустойчивы и, следовательно, не имеют практического значения.

Контрольные вопросы

1. **Кинематика планетных движений.** Какие конфигурации планет называются противостояниями? Какие конфигурации называются соединениями? Что такое сидерический и синодический периоды планеты и как они связаны между собой? Как можно объяснить видимые с Земли попятные движения планет?
2. **Звездные «рандеву».** По каким траекториям движутся звезды в ситуации парной встречи? По какой траектории движется одна из звезд в системе отсчета, связанной с второй звездой? Может ли при такой парной встрече образоваться двойная звезда?

звезда? Возможен ли при парной встрече планетных систем переход планеты, обращающейся вокруг одной из звезд, к новому «хозяину», т. е. к обращению вокруг другой звезды?

3. **Двойные и тройные звезды.** Если где-то на просторах галактики двойной звезде случится сблизиться с одиночной звездой, может ли при такой космической встрече образоваться тройная звезда? Может ли произойти «обмен партнерами», т. е. переход одной из компонент двойной звезды к одиночному «пришельцу», так что в результате встречи одиночная звезда превратится в двойную, и наоборот, двойная станет одиночной?
4. **На параллельных и встречных курсах.** В каком случае взаимные возмущения орбит двух планет будут сильнее при прочих равных условиях: когда планеты обращаются вокруг звезды в одном направлении, или когда они обращаются в противоположных направлениях? Почему?
5. **«Хоровод планет» в симметричной системе.** Представьте себе гипотетическую систему из n одинаковых массивных планет, расположенных в вершинах правильного n -угольника, в центре которого находится звезда. Почему в такой системе возможно движение планет по кеплеровым эллипсам, как если бы движение каждой из них происходило под действием центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния и создаваемой единственным неподвижным источником? Ведь на каждую планету, помимо силы тяготения звезды, действуют силы тяготения других (движущихся) планет. Какими должны быть начальные скорости планет, чтобы наблюдался такой «хоровод»? Устойчиво ли такое движение? Возможен ли такой «хоровод планет» в отсутствие центрального тела (звезды)?
6. **Лагранжевы частные решения задачи трех тел.** При каких условиях в системе трех массивных тел, связанных гравитационными взаимодействиями, возможны регулярные периодические движения? Приведите физическое объяснение возможности существования периодических движений в системе трех тел.

Часть II

Теоретические основы моделируемых явлений

Глава 10

Закономерности кеплеровых движений

В этой главе приведено более детальное (но достаточно элементарное) описание фундаментальных принципов и физических законов, лежащих в основе моделируемых явлений небесной механики и космической динамики. Количественная математическая формулировка физических законов и следствий из них позволяет предсказывать и объяснять результаты моделирующих экспериментов, а также рассчитывать значения параметров, которые должны быть введены в программы для получения желаемых результатов моделирования.

10.1 Введение. Аналитические и численные решения

Законы Кеплера дают математическое выражение поразительной простоте планетных движений, наблюдаемых в гелиоцентрической (связанной с Солнцем) системе отсчета. Найденное Ньютоном объяснение этой замечательной простоты на основе законов динамики можно без преувеличения считать началом современной физической науки. Это был поистине фантастический прорыв в понимании Природы. Но и поныне движения небесных тел — малых и больших планет Солнечной системы, их спутников, комет, астероидов, а в наше время также рукотворных космических кораблей и искусственных спутников, дают наиболее впечатляющие опытные подтверждения законам классической ньютоновской механики. В этой замечательной космической лаборатории все явления наблюдаются в наиболее «чистом» виде, не осложненные побочными факторами вроде трения, сопротивления воздуха и т.п., неизбежными в условиях земной лаборатории.

Теоретический фундамент, на котором построена небесная механика и ее современная ветвь — механика космического полета — это *законы Ньютона*, составляющие основу классической динамики, и *закон всемирного тяготения*. Второй закон Ньютона дает дифференциальные уравнения, математически описывающие движения тел. Замечательно, что для движения тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра (так называемая *задача Кеплера*), возможно получение решения уравнений движения в аналитическом виде. Расчет движения двух небесных тел, находящихся под действием сил взаимного тяготения, математически сводится к задаче о движении одного тела в центральном ньютоновом поле

тяготения. Поэтому так называемая *задача двух тел*, связанных между собой гравитационным взаимодействием, также имеет аналитическое решение, в отличие от задачи трех (и многих) тел, для которой аналитическое решение в общем случае не существует.

Любое движение в ньютоновом поле тяготения происходит по одному из так называемых *конических сечений* — кривых, которые получаются при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса получаются окружность, эллипс, парабола или гипербола. Периодическим движениям планет и спутников соответствуют замкнутые эллиптические (в частном случае круговые) орбиты. Предельному случаю сильно вытянутых эллиптических орбит со все более и более далеким вторым фокусом соответствует разомкнутая параболическая траектория (второй фокус эллипса при таком предельном переходе постепенно удаляется в бесконечность). Если же тело приближается к силовому центру из бесконечности, его движение происходит по одной из ветвей гиперболы. В этом случае, изменив направление движения под действием силы тяготения, тело снова уходит в бесконечность. Движение по уходящей в бесконечность ветви гиперболы можно также получить, сообщив находящемуся на конечном расстоянии телу достаточно большую скорость, превосходящую так называемую *скорость освобождения*.

Точные аналитические решения, подобные кеплерову движению в ньютоновском центральном поле тяготения, замечательны тем, что описываемые такими решениями движения оказываются весьма простыми. К сожалению, точные решения редко встречаются в физике. При наличии возмущающих воздействий (тяготение других планет, отличие силы тяготения небесного тела от строгой сферической симметрии и т.п.) уравнения движения становятся неинтегрируемыми. Присущее кеплеровым движениям «чудо» замкнутых орбит, равно как и замечательная их простота, бесследно исчезают. Математическое исследование движения неизмеримо усложняется.

Когда возмущающие воздействия малы по сравнению с основной силой тяготения, можно использовать приближенные аналитические методы. Кеплерово движение можно тогда принять в качестве нулевого приближения, считая, что возмущения приводят к сравнительно медленным изменениям параметров кеплеровой орбиты, и попытаться найти аналитические выражения для этих медленных изменений. Когда же возмущения нельзя считать малыми, как, например, в так называемой *задаче трех тел*, даже приближенные решения получить не удастся. В таких случаях остается полагаться только на численные методы решения уравнений движения.

Поясним идею численных методов расчета движения. Пусть для некоторого начального момента времени заданы положение и скорость рассматриваемого космического тела (например, планеты или космического аппарата), а также расположение всех небесных тел, сообщающих ему ускорение своими силами тяготения. На основе закона всемирного тяготения можно вычислить гравитационное ускорение, сообщаемое данному телу каждым небесным телом в отдельности, а значит, и полное ускорение как векторную сумму этих ускорений. Зная величину и направление скорости тела, можно, учитывая вычисленное ускорение и считая его постоянным, рассчитать положение и скорость тела через небольшой промежуток времени («шаг» интегрирования). Для найденного нового положения можно снова рассчитать ускорение тела, и затем по той же схеме рассчитать следующее положение тела и его скорость, и так далее. Таким путем можно шаг за шагом проследить все движение рассматриваемого тела. Единственное приближение, которое при этом приходится допускать, заключается в том, что в течение каждого небольшого промежутка времени (шага расчета) ускорение тела считается постоянным, тогда как на самом деле оно все время изменяется. Но точность расчета можно повысить, уменьшая

шаг интегрирования. Конечно, за повышение точности приходится платить увеличением объема вычислений.

Мы описали здесь простейший алгоритм (так называемый алгоритм Эйлера) численного интегрирования уравнений движения, известный также как метод ломаных. Этот метод дает сравнительно невысокую точность и приводит к накапливающимся ошибкам. Поэтому в компьютерных программах пакета «Движение космических тел» использован несколько более сложный алгоритм численного интегрирования уравнений движения (метод Рунге—Кутты четвертого порядка точности, лишенный отмеченных недостатков, присущих простому методу Эйлера).

В моделирующих компьютерных программах выполняется численное интегрирование уравнений движения даже в тех случаях, когда существуют аналитические решения. Результаты аналитического решения используются лишь для автоматического выбора оптимального масштаба отображения изучаемого движения на экране компьютера. Другими словами, никаких законов сохранения и законов Кеплера в моделирующие программы не заложено — алгоритм численного интегрирования основан лишь на втором законе Ньютона и законе всемирного тяготения. Именно в этом смысле можно говорить, что эти программы дают возможность экспериментальной проверки законов Кеплера (на основе *вычислительного* эксперимента) для движения тела в центральном поле тяготения и для движения двух взаимодействующих тел.

При добавлении еще одного тела к системе двух взаимодействующих тел задача нахождения их движения в общем случае становится аналитически неразрешимой. Другими словами, не существует формул, представляющих движение тел и позволяющих вычислить их положение в пространстве при произвольных начальных условиях. Конечно, дело здесь не только в математической сложности задачи, но и в исключительной сложности самих движений. Между тем, при численном решении такой задачи никаких принципиальных математических затруднений не возникает. Задача трех тел численно решается так же просто, как и задача двух тел; лишь увеличивается объем необходимых вычислений. Однако следует иметь в виду, что численные методы далеко не всеисильны. Для расчета движения и предсказания положения тел через большой промежуток времени требуется очень точно знать начальное состояние. И тем более численные методы не позволяют изучать общие свойства движений небесных тел.

10.2 Закон всемирного тяготения и гравитационное взаимодействие шарообразных тел

В небесной механике и космической динамике (механике космического полета) изучается движение тел (звезд, планет, комет, естественных и искусственных спутников, космических аппаратов), которое происходит главным образом под действием сил всемирного тяготения. Согласно ньютоновскому закону тяготения, две материальные точки притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными массам m_1 и m_2 этих точек и обратно пропорциональными *квадрату* расстояния r между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (10.1)$$

Коэффициент пропорциональности в выражении (10.1) называется *постоянной тяготения* или *гравитационной постоянной*. Значение гравитационной постоянной зависит от выбора единиц для измерения силы, массы и расстояния. В Международной системе единиц (СИ) постоянная тяготения равна $6.670 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

Для тел конечных размеров закон тяготения (10.1) справедлив, когда расстояния между телами велики по сравнению с их размерами, что позволяет рассматривать такие тела как материальные точки. Но можно показать, что гравитационное взаимодействие шарообразных тел описывается той же формулой (10.1) при любых расстояниях, если распределение масс в телах сферически симметрично. Этому условию с хорошей точностью удовлетворяют звезды и большинство планет. Поэтому такие небесные тела притягивают так, будто вся их масса сосредоточена в центре, и формулу (10.1) можно применять для определения силы, действующей на их спутники даже тогда, когда спутники вплотную приближаются к ним. При этом под r следует понимать расстояние до центра притяжения (центра звезды или планеты). В частности, формула (10.1) применима к любым телам, находящимся как над Землей, так и на ее поверхности. Поэтому решение задачи Кеплера (как аналитическое, так и численное, демонстрируемое моделирующей программой) применимо не только к движению планет вокруг Солнца, где расстояния между тяготеющими телами велики по сравнению с их размерами, но и к движению спутников планет по низким орбитам, так как распределение плотности вещества внутри планет с хорошей точностью можно считать сферически симметричным. При этом, разумеется, нет необходимости, чтобы сам спутник (или космический корабль) был сферически симметричным, так как в любом случае его размеры малы по сравнению с расстоянием до центра планеты, и его можно рассматривать как материальную точку. Другими словами, поле тяготения планеты на протяжении размеров корабля можно полагать однородным, а силу тяготения считать приложенной в центре масс корабля.

Сила тяжести mg , действующая на тело массы m вблизи поверхности Земли, получается из закона всемирного тяготения (10.1), если в него вместо r подставить радиус Земли $R = 6370$ км, а вместо m_2 — массу Земли $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ кг. Поэтому ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли (одинаковое для всех тел) можно выразить через массу Земли, ее радиус и гравитационную постоянную: $g = GM/R^2 \approx 9.8$ м/с². В задачах о движении спутников Земли и баллистических снарядов бывает удобно при расчетах в формулу (10.1) вместо произведения GM подставлять эквивалентную величину gR^2 , что дает более удобное выражение для силы земного тяготения, действующей на тело массы m на расстоянии r от центра Земли: $F = mgR^2/r^2$.

10.3 Потенциальная энергия тела в поле тяготения

Потенциальная энергия тела в поле тяготения измеряется работой, которую совершает сила тяготения при перемещении тела из данной точки в точку, где эта энергия принята равной нулю. Точка нулевого значения потенциальной энергии может быть выбрана произвольно. Обычно в качестве таковой выбирают точку на поверхности планеты либо бесконечно удаленную точку, где сила тяготения обращается в нуль. В задачах небесной механики и космической динамики удобно выбрать точку нулевой потенциальной энергии в «бесконечности», т. е. на бесконечно большом расстоянии r от центра небесного тела, создающего гравитационное поле (планеты при изучении движения спутников или Солнца при изучении движения планет). Тогда потенциальная энергия $U(r)$ тела массы m на конечном расстоянии r от центра планеты, имеющей массу M , будет отрицательна (при удалении тела в бесконечность сила притяжения совершает отрицательную работу), а ее значение обратно пропорционально *первой* степени расстояния r до силового центра:

$$U(r) = - \int_r^{\infty} G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r}. \quad (10.2)$$

Это выражение применимо при значениях расстояния r от центра небесного тела, превосходящих его радиус R (при $r \geq R$). Для частного случая тела в поле тяготения Земли в общей формуле (10.2) можно заменить произведение GM эквивалентной величиной gR^2 , где $R = 6370$ км, а $g = GM/R^2 \approx 9.8$ м/с².

$$U(r) = -\frac{mgR^2}{r}. \quad (10.3)$$

10.4 Круговая скорость и скорость освобождения

Круговую скорость $v_{кр}$ для орбиты, проходящей на расстоянии r от центра планеты, можно найти, приравнявая центростремительное ускорение $v_{кр}^2/r$ ускорению GM/r^2 , которое сообщает сила тяготения спутнику, находящемуся на расстоянии r от силового центра:

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}. \quad (10.4)$$

Значение круговой скорости обратно пропорционально корню квадратному из радиуса орбиты и не зависит от массы спутника. Период обращения по круговой орбите можно найти, разделив длину орбиты $2\pi r$ (длину окружности радиуса r) на постоянную скорость $v_{кр}$ движения по этой орбите:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{кр}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}. \quad (10.5)$$

Как видно из (10.5), квадрат периода обращения пропорционален кубу радиуса орбиты (это частный случай третьего закона Кеплера). Период обращения спутника обратно пропорционален квадратному корню из массы планеты. Зависимость периода обращения от массы планеты дает простой и наиболее точный способ «взвешивания» планеты (т. е. определения ее массы) по измерениям периодов обращения ее спутников.

Значение круговой скорости $v_{кр}$ для гипотетической предельно низкой орбиты, стелющейся над самой поверхностью Земли, иногда называют *первой космической* скоростью $v_I = \sqrt{gR} \approx 7.9$ км/с. Движение спутника по такой орбите было бы возможно только в идеализированном случае полного отсутствия атмосферы.

Скорость освобождения $v_{осв}$ на заданном расстоянии r от центра планеты (т. е. минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно удалилось в бесконечность) может быть рассчитана с помощью закона сохранения энергии и выражения (10.2). Минимальная скорость тела в точке r , необходимая для преодоления сил тяготения и удаления в бесконечность, отвечает нулевой скорости на бесконечности (и нулевому значению кинетической энергии). Потенциальная энергия на бесконечности тоже равна нулю. Поэтому тело, которому сообщена скорость, равная скорости освобождения, имеет нулевую полную энергию:

$$\frac{mv_{осв}^2}{2} - G\frac{mM}{r} = 0, \quad (10.6)$$

откуда

$$v_{осв} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}}. \quad (10.7)$$

Сравнивая это выражение с формулой (10.4), видим, что скорость освобождения (10.7) на любом расстоянии r от силового центра в $\sqrt{2} \approx 1.41$ раз превышает круговую скорость. Ее значение не зависит от массы тела. В закон сохранения энергии, из которого

получено значение $v_{\text{осв}}$, входит только величина скорости освобождения, но не ее направление. Поэтому тело удаляется в бесконечность при произвольном направлении сообщаемой ему скорости, если только ее величина v_0 равна скорости освобождения $v_{\text{осв}}$. Удаление тела в бесконечность происходит по некоторой параболической траектории, конкретный вид которой зависит от направления начальной скорости, либо по прямой, если эта скорость направлена по радиусу (вертикально вверх).

Значение скорости освобождения $v_{\text{осв}}$ для начальной точки на поверхности Земли (т. е. при $r = R$) обычно называют *второй космической* скоростью: $v_{\text{II}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2} v_{\text{I}} \approx 11.2$ км/с.

Если начальная скорость v_0 превышает скорость освобождения, тело удаляется в бесконечность по гиперболической траектории. На бесконечно большом расстоянии его движение будет равномерным и прямолинейным. Постоянная скорость v_{∞} этого движения направлена по асимптоте гиперболы. Ее значение можно определить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_{\infty} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{r}} = \sqrt{v_0^2 - v_{\text{осв}}^2}. \quad (10.8)$$

Скорость тела на бесконечно большом расстоянии v_{∞} (10.8) называют *остаточной скоростью* либо *гиперболическим избытком* скорости.

10.5 Геометрические свойства кеплеровых орбит

В общем случае движение тела под действием ньютоновской силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра, происходит по одному из *конических сечений* — окружности или эллипсу, параболе, гиперболе. Уравнение траектории кеплерова движения можно записать в полярных координатах в следующем виде:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (10.9)$$

Здесь r — расстояние от силового центра (длина радиуса-вектора), φ — угол, образуемый радиусом-вектором с осью симметрии траектории (с направлением из центра на ближайшую точку орбиты). Величина p в формуле (10.9) имеет размерность длины. Она называется *фокальным параметром* орбиты. Безразмерная величина e называется *эксцентриситетом* орбиты. При $e = 0$ из (10.9) получаем $r = p$ — расстояние до орбиты не зависит от φ , т. е. орбита в данном случае представляет собой окружность — для круговой орбиты эксцентриситет равен нулю. Во всех остальных случаях параметр p равен расстоянию до орбиты при $\varphi = \pm\pi/2$, когда $\cos \varphi = 0$ (в этом заключается геометрический смысл фокального параметра). При $e < 1$ уравнение (10.9) соответствует эллипсу (рис. 10.1), при $e = 1$ — параболе, при $e > 1$ — гиперболе. Вывод формулы (10.9) из законов динамики и закона всемирного тяготения приведен в разделах 11.2 (стр. 187) и 11.5 (стр. 198).

Эллиптическую орбиту можно характеризовать, наряду с параметрами p и e , также расстоянием r_P от силового центра до ближайшей к силовому центру точки P , называемой *перигелием* для планетных орбит и *перигеем* для орбит спутников Земли, и расстоянием r_A от силового центра до наиболее удаленной точки A орбиты, называемой соответственно *афелием* или *апогеем* (рис. 10.1). Точке P соответствует значение $\varphi = 0$,

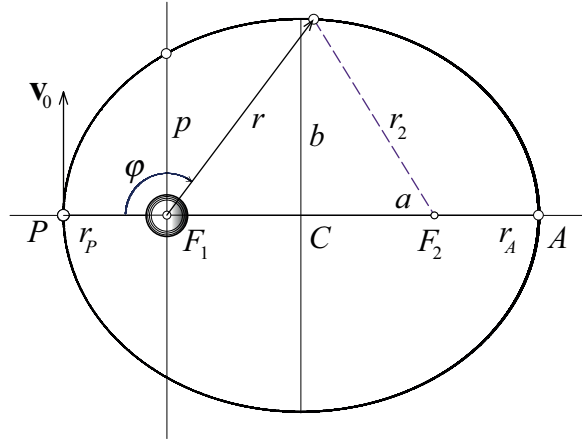


Рис. 10.1: Элементы эллиптической орбиты кеплерова движения.

точке A — значение $\varphi = \pi$. Подставляя эти значения в (10.9), получаем

$$r_P = \frac{p}{1+e}, \quad r_A = \frac{p}{1-e}. \quad (10.10)$$

Эксцентриситет e орбиты выражается через r_P и r_A следующим образом:

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}. \quad (10.11)$$

Сумма $r_A + r_P$ дает большую ось эллипса $2a$:

$$2a = r_A + r_P = \frac{2p}{1-e^2}. \quad (10.12)$$

Такое же значение имеет сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса: $r_1 + r_2 = 2a$. Расстояния от центра эллипса до фокусов (CF_1 и CF_2 на рис. 10.1) равны произведению большой полуоси на эксцентриситет:

$$CF_1 = a - r_P = ae. \quad (10.13)$$

Малая полуось эллипса b выражается через большую полуось a и эксцентриситет e соотношением

$$b = a\sqrt{1-e^2}. \quad (10.14)$$

10.6 Начальные условия и параметры кеплеровых орбит

Определим параметры орбиты спутника, которому на расстоянии r_0 от силового центра (центра планеты) сообщается горизонтальная скорость \mathbf{v}_0 . Если начальная скорость равна найденной выше круговой скорости $v_{кр}$ (10.4), орбита представляет собой окружность (см. рис. 10.1). Когда начальная скорость v_0 превышает круговую, перигей эллиптической орбиты расположен в начальной точке P (рис. 10.1), апогей — на противоположном конце A прямой, проходящей через начальную точку и центр планеты.

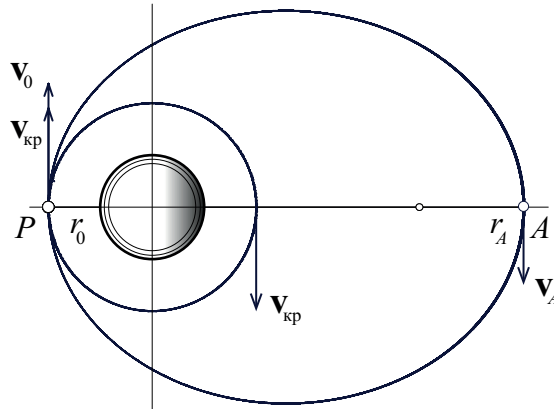


Рис. 10.2: Круговая и эллиптическая орбиты спутников, запущенных из начальной точки P с трансверсальным направлением начальной скорости.

Для нахождения расстояния r_A до апогея (и скорости v_A в апогее) воспользуемся законом сохранения энергии и законом сохранения момента импульса, который справедлив при движении тела в любом центральном силовом поле. Напомним, что сохранение момента импульса приводит к закону площадей (второму закону Кеплера). Приравнявая значения момента импульса в начальной точке P и в апогее A орбиты, получаем

$$v_0 r_0 = v_A r_A, \quad (10.15)$$

где v_A — скорость спутника в апогее. Приравнявая значения энергии в начальной точке и в апогее, получаем второе уравнение:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = \frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{r_A}.$$

Выразим скорость в апогее v_A через v_0 с помощью (10.15) и подставим в уравнение закона сохранения энергии. Собирая члены с v_0 в левой его части, а остальные члены — в правой части, получим

$$v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_A^2} \right) = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_A} \right).$$

Из этого квадратного уравнения можно найти неизвестное расстояние r_A до апогея. Один из его корней $r_A = r_0$ соответствует начальной точке (перигею). Для нахождения второго корня, соответствующего апогею, представим разность квадратов в левой части уравнения как произведение суммы на разность, и сократим обе части на $(1 - r_0/r_A)$. Учитывая, что $GM/r_0 = v_{кр}^2$, расстояние до перигея орбиты можно выразить следующим соотношением:

$$r_A = \frac{r_0}{2(v_{кр}/v_0)^2 - 1} = \frac{r_0}{(v_{осв}/v_0)^2 - 1}. \quad (10.16)$$

При $v_0 = v_{кр}$ из (10.16) имеем $r_A = r_0$ — спутник движется по круговой орбите. По мере увеличения начальной скорости расстояние до апогея становится все больше. При приближении значения начальной скорости к скорости освобождения $v_{осв} = \sqrt{2} v_{кр}$

эллиптическая орбита неограниченно вытягивается, и ее апогей уходит в бесконечность — траектория становится параболической. При еще больших значениях начальной скорости движение спутника будет происходить по гиперболической траектории. Формула (10.16) в этом случае неприменима. Если же начальная скорость меньше круговой скорости $v_{кр}$, из формулы (10.16) получаем $r_A < r_0$ — начальная точка будет апогеем орбиты, а значение r_A из (10.16) соответствует расстоянию до перигея, который в этом случае лежит на противоположном по отношению к начальной точке конце большой оси эллипса. Большая полуось эллиптической орбиты дается следующим выражением:

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_A) = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - v_0^2/(2v_{кр}^2)} = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - v_0^2/v_{осв}^2}. \quad (10.17)$$

При $v_0 = v_{кр}$ из (10.17) получаем, естественно, $a = r_0$ — эллипс превращается в окружность, и большая полуось совпадает с радиусом. Когда $v_0 \rightarrow \sqrt{2}v_{кр}$, т. е. когда начальная скорость приближается к скорости освобождения $v_{осв}$, согласно уравнению (10.17), большая полуось орбиты $a \rightarrow \infty$ — эллипс растягивается до бесконечности. При $v_0 \rightarrow 0$ формула (10.17) дает $a \rightarrow r_0/2$ — по мере уменьшения начальной скорости эллиптическая орбита сжимается и вырождается в отрезок прямой от начальной точки до силового центра. Фокусы такого предельно сплющенного эллипса совпадают с концами отрезка.

Эксцентриситет рассматриваемой эллиптической орбиты с помощью формулы (10.17) можно выразить через трансверсальную начальную скорость v_0 и круговую скорость $v_{кр}$ для данной начальной точки следующим образом:

$$e = \frac{a - r_0}{a} = \frac{v_0^2}{v_{кр}^2} - 1. \quad (10.18)$$

Глава 11

Законы динамики и кеплеровы движения

В этой главе закономерности кеплеровых движений рассматриваются как следствия фундаментальных законов физики. Приводится вывод законов Кеплера на основе законов динамики и закона всемирного тяготения. Обсуждаются применения фундаментальных законов динамики в небесной механике и механике космического полета.

11.1 Момент импульса и секториальная скорость

Момент импульса материальной точки («частицы») относительно начала координат по определению равен векторному произведению радиуса-вектора \mathbf{r} частицы на вектор импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (11.1)$$

Скорость изменения момента импульса со временем $d\mathbf{L}/dt$ найдем, дифференцируя по времени правую часть (11.1) как произведение двух сомножителей \mathbf{r} и $m\mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (11.2)$$

Первый член в правой части (11.2) равен нулю. В самом деле, производная $d\mathbf{r}/dt$ представляет собой скорость \mathbf{v} частицы, а векторное произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ равно нулю. Во втором члене ускорение частицы можно с помощью второго закона Ньютона выразить через силу \mathbf{F} , сообщаемую частице это ускорение

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

В результате получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.3)$$

— скорость изменения момента импульса частицы равна моменту действующей на нее силы \mathbf{F} относительно начала координат. При движении частицы в центральном поле сила направлена вдоль радиуса: $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$. Поэтому момент силы \mathbf{F} относительно силового центра равен нулю: $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Таким образом, как видно из (11.3), в любом центральном поле

момент импульса частицы относительно силового центра остается неизменным (сохраняется).

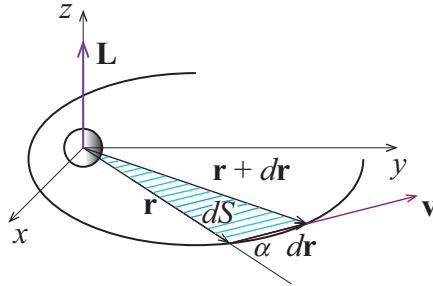


Рис. 11.1: Геометрический смысл момента импульса частицы.

Рассмотрим геометрический смысл момента импульса частицы, совершающей орбитальное движение (рис. 11.1). Представим скорость \mathbf{v} в определении момента импульса (11.1) как отношение вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ к соответствующему промежутку времени dt :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt. \quad (11.4)$$

Векторное произведение $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ в правой части (11.4) представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат сомножители \mathbf{r} и $d\mathbf{r}$ (т. е. \mathbf{r} и \mathbf{v}). Его модуль

$$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = r dr \sin \alpha = 2dS \quad (11.5)$$

представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника, заштрихованного на рис. 11.1. В самом деле, произведение dr на синус угла α между векторами \mathbf{r} и $d\mathbf{r}$ равно высоте этого треугольника, опущенной на сторону \mathbf{r} . Отношение dS/dt элементарной площади dS к промежутку времени dt , в течение которого радиус-вектор \mathbf{r} «заметает» эту площадь, называется *секториальной* (или *секторной*) скоростью. Таким образом, из (11.5) следует, что модуль момента импульса пропорционален секториальной скорости:

$$L = 2m \frac{dS}{dt}. \quad (11.6)$$

Сохранение *направления* вектора момента импульса тела при движении в центральном поле означает, что траектория представляет собой *плоскую* кривую. Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору \mathbf{L} . Эта плоскость задается двумя векторами: радиусом-вектором начального положения \mathbf{r}_0 и вектором начальной скорости \mathbf{v}_0 . Сохранение *модуля* момента импульса означает неизменность *секториальной скорости*. Применительно к кеплерову движению в центральном поле сохранение секториальной скорости (11.6) известно как второй закон Кеплера.

Секториальная скорость постоянна для любых кеплеровых орбит, в том числе и для разомкнутых параболических и гиперболических траекторий. Таким образом, второй закон Кеплера есть следствие сохранения момента импульса частицы при движении в центральном силовом поле. Подчеркнем, что это свойство имеет место для *любого* центрального поля, а не только для ньютонова поля тяготения. Напротив, утверждения, выражаемые первым и третьим законами Кеплера, справедливы только для движения в *кулоновом* (и ньютоновом) центральном поле, где сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра.

Применение закона сохранения момента импульса (второго закона Кеплера) совместно с законом сохранения энергии позволяет легко получать ответы на многие вопросы небесной механики и космической динамики, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений движения.

11.2 Аналитический вывод 1-го закона Кеплера

Ниже приводится динамическое доказательство того, что траектории в ньютоновском центральном поле тяготения представляют собой конические сечения. Для вывода формы траектории тела на основе законов динамики удобнее использовать вместо дифференциальных уравнений движения их первые интегралы, а именно законы сохранения момента импульса и энергии.

Траектория движения тела в центральном поле представляет собой плоскую кривую. Это следует, как уже было сказано в предыдущем разделе, из сохранения направления вектора момента импульса. Для задания положения тела в этой плоскости будем использовать полярные координаты r и φ . Начало координат выберем в силовом центре. Уравнение траектории в полярных координатах имеет вид $r = r(\varphi)$, т. е. оно выражает расстояние r от силового центра как функцию угла φ между текущим радиусом-вектором и некоторым фиксированным направлением в этой плоскости (полярной осью).

Выразим величину L момента импульса частицы в полярных координатах:

$$L = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mrv_{\perp} = mr^2\dot{\varphi}. \quad (11.7)$$

Здесь $v_{\perp} = r\dot{\varphi}$ представляет собой поперечную (азимутальную) проекцию скорости частицы (проекцию на направление, перпендикулярное к радиусу-вектору). Поскольку при движении момент импульса L остается неизменным, для любой точки траектории угловую скорость $\dot{\varphi}$ можно с помощью уравнения (11.7) выразить через расстояние r от начала координат (от силового центра) и постоянное значение L момента импульса:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \quad (11.8)$$

Далее мы используем закон сохранения энергии. В выражении $mv^2/2$ для кинетической энергии квадрат скорости частицы представим как сумму квадратов ее радиальной (\dot{r}) и поперечной ($r\dot{\varphi}$) проекций: $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Подставляя $\dot{\varphi}$ из уравнения (11.8) во второе слагаемое, получаем следующее выражение для полной энергии частицы $E_{\text{kin}} + U$ в полярных координатах:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E. \quad (11.9)$$

Постоянные значения полной энергии E и момента импульса L в уравнении (11.9) определяются начальными условиями. Уравнение (11.9) не содержит угловой переменной φ . Поэтому его можно трактовать как закон сохранения энергии для одномерного (радиального) движения частицы массы m в некоторой эффективной потенциальной яме, где зависимость потенциальной энергии от r дается выражением $U_{\text{eff}}(r) = -GmM/r + L^2/(2mr^2)$. Графики эффективной потенциальной энергии $U_{\text{eff}}(r)$ и каждого из ее слагаемых показаны на рис. 11.2.

Левый берег этой потенциальной ямы очень крутой и бесконечно высокий: эффективная потенциальная энергия стремится к бесконечности ($U_{\text{eff}}(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$) благодаря второму слагаемому $L^2/(2mr^2)$. Пологий правый берег обусловлен членом $-GmM/r$

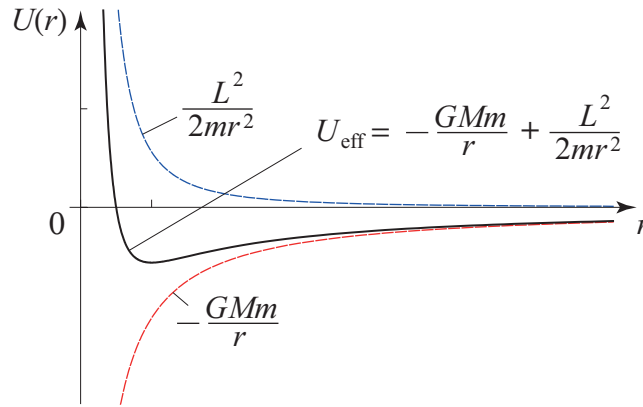


Рис. 11.2: График эффективной потенциальной энергии $U_{\text{eff}}(r)$ для радиальной составляющей движения тела в центральном поле тяготения.

в $U_{\text{eff}}(r)$ и поднимается лишь до нулевой отметки потенциальной энергии: $U_{\text{eff}}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому при положительных значениях полной энергии приходящая из бесконечности частица приближается к силовому центру до некоторого минимального расстояния r_{min} , где полная энергия сравнивается с $U_{\text{eff}}(r)$, и затем снова удаляется в бесконечность.

При отрицательных значениях полной энергии частица «заперта» в потенциальной яме и совершает периодическое движение между ее берегами. При этом расстояние r до силового центра изменяется в некоторых конечных пределах от r_{min} до r_{max} . Таким случаям соответствуют орбиты конечных размеров, при движении по которым угловая переменная φ совершает «обход» по полному кругу в пределах от 0 до 2π с определенным периодом. Центральное кулоново поле, в котором сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, замечательно тем, что в нем периоды радиального и углового движений совпадают при любых начальных условиях, соответствующих отрицательным значениям полной энергии. Поэтому орбита оказывается замкнутой.

При любом искажении (возмущении) кулонова поля (например, при отклонении формы планеты от идеальной сферической симметрии) периоды радиального и углового движений уже не совпадают, и «чудо» замкнутых кеплеровых орбит бесследно исчезает. Отмеченное выше совпадение периодов радиального и углового движений (такого рода совпадения называют «вырождением») связано с определенной («скрытой») симметрией кулонова поля и существованием обусловленного этой симметрией инварианта (сохраняющейся при движении величины).

Соответствующий этой симметрии инвариант (так называемый вектор Рунге — Ленца или вектор Лапласа) можно назвать *динамическим*, поскольку его существование связано с определенным законом силы (обратная пропорциональность квадрату расстояния), тогда как такие инварианты как момент импульса и полная энергия могут быть отнесены к *геометрическим*, поскольку их существование обусловлено общими свойствами симметрии пространства и времени (изотропностью пространства и однородностью времени соответственно).

Чтобы найти уравнение траектории в полярных координатах $r = r(\varphi)$, исключим время из уравнения (11.9). Рассматривая r как функцию φ , а не как явную функцию времени

t , можем написать:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2}. \quad (11.10)$$

Здесь мы выразили угловую скорость $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ через момент импульса L с помощью уравнения (11.8). Подставляя это выражение для \dot{r} в уравнение (11.9), получаем дифференциальное уравнение для функции $r(\varphi)$, которая определяет искомую форму траектории частицы. Это уравнение можно упростить, если вместо $r(\varphi)$ ввести новую неизвестную функцию $\rho = \rho(\varphi)$ с помощью соотношения $\rho = 1/r$. Поскольку

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = -r^2 \frac{d\rho}{d\varphi},$$

из уравнения (11.10) находим, что

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad \dot{r}^2 = \frac{L^2}{m^2} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2. \quad (11.11)$$

Подставляя это выражение для \dot{r}^2 в уравнение (11.9), получаем следующее дифференциальное уравнение для $\rho(\varphi)$:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 - \frac{2Gm^2M}{L^2} \rho = \text{const}. \quad (11.12)$$

В этом уравнении первого порядка переменные ρ и φ разделяются, и потому его решение может быть найдено стандартными методами.

Однако можно добиться еще большего упрощения, если продифференцировать это уравнение по φ , заменяя его следующим уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C, \quad (11.13)$$

где введено обозначение $C = Gm^2M/L^2$.

Это уравнение с постоянными коэффициентами часто встречается в различных задачах. В частности, аналогичным уравнением описываются собственные колебания гармонического осциллятора. Общее решение этого уравнения хорошо известно:

$$\rho(\varphi) = C + A \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (11.14)$$

где произвольные постоянные A и φ_0 определяются из начальных условий. Возвращаясь теперь к исходной искомой функции $r = 1/\rho$, получаем:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (11.15)$$

где использованы следующие обозначения:

$$p = \frac{1}{C} = \frac{L^2}{Gm^2M}, \quad e = \frac{A}{C}. \quad (11.16)$$

Уравнение (11.15) выражает искомую форму траектории тела, движущегося в ньютоновом центральном поле тяготения, сила которого спадает обратно пропорционально квадрату расстояния. Из аналитической геометрии известно, что выражение (11.15)

представляет собой уравнение конического сечения, т. е. кривой, которая образуется при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса, в сечении получаются окружность, эллипс, парабола или гипербола. В уравнении (11.15) $\varphi - \varphi_0$ есть угол между радиусом-вектором и осью симметрии траектории. Эта ось направлена из силового центра в ближайшую к нему точку траектории. Если полярную ось системы координат выбрать вдоль этой оси симметрии, то константа φ_0 в уравнении (11.15) обращается в нуль. При таком выборе направления полярной оси уравнение (11.15) совпадает с приведенным в разделе 10.5 каноническим уравнением (10.9) конических сечений.

Входящая в уравнение (11.15) величина $p = L^2/(Gm^2M)$ имеет размерность длины. Она называется *фокальным параметром* конического сечения. Безразмерная величина e называется *эксцентриситетом* конического сечения. При $e = 0$ из уравнения (11.15) следует, что $r = p = \text{const}$, т. е. расстояние до силового центра не зависит от φ и орбита представляет собой окружность. При $e < 1$ уравнению (11.15) соответствует эллипс (см. рис. 10.1 на стр. 181), при $e = 1$ — парабола, и при $e > 1$ — гипербола.

Параметры орбиты p и e можно выразить через сохраняющиеся при движении динамические параметры, а именно полную энергию E и момент импульса L , и через физические параметры системы — значения масс M и m . В соответствии с (11.16) фокальный параметр p зависит только от момента импульса L : $p = L^2/(GMm^2)$. Ниже мы получим значения большой полуоси a (для замкнутых орбит) и эксцентриситета орбиты e .

Пусть r_P — расстояние между силовым центром и ближайшей к нему точкой траектории (перигелием, перигеем или в общем случае перицентром), а v_P — скорость в этой точке. (В этой точке вектор скорости \mathbf{v} перпендикулярен радиусу-вектору \mathbf{r}). Тогда полную энергию можно записать следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} = \frac{L^2}{2mr_P^2} - \frac{GMm}{r_P}. \quad (11.17)$$

Мы выразили в (11.17) скорость в перигее через момент импульса $L = mr_Pv_P$. Из уравнения (11.15) следует, что расстояние r_P до перигея для орбиты с заданными параметрами p и e равно $p/(1 + e)$. Подставляя $r_P = p/(1 + e)$ и $L^2 = pGMm^2$ из (11.16) в уравнение (11.17), получаем:

$$E = -(1 - e^2)\frac{GMm}{2p} = -\frac{GMm}{2a}. \quad (11.18)$$

В последнем равенстве использовано соотношение $a = p/(1 - e^2)$ между большой полуосью a и параметрами эллипса p и e . Для конечных замкнутых орбит $e < 1$ и величина a в (11.18) положительна. Мы видим, что замкнутым орбитам соответствуют отрицательные значения полной энергии: $E < 0$. Из уравнения (11.18) следует, что большая полуось a для таких замкнутых эллиптических орбит зависит только от величины полной энергии E : $a = -GMm/(2E)$. Таким образом, большая полуось и, следовательно, период обращения T однозначно определяются полной энергией и не зависят от момента импульса. Период обращения одинаков для всех орбит с данным значением полной энергии (или большой полуоси), независимо от эксцентриситета орбиты. В частном случае круговой орбиты $r = a$, и уравнение (11.18) совпадает с известным выражением $E = -GMm/(2r)$ для полной энергии спутника на круговой орбите.

При равном нулю значении полной энергии ($E = 0$) уравнение (11.18) дает $e = 1$. Коническое сечение с $e = 1$ — это парабола. Положительным значениям полной энергии ($E > 0$) соответствуют эксцентриситеты $e > 1$, т. е. гиперболические траектории. Если

применить соотношение $a = p/(1 - e^2)$ к гиперболе ($e > 1$), для a получается отрицательное значение. В этом случае $|2a|$ имеет геометрический смысл кратчайшего расстояния между двумя ветвями гиперболы (измеряемого вдоль главной оси, проходящей через фокусы).

В общем случае из уравнения (11.18) можно получить выражения для большой полуоси a и эксцентриситета e орбиты через постоянные значения полной энергии E и момента импульса L . Подставляя $p = L^2/(GMm^2)$ в уравнение (11.18), получаем:

$$a = -\frac{GMm}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}. \quad (11.19)$$

Как видно из (11.18), большая полуось a эллиптической орбиты однозначно определяется энергией E : все орбиты с данным значением энергии имеют равные большие полуоси и, следовательно, равные периоды обращения.

11.3 Третий закон Кеплера

Чтобы доказать третий закон Кеплера для эллиптических орбит, можно подсчитать период обращения T , разделив площадь эллипса $S = \pi ab$ на секториальную скорость dS/dt . Как было показано ранее, секториальная скорость пропорциональна модулю момента импульса: $L = 2mdS/dt$. Поскольку малая полуось эллипса b равна $\sqrt{1 - e^2}$, а $a = p/(1 - e^2)$, для периода обращения получаем следующее выражение:

$$T = \frac{2\pi p^2}{L(1 - e^2)^{3/2}}.$$

Подставляя сюда $L = m\sqrt{GMp}$, получаем, что фокальный параметр p и эксцентриситет e входят в выражение для периода в комбинации $p/(1 - e^2)$, значение которой равно большой полуоси a . Следовательно период обращения по эллиптической орбите зависит только от ее большой полуоси:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \quad (11.20)$$

В соответствии с этим уравнением, квадрат периода обращения пропорционален кубу большой полуоси эллиптической орбиты. Это и есть общепринятая формулировка третьего закона Кеплера.

В качестве примера практического применения третьего закона Кеплера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Баллистический снаряд запускается вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью, модуль которой равен круговой скорости для предельно низкой орбиты (т. е. первой космической скорости): $v_0 = v_1 = \sqrt{gR}$. Сколько времени продолжится полет снаряда от пуска до падения на Землю?

Решение. Из закона сохранения энергии находим, что точка максимального подъема снаряда при $v_0 = v_1$ находится над поверхностью Земли на расстоянии, равном радиусу Земли R . Траектория снаряда представляет собой половину прямолинейного отрезка, соединяющего центр Земли с точкой наивысшего подъема снаряда. Этот отрезок можно рассматривать как предельный случай очень узкой эллиптической орбиты, фокусы которой совпадают с концами отрезка. Чтобы движение по такому эллипсу было

в принципе возможно, вся масса Земли должна быть сосредоточена в ее центре. Большая ось этого вырожденного эллипса равна $2R$. Полный период обращения T_0 по нему был бы таким же, как по круговой орбите с диаметром, равным большой оси эллипса: $T_0 = 2\pi R/v_I = 2\pi\sqrt{R/g}$. В данной задаче нас интересует промежуток времени, в течение которого снаряд проходит половину такого вырожденного эллипса, наиболее удаленную от силового центра.

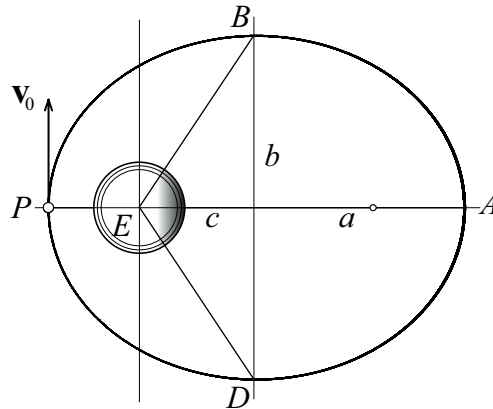


Рис. 11.3: К вычислению площади, ометаемой радиусом-вектором баллистического снаряда за время прохождения снарядом половины эллиптической орбиты.

Чтобы найти это время, можно воспользоваться вторым законом Кеплера. Рассмотрим эллиптическую орбиту, большая и малая полуоси которой равны a и b соответственно (рис. 11.3). При движении вдоль нее радиус-вектор ометает равные площади за равные промежутки времени. Нам нужно найти промежуток времени T_1 , в течение которого конец радиуса-вектора проходит вдоль удаленной от силового центра половины этого эллипса — от одного конца B его малой оси через апогей A до другого конца D малой оси, ометая при этом соответствующую площадь (рис. 11.3). Эта площадь (обозначим ее S_1) образована правой половиной эллипса и треугольником BED , основанием которого служит малая ось BD эллипса, а вершиной — фокус E , расположенный в силовом центре. Высота c такого треугольника равна ea , где a — большая полуось и e — эксцентриситет эллипса.

Таким образом, отношение промежутка времени T_1 к периоду обращения T_0 равно отношению соответствующих площадей S_1 и $S_0 = \pi ab$:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{S_1}{S_0} = \frac{\pi ab/2 + eab}{\pi ab} = \frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}.$$

В частном случае круговой орбиты $e = 0$, и мы получаем $T_1 = T_0/2$, как и следовало ожидать: любую половину круговой орбиты тело проходит за половину периода, поскольку по круговой орбите оно движется равномерно. Однако в случае эллиптической орбиты две ее половины уже не будут эквивалентными: для прохождения вдоль дальней половины требуется большее время. В предельном случае вырожденного эллипса (при $e = 1$) получаем $T_1 = (1 + 2/\pi)T_0/2 = 0.82T_0$. В течение первой половины этого времени снаряд поднимается вверх до наивысшей точки, в течение второй половины — падает вниз. Без учета сопротивления воздуха время подъема равно времени падения.

11.4 Годограф вектора скорости для кеплерова движения

Вектор скорости движущегося тела в любой момент направлен по касательной к пространственной траектории, и поэтому при криволинейном движении его направление все время изменяется. Чтобы получить траекторию в пространстве скоростей, нужно начертить линию, которую описывает конец изменяющегося вектора скорости при условии, что его начало зафиксировано в определенной точке — начале координат пространства скоростей. Повсеместно принятое теперь название такой кривой — годограф скорости — было дано ей Гамильтоном в 1846 году.

При движении тела (планеты, спутника) по круговой орбите модуль скорости остается неизменным, так что все изменение вектора скорости сводится к равномерному вращению вокруг начала координат пространства скоростей. Это значит, что годограф скорости для происходящего по окружности кеплерова движения также будет окружностью. Радиус этой окружности равен неизменному значению модуля скорости (круговой скорости $v_{кр}$).

Когда планета (или спутник) движется вдоль замкнутой эллиптической орбиты или открытой параболической или гиперболической траектории, поворот вектора скорости происходит неравномерно. Изменяется при этом не только направление, но и модуль вектора скорости. Однако эти изменения происходят таким образом, что конец вектора скорости также описывает окружность (либо часть окружности в случае гиперболических движений). Центр такой окружности не находится в начале координат. Другими словами, для произвольного кеплерова движения годограф скорости имеет форму окружности. Это замечательное свойство орбитальных движений почему-то не нашло отражения в существующих учебниках по механике и общей физике.

11.4.1 Геометрическое доказательство круговой формы годографа скорости

Ниже на основе законов динамики доказывается (геометрически и аналитически), что для произвольного кеплерова движения годограф скорости имеет форму окружности (либо дуги окружности в случае гиперболического движения).

Из сохранения направления вектора момента импульса следует, что траектория движения в любом центральном поле представляет собой плоскую кривую. Плоскость орбиты задается векторами начального положения и начальной скорости. Вектор момента импульса перпендикулярен к этой плоскости.

В соответствии со вторым законом Ньютона, любая действующая на тело сила приводит прежде всего к изменению его импульса (и тем самым скорости), а не положения в пространстве. Вектор ускорения $d\mathbf{v}/dt$, производимого силой тяготения, всегда направлен в сторону силового центра, а его модуль обратно пропорционален квадрату расстояния r :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -GM \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (11.21)$$

Исключим модуль радиуса-вектора из этого уравнения, воспользовавшись законом сохранения момента импульса:

$$L = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mrv_{\perp} = mr^2\dot{\varphi}. \quad (11.22)$$

Здесь $v_{\perp} = r\dot{\varphi}$ — поперечная проекция скорости тела (т. е. перпендикулярная радиусу-вектору), а $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ — угловая скорость (скорость поворота радиуса-вектора). По-

скольку момент импульса остается неизменным при движении частицы в любом центральном поле, для любой точки траектории квадрат расстояния r от силового центра с помощью (11.22) можно выразить через угловую скорость и постоянное значение L :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{m}{L} \dot{\varphi} = \frac{m}{L} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (11.23)$$

Подставляя $1/r^2$ из (11.23) в (11.21), находим, что приращение вектора скорости за промежуток времени Δt дается элементарным вектором $\Delta \mathbf{v}$, направление которого противоположно вектору \mathbf{r} , а модуль пропорционален элементарному углу $\Delta \varphi$, на который поворачивается радиус-вектор частицы за время Δt :

$$|\Delta \mathbf{v}| = \frac{GMm}{L} \Delta \varphi. \quad (11.24)$$

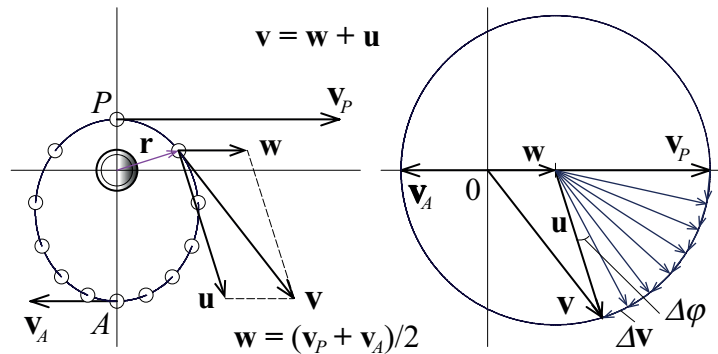


Рис. 11.4: Кеплерова орбита с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

Геометрическая интерпретация уравнения (11.24) показана на рис. 11.4. Каждый раз, когда пространственный радиус-вектор \mathbf{r} движущегося по орбите тела поворачивается на бесконечно малый угол $\Delta \varphi$, вектор скорости \mathbf{v} получает приращение $\Delta \mathbf{v}$, величина которого $|\Delta \mathbf{v}|$ пропорциональна $\Delta \varphi$. Это значит, что элементарные векторы $\Delta \mathbf{v}$ в пространстве скоростей лежат на окружности, т. е. ломаная линия, образованная последовательностью векторов $\Delta \mathbf{v}$, вписана в окружность (см. рис. 11.4).

Радиус u этой окружности, в соответствии с (11.24), равен GMm/L . В каждый момент радиус-вектор годографа \mathbf{u} перпендикулярен $\Delta \mathbf{v}$, а значит и пространственному радиусу-вектору \mathbf{r} . Другими словами, неравномерное вращение вектора \mathbf{r} положения тела в пространстве (левая часть рис. 11.4) и соответствующее ему вращение вектора \mathbf{u} в пространстве скоростей (правая часть рис. 11.4) всегда происходят со сдвигом по фазе на 90° . Таким образом, уравнение (11.24) доказывает, что годограф вектора скорости имеет форму окружности. Выражаемая соотношением (11.24) пропорциональность между $|\Delta \mathbf{v}|$ и $\Delta \varphi$ имеет место только при движении под действием центральной силы, величина которой зависит от расстояния до центра как $1/r^2$. Поэтому круговая форма годографа скорости присуща именно движениям в кулоновом поле.

Постоянный коэффициент пропорциональности $u = GMm/L$ между $|\Delta \mathbf{v}|$ и $\Delta \varphi$ в уравнении (11.24) равен радиусу кругового годографа скорости. Этот радиус удобно вы-

разить через значение скорости в перигее v_P и скорость $v_{кр}$ для круговой орбиты на высоте перигея r_P . Поскольку $v_{кр} = \sqrt{GM/r_P}$ и $L = mr_P v_P$, для u получаем следующее выражение:

$$u = \frac{v_{кр}^2}{v_P}. \quad (11.25)$$

Если спутник запущен на круговую орбиту, т. е. $v_P = v_{кр}$, уравнение (11.25) дает $u = v_{кр}$. В этом тривиальном случае радиус годографа равен круговой скорости. В случае эллиптической орбиты радиус годографа $u = GMm/L$ можно выразить через скорости v_P и v_A в перигее и апогее соответственно. Для этого можно воспользоваться законами сохранения энергии и момента импульса. Приравнявая значения полной энергии в точках r_P и r_A , можем написать:

$$\frac{m}{2}v_P^2 - G\frac{Mm}{r_P} = \frac{m}{2}v_A^2 - G\frac{Mm}{r_A}. \quad (11.26)$$

Далее мы разрешаем это уравнение относительно GMm , и подставляем полученное значение в $u = GMm/L$ вместе с (постоянным) значением момента импульса, подсчитанным, скажем, для перигея орбиты: $L = mr_P v_P$. Отношение расстояний r_P/r_A можно исключить с помощью закона сохранения момента импульса $r_P v_P = r_A v_A$. Таким образом приходим к выводу, что радиус годографа скорости равен полусумме скоростей в перигее и апогее:

$$u = \frac{1}{2}(v_P + v_A). \quad (11.27)$$

Используя это свойство, вектор скорости \mathbf{v} в любой точке эллиптической орбиты можно представить в виде суммы векторов \mathbf{w} и \mathbf{u} : $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ (см. рис. 11.4). Первый член этой суммы представляет собой постоянный вектор $\mathbf{w} = (\mathbf{v}_P + \mathbf{v}_A)/2$ (его модуль равен $(v_P + v_A)/2$), направленный параллельно вектору скорости в перигее \mathbf{v}_P . Этот вектор проходит из начала координат пространства скоростей до центра кругового годографа. Второй член — это вектор \mathbf{u} с постоянным модулем $u = (v_P + v_A)/2$, направление которого всегда перпендикулярно текущему радиусу-вектору \mathbf{r} положения тела на орбите.

Для параболической траектории оба слагаемых суммы $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ равны по модулю: $u = w = v_P/2$. В случае гиперболического движения диаметр $2u$ годографа скорости меньше скорости v_P в вершине гиперболы v_P . При этом $u < w$, и начало координат пространства скоростей лежит вне окружности годографа скорости.

Представление вектора скорости в виде суммы векторов ($\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$) может быть полезным при решении многих задач, связанных с кеплеровым движением.

11.4.2 Аналитический вывод круговой формы годографа скорости

Доказательство круговой формы годографа скорости может быть и чисто аналитическим. Покажем это. Направим ось z декартовой системы координат вдоль вектора момента импульса. Тогда траектория будет лежать в плоскости xy . Обозначим через φ угол, образуемый радиусом-вектором с осью x . Записывая проекции второго закона Ньютона на оси x и y , получаем следующую систему уравнений:

$$\dot{v}_x = -\frac{GM}{r^2} \cos \varphi, \quad \dot{v}_y = -\frac{GM}{r^2} \sin \varphi. \quad (11.28)$$

Исключим модуль радиуса-вектора из этих уравнений, воспользовавшись законом сохранения момента импульса: $L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$:

$$\dot{v}_x = -\frac{GMm}{L} \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{v}_y = -\frac{GMm}{L} \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (11.29)$$

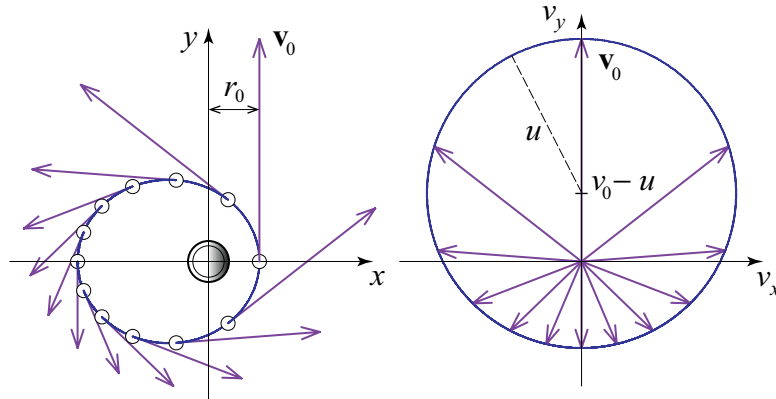


Рис. 11.5: Эллиптическая орбита с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

Так как $\cos \varphi \dot{\varphi} = d(\sin \varphi)/dt$ и $-\sin \varphi \dot{\varphi} = d(\cos \varphi)/dt$, то из уравнений (11.29) получаем следующие выражения для проекций вектора скорости через угол φ :

$$v_x = -\frac{GMm}{L} \sin \varphi + C_1, \quad v_y = \frac{GMm}{L} \cos \varphi + C_2, \quad (11.30)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются начальными значениями проекций вектора скорости. Выражения (11.30) по существу представляют собой параметрическое уравнение траектории в пространстве скоростей (т. е. параметрическое уравнение годографа вектора скорости). Исключив из них параметр φ , получим явное уравнение годографа. Для этого можно перенести в (11.30) постоянные C_1 и C_2 в левые части уравнений, разделить уравнения на GMm/L , возвести их в квадрат и сложить почленно. Учитывая тригонометрическое тождество $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, получаем:

$$(v_x - C_1)^2 + (v_y - C_2)^2 = \left(\frac{GMm}{L}\right)^2. \quad (11.31)$$

Из этого уравнения следует, что при любом движении под действием центральной силы, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния, траектория в пространстве скоростей представляет собой окружность (или часть окружности в случае гиперболического движения). Радиус $u = GMm/L$ этой окружности и положение ее центра на плоскости (v_x, v_y) определяются начальными условиями.

Рассмотрим для определенности случай, когда начальная скорость \mathbf{v}_0 перпендикулярна радиусу-вектору \mathbf{r}_0 начального положения (рис. 11.5). Если выбрать ось x по направлению радиуса-вектора \mathbf{r}_0 , т. е. положить вектор \mathbf{r}_0 равным $(r_0, 0)$, то вектор \mathbf{v}_0 будет иметь проекции $(0, v_0)$. При этом $L = r_0 m v_0$ и радиус годографа скорости $u =$

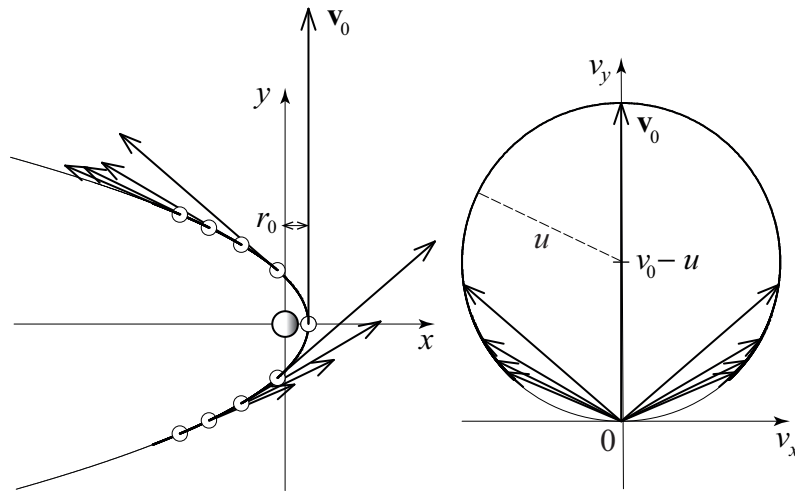


Рис. 11.6: Параболическая траектория с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

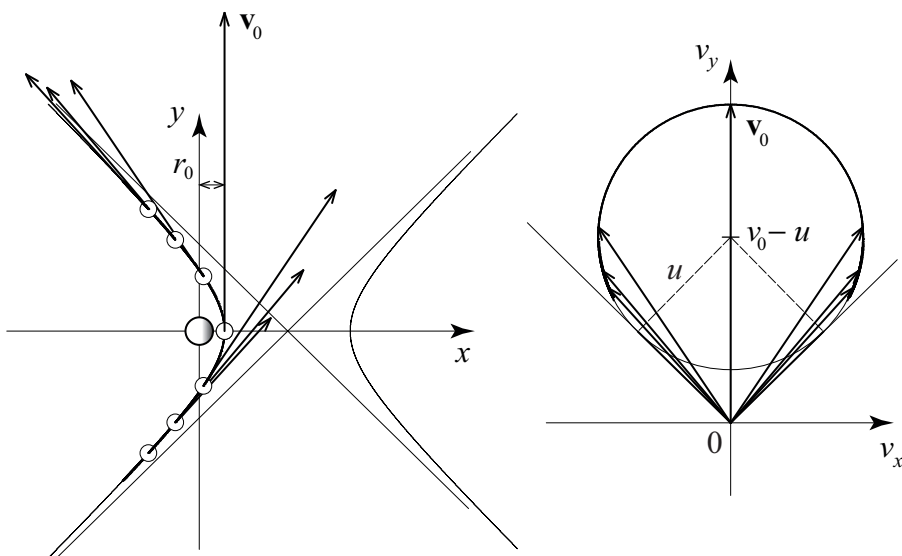


Рис. 11.7: Гиперболическая траектория с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

$GM/(r_0 v_0) = v_{кр}^2/v_0$, где $v_{кр} = \sqrt{GM/r_0}$ - круговая скорость для начальной точки. Полагая для начального положения $\varphi(0) = 0$, из уравнений (11.30) находим $C_1 = 0$, $C_2 = v_0 - GM/(r_0 v_0) = v_0 - u$. Таким образом, при заданных начальных условиях центр годографа находится на оси v_y в точке $C_2 = v_0 - GM/(r_0 v_0) = v_0 - u$.

На концах малой оси эллиптической орбиты вектор скорости \mathbf{v} параллелен большой оси эллипса. Поэтому для этих точек вектор \mathbf{v} перпендикулярен диаметру кругового годографа скорости. Основание этого перпендикуляра делит диаметр на части, равные скоростям спутника в перигее и апогее орбиты (\mathbf{v}_P и \mathbf{v}_A соответственно). Поэтому длина перпендикуляра, т. е. скорость на конце малой оси, равна среднему геометрическому скоростей \mathbf{v}_P и \mathbf{v}_A : $v = \sqrt{v_P v_A}$.

Если начальная скорость равна круговой скорости, т. е. $v_0 = \sqrt{GM/r_0}$, то из приведенных выражений следует, что радиус годографа равен начальной скорости $u = v_0$, а его центр лежит в начале координат пространства скоростей ($C_1 = 0, C_2 = 0$).

Если начальная скорость равна скорости освобождения, т. е. $v_0 = \sqrt{2GM/r_0}$, то радиус годографа равен половине начальной скорости $u = v_0/2$, а центр окружности годографа лежит на оси v_y в точке $C_2 = v_0/2 = u$, т. е. годограф проходит через начало координат пространства скоростей и вектор начальной скорости проходит вдоль всего диаметра годографа (рис. 11.6).

Если начальная скорость больше скорости освобождения, то диаметр годографа меньше начальной скорости, т. е. начало координат пространства скоростей находится вне окружности годографа (рис. 11.7).

Подчеркнем, что круговая форма годографа скорости получена для движения в кулоновом (ньютонском) центральном поле, где сила квадратично убывает с расстоянием.

11.5 Альтернативный вывод уравнений годографа скорости и кеплеровой орбиты

В большинстве учебников вывод уравнения планетной орбиты традиционно базируется на использовании законов сохранения момента импульса и полной энергии. Мы следовали этой традиции в приведенном выше выводе 1-го закона Кеплера (см раздел 11.2, стр. 187). Но можно получить уравнение орбиты и заодно доказать круговую форму годографа скорости при кеплеровом движении, отталкиваясь непосредственно от второго закона Ньютона для движения тела под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Будем исходить из дифференциального уравнения для $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{s}_r, \quad (11.32)$$

где введен единичный вектор $\mathbf{s}_r = \mathbf{r}/r$ в направлении радиуса-вектора \mathbf{r} (см. левую часть рис. 11.8). Исключим r^2 из уравнения (11.32) с помощью закона сохранения момента импульса $L = mr^2\dot{\theta}$. В результате приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{C} \dot{\theta} \mathbf{s}_r. \quad (11.33)$$

Здесь введена константа $C = L/m = r^2\dot{\theta}$, физический смысл которой — момент импульса в расчете на единицу массы (сохраняющийся при движении в кулоновом поле) или, что то же самое, удвоенная секториальная скорость ($C = 2dS/dt$).

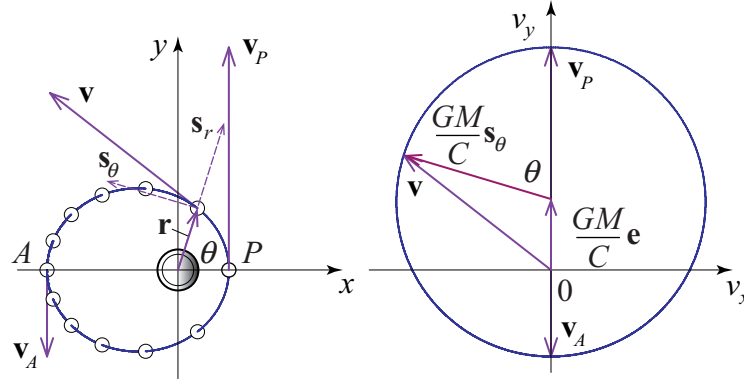


Рис. 11.8: Кеплерова орбита и векторы скорости в различных точках (слева) и годограф вектора скорости в пространстве скоростей (справа).

Решающий для дальнейшего вывода шаг заключается в подстановке ds_θ/dt вместо $-\dot{\theta}s_r$ в уравнение (11.33), где s_θ — единичный вектор, в каждый момент направленный перпендикулярно радиусу-вектору \mathbf{r} (см. рис. 11.8):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{GM}{C} \frac{ds_\theta}{dt}. \quad (11.34)$$

Интегрируя это уравнение по времени, для вектора скорости \mathbf{v} получаем следующее выражение в виде суммы двух векторов:

$$\mathbf{v} = \frac{GM}{C} (\mathbf{s}_\theta + \mathbf{e}). \quad (11.35)$$

Второй член в правой части выражения (11.35) — это постоянная интегрирования, представляющая собой в данном случае не зависящий от времени вектор, модуль которого равен $(GM/C)e$. Первый же член — это вектор с постоянным модулем (GM/C) , направленный в каждый момент времени параллельно единичному вектору s_θ , т. е. перпендикулярно текущему направлению радиуса-вектора \mathbf{r} .

Таким образом, выражение (11.35) говорит о том, что годограф вектора скорости для произвольного кеплерова движения представляет собой окружность (см. правую часть рис. 11.8). Действительно, единичный вектор s_θ все время изменяет свое направление по мере продвижения тела по орбите (по мере поворота радиуса-вектора \mathbf{r}). Поэтому вектор $(GM/C)s_\theta$ фиксированной длины GM/C , начало которого смещено из начала координат пространства скоростей на постоянный вектор $(GM/C)e$, с течением времени поворачивается (неравномерно), и его конец вычерчивает в пространстве скоростей окружность (или часть окружности в случае гиперболического движения). При этом конец вектора \mathbf{v} , т. е. суммы двух векторов $(GM/C)e$ и $(GM/C)s_\theta$, перемещается вдоль той же окружности (рис. 11.8), что и доказывает круговую форму годографа скорости для произвольного кеплерова движения.

Неизменной для данного движения величину $u = GM/C$ поворачивающегося вектора $\mathbf{u} = (GM/C)s_\theta$ (радиус кругового годографа скорости) удобно выразить через значение скорости в перигее v_P и скорость $v_{кр}$ для круговой орбиты на высоте перигея r_P .

Поскольку $v_{кр} = \sqrt{GM/r_P}$ и $C = r_P v_P$, для $u = GM/C$ получаем следующее значение:

$$u = \frac{GM}{C} = \frac{v_{кр}^2}{v_P}, \quad (11.36)$$

что совпадает с полученным ранее выражением (11.25). При этом во втором (постоянном) слагаемом $(GM/C)e$ в (11.35) модуль e вектора \mathbf{e} имеет ясный физический смысл: это эксцентриситет пространственной орбиты. Поэтому можно назвать \mathbf{e} *вектором эксцентриситета*. Постоянный вектор \mathbf{e} направлен перпендикулярно большой оси орбиты. Смещение центра кругового годографа из начала координат пространства скоростей $(GM/C)e$ можно представить как $v_P - u = v_P - v_{кр}^2/v_P$ или как $w = ue$, где эксцентриситет $e = v_P^2/v_{кр}^2 - 1$.

Последний шаг, который позволит нам получить уравнение орбиты кеплерова движения из выражения (11.35), заключается в нахождении проекций обеих частей векторного равенства (11.35) на направление единичного вектора \mathbf{u}_θ . Из левой части рис. 11.8 мы видим, что эта проекция вектора \mathbf{v} равна $r\dot{\theta}$ или C/r , если принять во внимание, что $r^2\dot{\theta} = C$. Из правой части рис. 11.8 легко получить для проекции суммы векторов в правой части (11.35) выражение $(GM/C)(1 + e \cos \theta)$. Приравнявая эти значения, получаем искомое уравнение орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad \text{где } p = \frac{C^2}{GM} = \frac{L^2}{GMm^2} = r_P(1 + e). \quad (11.37)$$

Это уравнение траектории кеплерова движения было получено из законов динамики другим способом в разделе 11.2.

Глава 12

Огибающая эллиптических орбит равных энергий

12.1 Огибающая траекторий баллистических снарядов

В знаменитой старой задаче классической механики речь идет о баллистических снарядах, запускаемых из одной и той же точки над поверхностью земли с одинаковой по величине начальной скоростью во всевозможных направлениях. Снаряды движутся в однородном поле тяжести в отсутствие сопротивления воздуха. Траектории снарядов образуют семейство парабол (см. рис. 12.1). Огибающая этого семейства парабол дает границу так называемой «области безопасности». Со времен Торричелли¹ известно, что огибающая этих траекторий представляет собой параболу (в пространстве — параболоид вращения с вертикальной осью симметрии, проходящей через начальную точку). Эта граница разделяет в пространстве точки, в которые может попасть снаряд, выпущенный из данной начальной точки с данной начальной скоростью, от целей, недостижимых при данной величине начальной скорости.

Однако баллистические траектории можно рассматривать как параболы лишь в известном приближении, когда начальная скорость достаточно мала и все траектории сосредоточены в ограниченной области пространства, где поле тяготения практически однородно (приближение «плоской Земли»). На самом деле баллистические снаряды движутся вдоль отрезков эллипсов, дальний фокус которых (общий для всех эллиптических траекторий) находится в центре Земли. Чем больше начальная скорость, тем значительно истинные траектории снарядов отличаются от парабол. Поэтому можно задаться естественным вопросом: какова истинная (точная) форма огибающей этих траекторий?

Или, в качестве более общей постановки задачи, представим себе ракету, запущенную вертикально вверх с поверхности Земли. Пусть в наивысшей точке своего подъема ракета разрывается на множество осколков, разлетающихся во всех направлениях с одинаковыми по величине скоростями относительно геоцентрической (не вращающейся) системы отсчета. В отсутствие сопротивления воздуха дальнейшее движение осколков происходит

¹Эванджелиста Торричелли (1608–1647) — итальянский математик и физик, ученик Галилея. Известен как автор концепции атмосферного давления и изобретатель ртутного барометра. Наиболее значимый результат Торричелли в области баллистики — открытие огибающей семейства параболических траекторий снарядов, выпущенных из одной точки в разных направлениях с одной и той же скоростью. Все траектории касаются общего параболоида, получившего впоследствии название «параболоида безопасности».

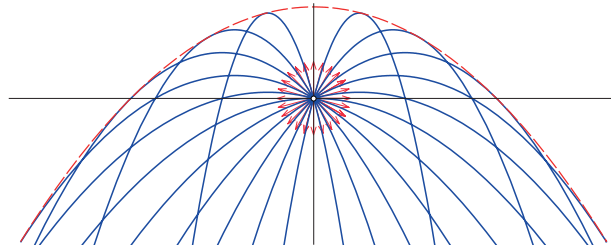


Рис. 12.1: Семейство параболических траекторий снарядов, выпущенных из одной точки в разных направлениях с одинаковыми по величине начальными скоростями. Штриховой линией показана и огибающая этих траекторий.

исключительно под действием центральной силы земного тяготения, величина которой спадает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. Если начальная скорость осколков достаточно велика, некоторые из них становятся спутниками Земли, обращающимися вокруг нее по различным кеплеровым орбитам. Если некоторые из этих эллипсов пересекают поверхность Земли, соответствующие траектории до падения на поверхность представляют собой отрезки таких эллипсов.

Когда начальная скорость осколков мала, часть такой эллиптической траектории от начальной точки до поверхности Земли можно приближенно рассматривать как параболу. Именно такую параболическую форму мы обычно приписываем траектории снаряда в приближении «плоской Земли», когда снаряд движется в однородном поле тяжести в отсутствие сопротивления воздуха.

В любом случае все траектории лежат в пределах определенной ограниченной области пространства, если начальная скорость осколков меньше скорости освобождения из поля земного тяготения. Граница такой области представляет собой аксиально симметричную поверхность с осью симметрии, проходящей через центр Земли и начальную точку, из которой разлетаются осколки. Что это за поверхность?

Другими словами, какую форму имеет огибающая рассматриваемого семейства всех эллиптических орбит осколков, разлетающихся из одной точки с одинаковыми по величине скоростями?

12.2 Семейство кеплеровых орбит равных энергий с общей начальной точкой

Несколько орбит такого семейства и их огибающая показаны на рис. 12.2. Для семейства на рис. 12.2, *a* начальная скорость v_0 разлетающихся осколков по величине меньше круговой скорости $v_{кр}$ (т. е. меньше скорости спутника на круговой орбите, проходящей через начальную точку); на рис. 12.2, *b* начальная скорость v_0 больше круговой скорости $v_{кр}$. Показанные на рис. 12.2 траектории получены с помощью программы «Баллистические снаряды и спутники» пакета моделирующих программ «Движение космических тел». Подчеркнем, что программа строит траектории, ничего «не зная» о законах Кеплера и не используя аналитического решения задачи: программа только интегрирует численно дифференциальные уравнения движения тела под действием центральной силы земного тяготения.

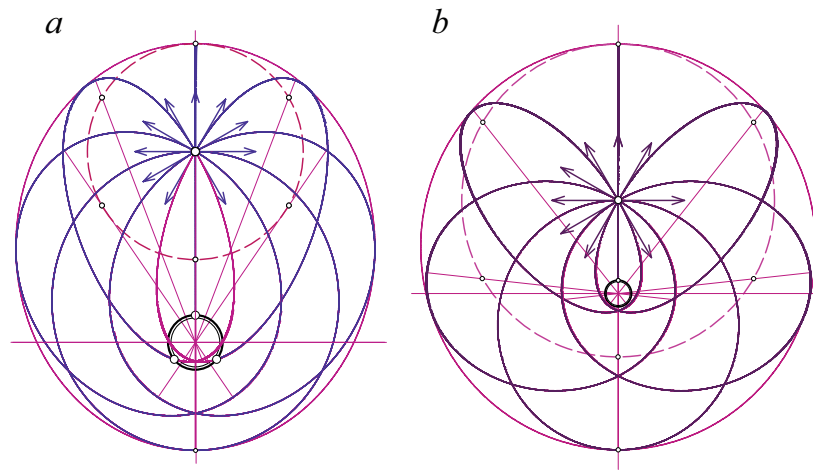


Рис. 12.2: Семейства эллиптических орбит осколков, разлетающихся в разных направлениях из одной точки над поверхностью Земли с одинаковыми по величине скоростями, и огибающие таких семейств. Тонкими линиями показаны большие оси эллипсов. Общий фокус всех эллипсов находится в центре Земли; геометрическое место вторых фокусов — окружность с центром в начальной точке (a — начальная скорость осколков $v_0 = 0.75 v_{кр}$, b — $v_0 = 1.20 v_{кр}$).

Один из фокусов, общий для всех эллиптических орбит, расположен в центре Земли. Вторые фокусы орбит спутников, запущенных из одной точки с одинаковыми по модулю начальными скоростями, лежат на окружности, центр которой расположен в общей для всех спутников начальной точке. Соответствующие окружности (для случаев $v_0 = 0.75 v_{кр}$ и $v_0 = 1.20 v_{кр}$) показаны штриховыми линиями на рис. 12.2. Радиус такой окружности равен расстоянию между начальной точкой и наивысшей точкой подъема осколка, запущенного из начальной точки вертикально вверх. Доказательство приводится в следующем разделе статьи.

По условию все осколки разлетаются из одной и той же точки пространства с равными по величине начальными скоростями. Это значит, что полная механическая энергия (в расчете на единицу массы) у всех осколков одинакова. При движении по эллиптической орбите в центральном поле тяготения полная энергия однозначно связана с размером большой оси эллипса (см. раздел 11.2). Поэтому большие оси всех эллиптических орбит рассматриваемого семейства также одинаковы. Отсюда следует, что, в соответствии с третьим законом Кеплера, периоды обращения всех осколков также одинаковы. Таким образом, все осколки, орбиты которых не пересекают земную поверхность, возвращаются в начальную точку одновременно.

Детальный анализ, приведенный в следующем разделе, показывает, что граница области безопасности, т. е. огибающая рассматриваемого семейства траекторий осколков, представляет собой эллипсоид вращения (сфероид), а именно, поверхность вращения эллипса, фокусы которого расположены в центре Земли и в начальной точке. Размеры и эксцентриситет этого сфероида определяются высотой начальной точки и величиной начальной скорости разлетающихся осколков. Мы приведем строгое доказательство этого утверждения и вывод параметров огибающей семейства траекторий, используя известные геометрические свойства кеплеровых орбит.

В предельном случае малой начальной скорости v_0 осколков (много меньшей чем круговая скорость $v_{кр}$ для данной начальной точки) огибающая поверхность сжимается в предельно узкий (вырожденный) эллипсоид вращения, натянутый на фокусы, расположенные в начальной точке и в центре Земли. Небольшую часть этого эллипсоида вблизи начальной точки можно аппроксимировать хорошо знакомым параболоидом безопасности, представляющим собой огибающую параболических траекторий осколков, вылетающих из одной точки в однородном поле тяжести.

12.3 Форма огибающей поверхности

Ниже приводится простое геометрическое доказательство утверждения, что поверхность, ограничивающая семейство эллиптических орбит с одинаковой энергией и общей начальной точкой, представляет собой сфероид, порождаемый вращением некоторого эллипса вокруг оси симметрии ZN (см. рис. 12.3). Один из фокусов этого эллипса находится в центре Земли E ; второй фокус — в начальной точке S .

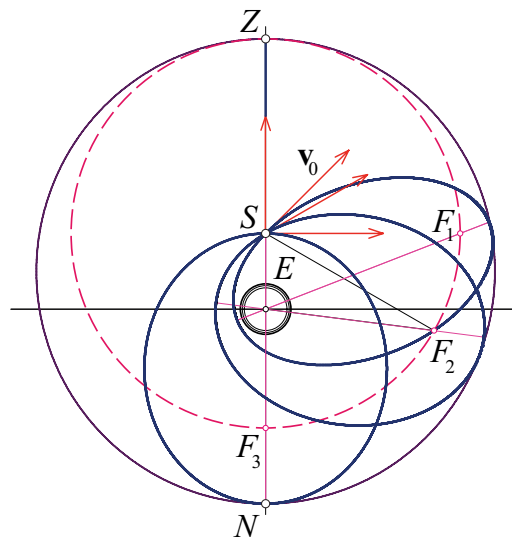


Рис. 12.3: Геометрическое место вторых фокусов эллиптических орбит (штриховая окружность).

Осколок, начальная скорость которого (скорость в точке S на рис. 12.3) направлена вертикально вверх, поднимается по прямой до наивысшей точки Z , находящейся на расстоянии r_{\max} от центра Земли. Затем он падает на Землю вдоль той же прямой. Траектория падения этого осколка на Землю представляет собой часть прямолинейного отрезка, соединяющего наивысшую точку подъема Z с центром Земли E . Этот отрезок можно рассматривать как предельный случай бесконечно узкого (вырожденного) эллипса, натянутого между точками Z и E . Фокусы этого вырожденного эллипса совпадают с конечными точками отрезка ZE .

Очевидно, что наивысшая точка Z лежит на искомой граничной поверхности. Расстояние $r_{\max} = r_Z$ от этой точки до центра Земли легко рассчитать с помощью закона сохранения энергии. Для этого достаточно приравнять полную энергию осколка в точке

Z (где кинетическая энергия равна нулю) к полной энергии в начальной точке S , расположенной на расстоянии r_0 от центра Земли:

$$-\frac{GM}{r_{\max}} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0}. \quad (12.1)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, M – масса Земли. В уравнении (12.1) удобно выразить гравитационный параметр Земли GM через скорость освобождения $v_{\text{осв}}$ для начальной точки S (напомним, что скорость освобождения $v_{\text{осв}} = \sqrt{2GM/r_0} = \sqrt{2}v_{\text{кр}}$ – это минимальная скорость, которую нужно сообщить телу в рассматриваемой точке, чтобы оно преодолело земное тяготение и удалилось на бесконечно большое расстояние):

$$\frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{v_{\text{осв}}^2}\right); \quad r_{\max} = r_Z = \frac{r_0}{1 - (v_0/v_{\text{осв}})^2}. \quad (12.2)$$

Если начальная скорость v_0 равна круговой скорости для начальной точки, т. е. если $v_0 = v_{\text{кр}} = \sqrt{GM/r_0} \approx 7.9$ км/с, то уравнение (12.2) дает $r_{\max} = r_Z = 2r_0$: расстояние до наивысшей точки от центра Земли вдвое больше расстояния r_0 до начальной точки. Как видно из выражения (12.2), расстояние $r_{\max} = r_Z$ стремится к бесконечности, если $v_0 \rightarrow v_{\text{осв}}$, т. е. когда начальная скорость приближается к скорости освобождения.

Нетрудно найти еще одну точку искомой граничной поверхности, а именно точку N на ее стороне, противоположной точке Z (см. рис. 12.3). Эта точка N совпадает с апогеем (или перигеем при $v_0 < v_{\text{кр}}$) эллиптической орбиты осколка, начальная скорость которого в точке S направлена горизонтально (перпендикулярно к радиусу-вектору). Расстояние r_N до этой точки от центра Земли можно рассчитать с помощью закона сохранения энергии и закона сохранения момента импульса (второго закона Кеплера). Действительно, приравняем значения полной энергии рассматриваемого осколка в начальной точке и точке N :

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = \frac{v_N^2}{2} - \frac{GM}{r_N}. \quad (12.3)$$

Согласно закону сохранения момента импульса можно написать $r_0 v_0 = r_N v_N$, так как в точках S и N скорость перпендикулярна радиусу-вектору, и модуль векторного произведения радиуса-вектора и вектора скорости равен просто произведению их модулей. Выражая таким образом в уравнении закона сохранения энергии (12.3) скорость v_N через v_0 и собирая члены с v_0 в левой его части, получаем следующее уравнение для нахождения искомого расстояния r_N :

$$v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_N^2}\right) = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_N}\right). \quad (12.4)$$

Нет необходимости приводить это уравнение, квадратное относительно неизвестной величины r_N , к канонической форме и использовать стандартную формулу для его корней. Выражая разность квадратов в его левой части как произведение соответствующих суммы и разности, мы сразу видим, что один из корней уравнения (12.4) равен расстоянию до начальной точки: $r_N = r_0$. Этот посторонний корень появился потому, что использованное при получении уравнения (12.4) условие ортогональности радиуса-вектора и вектора скорости выполняется не только для искомой точки N , но и для начальной точки S .

Для нахождения второго корня, соответствующего точке N , разделим обе части уравнения (12.4) на $(1 - r_0/r_N)$. В результате получаем:

$$r_N = \frac{r_0}{(v_{\text{осв}}/v_0)^2 - 1}. \quad (12.5)$$

Здесь мы опять воспользовались выражением $v_{\text{осв}} = \sqrt{2GM/r_0} = \sqrt{2}v_{\text{кр}}$ для скорости освобождения, соответствующей начальной точке S .

Теперь найдем, где расположены фокусы эллиптических орбит разлетающихся осколков. Все эллипсы имеют общий фокус в центре Земли (см. рис. 12.3). Геометрическое место множества вторых фокусов (точки F_1, F_2, F_3 , и Z на рис. 12.3) — это окружность, центр которой расположен в начальной точке S . Радиус этой окружности равен расстоянию $|SZ|$ от точки S до наиболее удаленной точки Z . Эта окружность показана штриховой линией на рис. 12.3.

Действительно, для любой эллиптической орбиты рассматриваемого семейства сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов этого эллипса равна большой оси орбиты. Большие оси всех орбит с одинаковой энергией, как уже отмечалось выше, одинаковы. Все эти большие оси равны длине r_{max} отрезка EZ . Мы можем рассматривать этот отрезок как большую ось вырожденной эллиптической орбиты, по которой движется осколок с начальной скоростью, направленной вертикально вверх. Все орбиты семейства проходят через начальную точку S , поэтому расстояние SE от этой точки до фокуса E одинаково для всех орбит и равно r_0 . Отсюда следует, что расстояние от точки S до второго фокуса любой орбиты (F_1, F_2 , или F_3 на рис. 12.3) одно и то же для всех орбит семейства. Итак, вторые фокусы всех орбит F_1, F_2, F_3 лежат на окружности, центр которой расположен в общей начальной точке S , а радиус равен длине отрезка $|SZ|$ (окружность, показанная штриховой линией на рис. 12.3).

Далее докажем, что кривая, вращение которой порождает искомую граничную поверхность, представляет собой эллипс. Концы большой оси этого эллипса расположены в точках Z и N , а его фокусы расположены в общей начальной точке S и в центре Земли E . Для доказательства такой формы огибающей рассматриваемого семейства орбит мы воспользуемся хорошо известными геометрическими свойствами эллиптических траекторий.

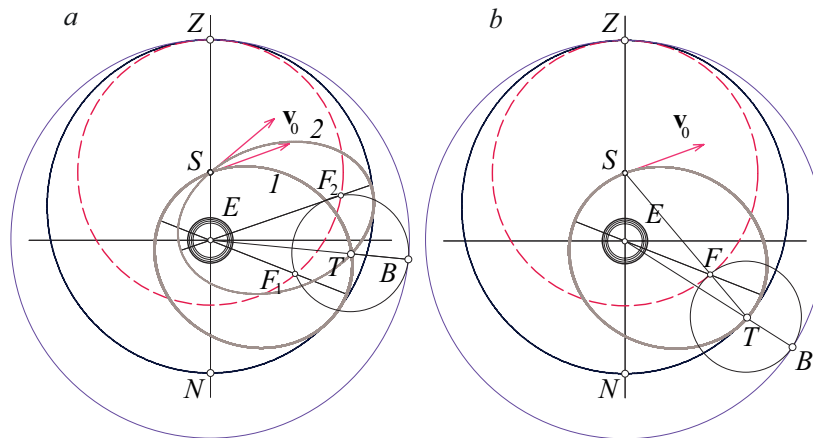


Рис. 12.4: Геометрическое доказательство эллиптической формы граничной поверхности (подробности см. в тексте).

Начнем со следующего вспомогательного построения (см. рис. 12.4). Начертим еще одну (вторую) окружность с центром в центре Земли E и радиусом $r_{\text{max}} = |EZ|$. Эта окружность проходит через точку Z , лежащую на граничной поверхности.

Рассмотрим теперь задачу нахождения орбиты, принадлежащей заданному семейству, которая проходит через произвольно выбранную мишень T . Пусть мишень находится в пределах построенной только что второй окружности радиуса $r_{\max} = |EZ|$. Приняв точку T за центр, построим еще одну (третью) окружность, касающуюся второй окружности в точке B , как показано на рис. 12.4. Второй фокус искомой орбиты, проходящей через выбранную мишень T , должен лежать на этой окружности, потому что сумма расстояний от фокусов искомой орбиты до точки T опять должна быть равна r_{\max} . Но в то же время этот второй фокус должен принадлежать первой окружности (геометрическому месту вторых фокусов всех орбит), центр которой находится в начальной точке S , а радиус равен $|SZ|$ (штриховая окружность на рис. 12.4). Мы должны рассмотреть следующие три возможности.

1. Третья окружность (центр которой находится в произвольно выбранной мишени T) *пересекает* первую окружность (геометрическое место вторых фокусов всех орбит) в двух точках (F_1 и F_2 на рис. 12.4, *a*). В таком случае существуют *две орбиты* из данного семейства, которые проходят через выбранную мишень T . Эти орбиты обозначены цифрами 1 и 2 на рис. 12.4, *a*. Вторые фокусы этих двух орбит лежат в двух точках пересечения (F_1 и F_2) первой и третьей окружностей.
2. Третья окружность *не имеет общих точек* с первой окружностью. Это значит, что ни одна из орбит рассматриваемого семейства не проходит через данную мишень T . Иначе говоря, выбранная мишень T *лежит за пределами* искомой границы.
3. Наконец, третья окружность *касается* первой окружности, т. е. имеет с ней единственную общую точку F (см. рис. 12.4, *b*). Это значит, что только одна орбита рассматриваемого семейства проходит через данную мишень T . В этом случае мишень T должна лежать на искомой границе. В точке T эта единственная орбита касается огибающей поверхности. Фокусы такой орбиты расположены в точке F и в центре Земли E .

Из рис. 12.4, *b* видно, что в последнем случае (случае касания первой и третьей окружностей) сумма расстояний от данной точки T до центра Земли E и до начальной точки S равна радиусу r_{\max} второй окружности плюс радиусу $|SZ|$ первой окружности. Эта сумма не зависит от положения точки T искомой границы. Таким образом, эта сумма имеет одно и то же значение для всех точек границы. Поскольку точки E и S фиксированы, и поскольку сумма расстояний от них до любой точки границы одна и та же, утверждение об эллиптической форме границы доказано: огибающая семейства всех эллиптических орбит осколков, вылетающих из одной точки с равными по модулю скоростями, представляет собой эллипсоид вращения с фокусами в центре Земли E и в общей начальной точке S .

Отметим, что использование хорошо известных геометрических свойств эллипса позволило нам найти огибающую семейства эллиптических орбит одинаковой энергии без больших усилий и утомительных вычислений.

Эксцентриситет огибающего эллипса можно найти как отношение расстояния r_0 между его фокусами к большой оси $r_Z + r_N$ (см. рис. 12.4, *b*). С помощью уравнений (12.2) и (12.5) находим:

$$e = \frac{r_0}{r_Z + r_N} = \frac{v_{\text{осв}}^2 - v_0^2}{v_{\text{осв}}^2 + v_0^2}. \quad (12.6)$$

Для мишени T , находящейся на границе достижимых целей (см. рис. 12.4, *b*), существует единственная траектория из рассматриваемого семейства эллиптических орбит с

одинаковой энергией. Эта траектория касается границы как раз в точке T . Чтобы поразить такую мишень, начальная скорость снаряда должна иметь определенное направление: вектор \mathbf{v}_0 должен быть направлен вдоль биссектрисы угла TSZ на рис. 12.4, b .

В самом деле, траектория снаряда, который должен достичь цели T при минимальной начальной скорости — это часть эллипса, проходящего через точки S и T . Один фокус такого кеплерова эллипса расположен в центре Земли. Второй фокус лежит на окружности, центр которой находится в начальной точке S , а радиус равен $|SZ|$ (см. рис. 12.4, b). Поэтому второй фокус находится в точке F , в которой отрезок ST , соединяющий начальную точку с целью, пересекает окружность вторых фокусов. Зная положение обоих фокусов эллиптической траектории снаряда, мы можем легко найти начальный угол (угол прицеливания), воспользовавшись известным свойством эллиптического зеркала. Действительно, луч света, испущенный из фокуса E в направлении точки S , должен в точке S отражаться эллиптическим зеркалом в направлении второго фокуса F . Отсюда следует, что касательная к эллипсу в точке S , а следовательно и направление начальной скорости $\mathbf{v}_{0\min}$ (см. рис. 12.4, b) — это биссектриса угла FSZ (или угла TSZ , что то же самое).

Любую мишень, лежащую в пределах граничной поверхности, можно поразить по двум траекториям данного семейства. Одна из них, обозначенная цифрой 1 на рис. 12.4, a , сначала проходит через мишень T , и лишь затем касается граничной поверхности. Вторая траектория, обозначенная цифрой 2, сначала касается граничной поверхности, и лишь затем проходит через мишень. Этой траектории соответствует начальная скорость, направленная под большим углом к горизонту. В баллистике траекторию первого типа называют настильной, второго типа — навесной.

Если увеличивать начальную скорость осколков, граничная поверхность расширяется, и ее форма приближается к сферической. Действительно, как видно из уравнения (12.6), эксцентриситет e граничного эллипса становится меньше и стремится к нулю по мере приближения величины начальной скорости к скорости освобождения. Когда начальная скорость v_0 равна круговой скорости $v_{кр}$, соответствующей начальной точке, расстояние между фокусами огибающего эллипса равно одной трети его большей оси, т. е. эксцентриситет этого эллипса равен $1/3$ при $v_0 = v_{кр}$.

Если уменьшать величину начальной скорости, огибающий эллипсоид сужается (становится более вытянутым вдоль оси симметрии). При приближении начальной скорости к нулю эксцентриситет огибающей приближается к единице. При этом вершины (концы большой оси) огибающего эллипса приближаются к его фокусам, так что эллипс становится очень узким и вытянутым, натянутым между начальной точкой S и центром Земли E . Этот предельный случай вырожденного эллипса соответствует параболической форме упоминавшейся выше огибающей траекторий осколков, разлетающихся в пределах ограниченной области пространства в окрестности начальной точки S , где поле тяготения Земли можно считать однородным. .

12.4 Полезные применения огибающей поверхности

Знание формы граничной поверхности семейства траекторий с одинаковой энергией можно использовать при решении различных задач, связанных с орбитальным движением. Например, мы можем легко найти минимальную начальную скорость, которую нужно сообщить снаряду для поражения заданной цели из определенной начальной точки. Пусть положение цели T (см. рис. 12.4, b) задано расстоянием $r_T = |ET|$ от силового центра (центра Земли E) и расстоянием $l_T = |ST|$ от заданной начальной точки S (расстояние $|ES|$ от центра Земли до начальной точки $|ES| = r_0$). Как найти минимальную

начальную скорость снаряда, и под каким углом ее нужно направить?

Начальная скорость снаряда минимальна, если мишень T находится на граничной поверхности. Поскольку эта поверхность имеет эллиптическую форму, сумма расстояний $|ET|$ и $|ST|$ от T до ее фокусов, т. е. до точек E и S , равна большой оси ограничивающего эллипса: $|ET| + |ST| = r_Z + r_N$. Сумма $|ET| + |ST|$ — это как раз и есть сумма известных (заданных) расстояний r_T и l_T до мишени от точек E и S . Обозначим эту сумму через b : $r_T + l_T = b$. Таким образом, мы можем приравнять данное значение b большой оси $r_Z + r_N$, длину которой мы уже нашли выше при выводе выражения (12.6) для эксцентриситета огибающего эллипса:

$$b = r_Z + r_N = r_0 \frac{v_{\text{осв}}^2 + v_0^2}{v_{\text{осв}}^2 - v_0^2}. \quad (12.7)$$

Решая это уравнение (12.7) относительно неизвестной величины v_0 , находим искомое значение минимальной начальной скорости снаряда:

$$v_{0 \min}^2 = v_{\text{осв}}^2 \frac{b - r_0}{b + r_0}. \quad (12.8)$$

Выражение (12.8) показывает, что при заданном положении начальной точки S минимальная начальная скорость зависит только от b , т. е. от суммы расстояний r_T и l_T , которыми определяется положение мишени ($b = r_T + l_T$). Согласно выражению (12.8), начальная скорость снаряда равна нулю при $b = r_0$, т. е. для любой цели, находящейся на отрезке SE , который соединяет начальную точку с центром Земли. Минимальная начальная скорость $v_{0 \min}$ стремится к скорости освобождения $v_{\text{esc}} = \sqrt{2gR^2/r_0}$, когда цель удаляется на бесконечно большое расстояние (когда $b \rightarrow \infty$).

Как уже отмечалось выше, направление начальной скорости легко найти с помощью оптического свойства эллипса. Поскольку луч света, выходящий из фокуса E в направлении точки S , отражается эллиптическим зеркалом в направлении второго фокуса F , касательная к эллипсу в точке S , а следовательно и направление вектора начальной скорости $\mathbf{v}_{0 \min}$, совпадает с биссектрисой угла FSZ или TSZ (см. рис. 12.4, b).

12.4.1 В цель на экваторе с Северного полюса

Далее обсуждаются конкретные примеры траекторий баллистических снарядов, запускаемых в определенную цель с минимальной начальной скоростью. Задача заключается в расчете величины необходимой минимальной начальной скорости, и расчете направления, которое нужно придать этой скорости.

Допустим, что стартовая позиция находится на Северном полюсе, а цель находится на экваторе (рис. 12.5, a). В этом случае точки S и T расположены на поверхности Земли, так что обе они находятся на одинаковом расстоянии от центра Земли, равном радиусу Земли R : $r_0 = r_T = R$. Поэтому расстояние l_T до цели T от начальной точки S равно $\sqrt{2}R$, так что $b = r_T + l_T = (1 + \sqrt{2})R$. Выражение (12.8) для минимальной начальной скорости в этом случае дает значение $v_{0 \min} = 0.9102 v_{\text{кр}}$, где $v_{\text{кр}} \approx 7.9$ км/с — круговая скорость для гипотетической предельно низкой круговой орбиты (первая космическая скорость).

В точке T , где расположена цель, искомая эллиптическая траектория с минимальной начальной скоростью (обозначенная цифрой 1 на рис. 12.5, a) и эллипс огибающей семейства траекторий имеют общую касательную. В соответствии с оптическим свойством

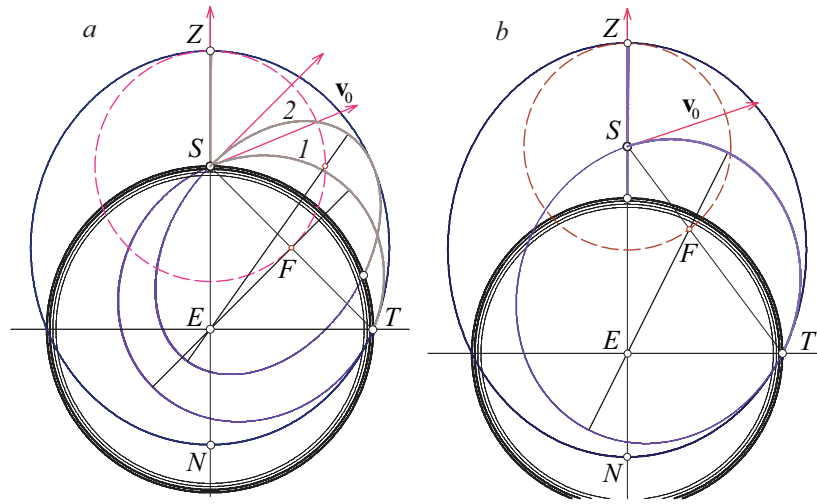


Рис. 12.5: Примеры траекторий, соответствующих минимальной начальной скорости баллистического снаряда при заданном положении начальной точки S и заданной цели T : a — с Северного полюса в цель на экваторе; b — из начальной точки S на высоте $R/3$ над Северным полюсом в цель на экваторе.

эллипса, луч света ET , выходящий из общего фокуса E этих эллипсов, должен отражаться в точке T каждым из этих эллипсов в направлении их вторых фокусов (F и S соответственно). Поэтому из оптического свойства эллиптического зеркала следует, что все три точки T , F , и S лежат на одной прямой TS .

Угол TSZ (или FSZ , что то же самое) в этом случае равен 135° . Начальную скорость \mathbf{v}_0 нужно направлять по биссектрисе этого угла. Поэтому вектор \mathbf{v}_0 должен составлять угол 67.5° с местной вертикалью. Правильность приведенных здесь расчетов величины и направления необходимой начальной скорости рекомендуется проверить выполнением моделирования запуска снаряда с помощью компьютерной программы «Баллистические снаряды и спутники».

Интересно сопоставить эту траекторию 1 с траекторией 2 (см. рис. 12.5, a), по которой двигался бы баллистический снаряд, запущенный под углом 45° с такой же по величине начальной скоростью v_0 . Отметим, что дальность полета такого снаряда на поверхности Земли оказывается меньшей, чем в предыдущем случае, когда снаряд запускался с той же самой начальной скоростью под углом 67.5° с вертикалью, в противоположность ситуации, соответствующей приближению «плоской Земли».

В качестве другого примера рассмотрим запуск баллистического снаряда из начальной точки, расположенной на высоте одной трети радиуса Земли над Северным полюсом, в цель на экваторе (рис. 12.5, b). В этом случае $r_0 = \frac{4}{3}R$, $r_T = R$, и $l_T = \frac{5}{3}R$, так что $b = \frac{8}{3}R$. Выражение (12.8) дает для минимальной начальной скорости значение $v_{0\min}^2 = \frac{2}{3}v_{\text{кр}}^2$, или $v_{0\min} = 0.8165 v_{\text{кр}}$. Из треугольника TSE можно заключить, что синус угла TSE равен $3/5$.

Для попадания в цель вектор начальной скорости \mathbf{v}_0 нужно направить по биссектрисе угла TSZ (см. рис. 12.5, b). Поэтому угол между вектором \mathbf{v}_0 и вертикалью должен быть равен 71.565° . Траектория такого баллистического снаряда представляет собой отрезок ST эллипса, фокусы которого находятся в точках E (в центре Земли) и F . Точка F лежит

на прямолинейном отрезке ST , соединяющем начальную точку с мишенью.

Огибающий эллипс и траектории, показанные на рис. 12.5 (как и на всех остальных рисунках данного раздела), построены при помощи моделирующей программы «Баллистические снаряды и спутники» пакета программ «Движение космических тел».

12.4.2 Цели в северном и южном полушариях

Рисунки 12.6, *a* и 12.6, *b* показывают траектории баллистических снарядов, запущенных с Северного полюса с минимальной начальной скоростью, необходимой для достижения заданных целей в южном полушарии на широтах 45° и 30° соответственно. Обе точки S и T по-прежнему находятся на поверхности Земли, так что расстояния от них до центра Земли равны радиусу Земли R : $r_0 = r_T = R$. Для цели T на южной широте 45° расстояние l_T от начальной точки S до цели T равно $2R \sin 22.5^\circ$, так что $b = r_T + l_T = 1.765 R$. Согласно выражению (12.8), минимальная начальная скорость $v_{0 \min}$ составляет $0.744 v_{кр}$. Угол TSZ в данном случае равен 112.5° . Вектор начальной скорости \mathbf{v}_0 должен быть направлен вдоль биссектрисы этого угла. Поэтому угол между начальной скоростью \mathbf{v}_0 и вертикалью должен составлять 56.25° .

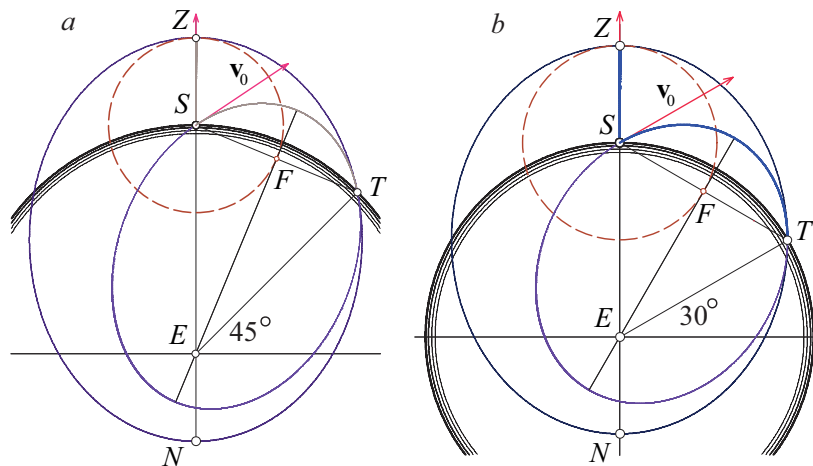


Рис. 12.6: Примеры траекторий баллистических снарядов, запускаемых из заданной начальной точки S на Северном полюсе с минимальной начальной скоростью, необходимой для достижения заданной цели T : *a* – находящейся на поверхности Земли в северном полушарии на широте 45° ; *b* – в северном полушарии на широте 30° .

Аналогично, для примера, показанного на рис. 12.6, *b*, расстояния $r_0 = r_T = R$. Для мишени T на широте 30° расстояние l_T также равно R , так что величина $b = r_T + l_T = 2R$. Согласно соотношению (12.8) минимальная начальная скорость $v_{0 \min} = \sqrt{2/3} v_{кр} = 0.8165 v_{кр}$. Угол TSZ в этом случае равен 120° . Это значит, что угол между вектором начальной скорости \mathbf{v}_0 и вертикалью должен составлять 60.0° .

На рисунках 12.7, *a* и 12.7, *b* показаны траектории баллистических снарядов (и граничные огибающие поверхности), выпущенных с Северного полюса с минимальной начальной скоростью, необходимой для поражения целей, расположенных в южном полушарии на широтах 30° и 45° соответственно. Мы предоставляем читателю расчет зна-

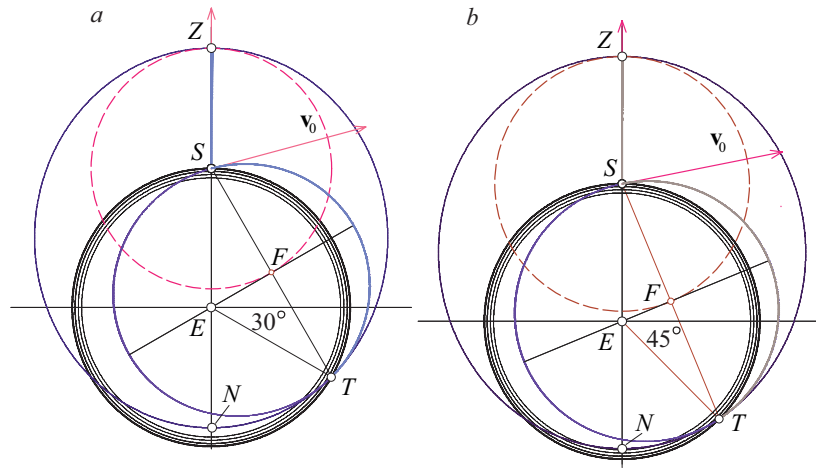


Рис. 12.7: Примеры траекторий баллистических снарядов, запускаемых из заданной стартовой позиции S на Северном полюсе с минимальной начальной скоростью, необходимой для достижения заданной цели T : a — находящейся на поверхности Земли в южной полушарии на широте 30° ; b — в южном полушарии на широте 45° .

чений величины минимальной начальной скорости и ее направления для этих случаев. Правильность вычислений можно проверить построением траекторий с помощью моделирующей компьютерной программы «Баллистические снаряды и спутники».

Обратим внимание на то, что в случае стартовой позиции на Северном полюсе и наземной цели минимальная необходимая начальная скорость баллистического снаряда приближается к круговой скорости $v_{кр} \approx 7.9$ км/с (скорости спутника на предельно низкой круговой орбите) по мере того, как цель перемещается к Южному полюсу. Чтобы снаряд, выпущенный с Северного полюса, смог достичь цели, расположенной на Южном полюсе, начальная скорость снаряда должна хотя бы ненамного превышать круговую скорость.

12.5 Огибающая семейства параболических траекторий

В учебной и педагогической литературе можно найти несколько элегантных аналитических выводов «параболоида безопасности» для случая снарядов, движущихся в однородном поле земного тяготения. Тем не менее мы приведем здесь для полноты простое геометрическое доказательство этого хорошо известного результата (см. рис. 12.1). Приводимый ниже вывод аналогичен рассмотренному выше доказательству эллиптической формы огибающей семейства кеплеровых орбит одинаковой энергии.

Все параболические траектории рассматриваемого семейства траекторий снарядов, выпущенных с равными по величине начальными скоростями, имеют общую точку (начальную точку S) и общую директрису AA' (см. рис. 12.8).

Геометрическое место фокусов всех парабол рассматриваемого семейства представляет собой окружность, центр которой расположен в начальной точке S , а радиус равен расстоянию от S до точки Z , находящейся на максимальной высоте подъема снаряда, запущенного вертикально вверх. Это геометрическое место фокусов парабол показано

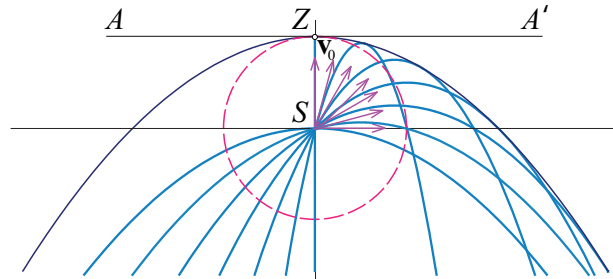


Рис. 12.8: Огибающая семейства параболических траекторий, по которым движутся в однородном поле снаряды, выпущенные из одной точки с равными по величине начальными скоростями, и геометрическое место фокусов этих парабол (штриховая окружность).

штриховой окружностью на рис. 12.8.

Эту окружность можно сопоставить с окружностью вторых фокусов эллиптических орбит на рисунках 12.2 – 12.7. Во всех случаях, независимо от величины начальной скорости снарядов, центр окружности фокусов совпадает с начальной точкой S , а радиус равен расстоянию от S до точки Z . Это верно для эллиптических орбит, а также и для рассматриваемого здесь случая, а именно для предельного случая малых начальных скоростей $v_0 \ll v_{\text{circ}}$, в котором небольшие верхние части эллипсов вблизи их вершин можно аппроксимировать параболами (приближение «плоской Земли»).

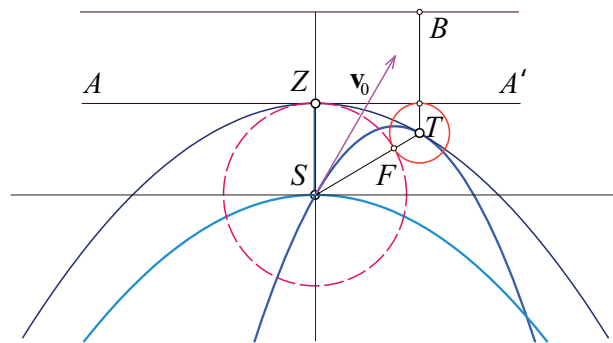


Рис. 12.9: Геометрическое построение для доказательства параболической формы границы области безопасности (подробности см. в тексте).

Чтобы доказать, что огибающая семейства параболических траекторий представляет собой параболу, выберем произвольную мишень T , находящуюся ниже прямой AA' , и начертим окружность с центром в точке T (см. рис. 12.9). Пусть радиус этой окружности равен расстоянию от T до линии AA' , так что окружность как раз касается этой горизонтальной прямой. Фокус искомой параболической траектории, проходящей через мишень T , должен лежать на этой окружности, потому что прямая AA' представляет собой директрису рассматриваемой параболы. В то же самое время фокус должен лежать и на окружности с центром в точке S , показанной штриховой линией на рис. 12.9 (это геометрическое место фокусов всех парабол данного семейства). Снова нужно рассмотреть

следующие три возможности.

1. Окружность с центром в T пересекает штриховую окружность фокусов всех парабол. В этом случае существует два фокуса, и поэтому две параболические траектории рассматриваемого семейства проходят через данную мишень T .
2. Окружность с центром в T не имеет общих точек с окружностью фокусов. Это значит, что ни одна из параболических траекторий семейства не проходит через данную мишень T : эта мишень T находится за пределами области, в которой лежат цели, достижимые для снарядов, выпущенных из точки S с данной начальной скоростью v_0 .
3. Наконец, окружность с центром в точке T касается окружности фокусов. В этом случае существует единственная траектория данного семейства парабол, проходящая через данную мишень. Это значит, что такая точка T принадлежит искомой границе (см. рис. 12.9). В этой точке T траектория касается границы «области безопасности».

Чтобы показать, что эта граница представляет собой параболу, начертим еще одну горизонтальную прямую, проходящую выше начальной точки S на вдвое большем расстоянии по сравнению с наибольшей высотой $|SZ|$ подъема снаряда, выпущенного из S вертикально вверх (см. рис. 12.9). В случае, когда обе рассматриваемые окружности касаются, расстояние $|TB|$ от мишени T до этой прямой как раз равно расстоянию ST . Это значит, что точка T принадлежит параболе, директриса которой — горизонтальная прямая, проходящая через точку B , а фокус этой параболы находится в начальной точке S . Таким образом, мы доказали, что огибающая семейства параболических траекторий — это параболы, вершина которой находится в точке Z , а фокус — в точке S .

Отметим, что искомая граница области безопасности может быть получена из параболической траектории снаряда, выпущенного из точки S в горизонтальном направлении, если поднять эту траекторию как целое на расстояние $|SZ|$. Это легко видеть из рис. 12.9. Данная траектория касается границы (огибающей семейства траекторий) в бесконечно удаленной точке.

Фокус параболической траектории, проходящей через данную цель T , лежит на прямолинейном отрезке, соединяющем начальную точку S и мишень T (см. рис. 12.9). Это следует из оптического свойства параболического зеркала, в соответствии с которым любой луч света, выходящий из фокуса, отражается параболическим зеркалом в направлении оси симметрии параболы. Поскольку в точке T обе параболы (траектория снаряда и огибающая семейства траекторий) имеют общую касательную, световые лучи, исходящие из их фокусов (F и S соответственно), отражаются в одном и том же направлении. Это значит, что точки S , F , и T лежат на одной прямой.

Вышеупомянутое оптическое свойство параболического зеркала позволяет легко найти направление, которое необходимо придать начальной скорости v_0 снаряда в точке S , чтобы поразить заданную цель T . Действительно, любой луч света, распространяющийся вертикально вверх, отражается параболическим зеркалом в точке T в направлении его фокуса F . Поэтому касательная к этой параболе в точке T , как и направление вектора v_0 (см. рис. 12.9), совпадают с биссектрисой угла ZSF (или ZST).

Глава 13

Механика космического полета

13.1 Активное маневрирование — возвращение с орбиты на Землю

В качестве примера активного маневрирования на околоземной орбите рассмотрим задачу перехода корабля с круговой орбиты на траекторию снижения. Для безопасного возвращения на Землю вход спускаемого аппарата в атмосферу должен происходить под малым углом. Крутой спуск чреват чрезмерными тепловыми нагрузками, предъявляющими высокие требования к теплозащитному экрану спускаемого аппарата, и опасными для космонавтов перегрузками, возникающими при быстром торможении. Это значит, что пассивная траектория снижения должна *касаться* границы плотных слоев атмосферы.

Рассмотрим и сопоставим два способа перехода корабля с круговой орбиты на траекторию снижения:

1. Дополнительная скорость при отстыковке от орбитальной станции сообщается кораблю в направлении, противоположном орбитальной скорости.
2. Дополнительная скорость сообщается кораблю в радиальном направлении (вертикально вниз).

Сообщение дополнительной скорости в любом случае переводит корабль с исходной круговой орбиты на эллиптическую. Один из фокусов эллипса, в соответствии с первым законом Кеплера, находится в центре Земли. При первом способе кратковременное включение тормозного двигателя изменяет только модуль, но не направление орбитальной скорости. Поэтому в точке A (рис. 13.1,а), где срабатывает двигатель, эллиптическая траектория снижения имеет общую касательную с исходной круговой орбитой. В этой точке будет расположен апогей A эллиптической траектории. Ее перигей лежит на противоположном конце P большой оси, проходящей через A и центр Земли E . Очевидно, что именно здесь эллипс должен проходить над самой поверхностью Земли (точнее, касаться плотных слоев атмосферы). Это и будет точка входа в атмосферу.

Сделаем расчет дополнительной скорости Δv , необходимой для перехода на такую эллиптическую траекторию снижения. Пусть $v_A = v_{кр} - \Delta v$ — скорость в апогее A ($v_{кр}$ — исходная скорость на круговой орбите), а v_P — скорость в перигее P . Запишем уравнения сохранения энергии и момента импульса (т. е. второго закона Кеплера) для точек A

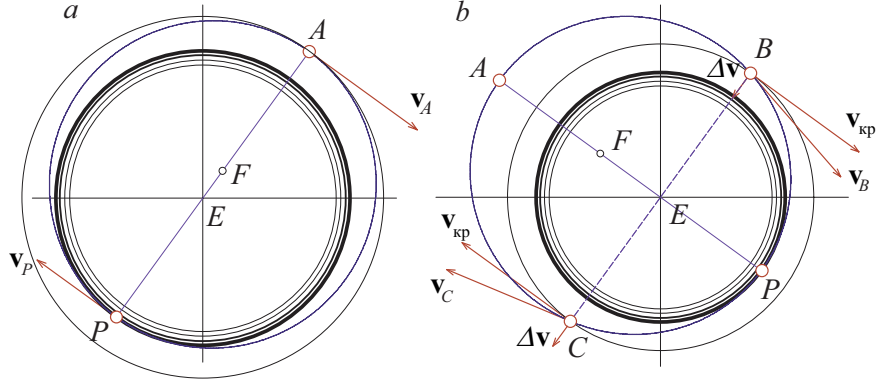


Рис. 13.1: Возможные траектории снижения космического корабля в заданную точку P поверхности Земли с исходной круговой орбиты.

и P :

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM}{R}; \quad rv_A = Rv_P. \quad (13.1)$$

Здесь r — радиус исходной круговой орбиты, R — радиус Земли, M — масса Земли. Подставляя v_P из второго уравнения (13.1) в первое, получим

$$v_A^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{2GM}{r} \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (13.2)$$

Сокращая обе части (13.2) на $(1 - r/R)$, находим значение скорости v_A в апогее

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + r/R}}}. \quad (13.3)$$

Учитывая, что скорость станции на круговой орбите $v_{кр} = \sqrt{GM/r}$ и что $v_A = v_{кр} - \Delta v$, находим из (13.3) величину необходимого изменения скорости

$$\Delta v = v_{кр} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + r/R}}\right). \quad (13.4)$$

В случае низкой круговой орбиты (высота которой $h \ll R$) точную формулу (13.4) можно приближенно представить в более простом виде. Подставим в (13.4) $r = R + h$ и преобразуем квадратный корень следующим образом:

$$\sqrt{\frac{2}{1 + r/R}} = \sqrt{\frac{2}{2 + h/R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h/(2R)}} \approx 1 - \frac{h}{4R}.$$

Подставляя это значение в (13.4), получаем окончательно

$$\Delta v \approx v_{кр} \frac{h}{4R}. \quad (13.5)$$

Например, когда высота круговой орбиты составляет 20% радиуса Земли ($h = 0.2 R$), дополнительная скорость Δv , согласно (13.5), должна составлять приблизительно 5% исходной скорости на круговой орбите.

Рассчитаем теперь тормозной импульс для второго способа перехода на траекторию снижения. Сообщение дополнительной скорости в радиальном (поперечном к орбитальной скорости) направлении изменяет и модуль, и направление скорости. Поэтому новая эллиптическая траектория *пересекает* в этой точке (B на рис. 13.1, b) исходную круговую орбиту. Пусть эллиптическая траектория снижения касается Земли в точке P (это перигей новой орбиты, по которой происходит снижение). Запишем для точек B и P уравнения законов сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{v_{\text{кр}}^2 + (\Delta v)^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM}{R}; \quad v_{\text{кр}} r = v_P R. \quad (13.6)$$

Здесь скорость v_P в перигее, как и Δv , имеет, разумеется, иное значение, чем в уравнении (13.1). Обратите внимание, что постоянная секториальная скорость в (13.6) для траектории снижения имеет то же значение, что и для исходной круговой орбиты: дополнительный радиальный импульс не изменяет *момента* импульса. Подставляя $v_P = v_{\text{кр}} R / r$ в первое из уравнений (13.6) и учитывая, что $GM/r = 2v_{\text{кр}}^2$, получаем

$$v_{\text{кр}}^2 + (\Delta v)^2 - 2v_{\text{кр}}^2 = v_{\text{кр}}^2 \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2.$$

Подставляя сюда $r = R + h$, окончательно получаем

$$\Delta v = v_{\text{кр}} \frac{h}{R}. \quad (13.7)$$

Таким образом, при втором способе перехода на траекторию снижения необходима, согласно (13.7), приблизительно в четыре раза большая дополнительная скорость по сравнению с первым способом. Например, для снижения с орбиты высотой $h = 0.2 R$ дополнительная скорость составляет 20% исходной скорости на круговой орбите.

Отметим, что для приземления в той же точке P , что и при первом способе снижения, радиальный тормозной импульс нужно сообщать кораблю в точке B круговой орбиты (см. рис. 13.1, b). Если при первом способе угловое расстояние между точкой D схода с круговой орбиты и точкой приземления P составляет 180° , при втором способе это угловое расстояние вдвое меньше (90°).

Дополнительный радиальный импульс для перехода на траекторию снижения можно сообщить кораблю не только вниз (в направлении на центр Земли), но и *вертикально вверх* (точка C на рис. 13.1, b). В этом случае от точки схода с круговой орбиты до точки приземления (входа в атмосферу) корабль пройдет угловое расстояние 270° . Сначала корабль будет удаляться от Земли и только после прохождения через апогей A новой эллиптической орбиты начнет снижаться. Проверьте в вычислительном эксперименте приведенные выше теоретические расчеты маневров перехода на траекторию снижения.

13.2 Эллиптическая орбита с требуемым периодом обращения

В задачах орбитального маневрирования часто встречается необходимость перевести космический аппарат с круговой орбиты на эллиптическую орбиту с заданным периодом

обращения. Сделаем расчет дополнительной скорости, которую нужно сообщить аппарату, движущемуся по круговой орбите, чтобы получить требуемый период обращения.

Если дополнительная скорость сообщается аппарату кратковременным включением ракетного двигателя по касательной к исходной круговой орбите в направлении его орбитального движения, большая полуось a новой эллиптической орбиты аппарата будет определяться формулой (10.17), стр. 183, полученной с помощью законов сохранения энергии и момента импульса (см. раздел 10.6 «Начальные условия и параметры кеплеровых орбит»). Найдем из формулы (10.17) выражение для квадрата начальной геоцентрической скорости v_0 (скорости в перигее эллиптической орбиты) через большую полуось a :

$$v_0^2 = v_{кр}^2 \left(2 - \frac{r_0}{a} \right). \quad (13.8)$$

Эта формула в равной мере справедлива как для случая, когда начальная скорость больше круговой $v_0 > v_{кр}$, так и для случая $v_0 < v_{кр}$, когда аппарат получает дополнительную скорость в направлении, противоположном направлению его скорости на исходной круговой орбите. В последнем случае точка отделения аппарата будет апогеем его эллиптической орбиты.

Далее воспользуемся третьим законом Кеплера, чтобы выразить отношение r_0/a в формуле (13.8) через заданное отношение периода обращения T_0 по исходной круговой орбите к периоду T обращения по новой эллиптической орбите:

$$\frac{r_0}{a} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, после импульсного маневра сообщения тангенциальной дополнительной скорости аппарат должен иметь следующую геоцентрическую скорость:

$$v_0 = v_{кр} \sqrt{2 - (T_0/T)^{2/3}}. \quad (13.9)$$

Так как на исходной орбите аппарат уже двигался со скоростью $v_{кр}$, требуемая для перехода на эллиптическую орбиту с периодом обращения T дополнительная тангенциальная скорость дается разностью

$$\Delta v = v_0 - v_{кр} = \left(1 - \sqrt{2 - (T_0/T)^{2/3}} \right) v_{кр}. \quad (13.10)$$

Согласно формуле (13.10) дополнительная скорость $\Delta v = v_0 - v_{кр} > 0$ при $T > T_0$, и $\Delta v = v_0 - v_{кр} < 0$ при $T < T_0$. В этом последнем случае дополнительная скорость должна сообщаться в направлении, противоположном скорости на исходной круговой орбите, и эллиптическая орбита лежит внутри исходной круговой орбиты.

13.2.1 Космический зонд с тангенциальным направлением дополнительной скорости

В качестве примера задачи активного маневрирования на космических орбитах рассмотрим «космический зонд», запускаемый с орбитальной станции, совершающей облет некоторой планеты, с целью сбора информации и исследования околопланетного пространства. Такая автоматическая научная лаборатория должна приблизиться к планете, произвести фотографирование ее поверхности и выполнить ряд измерений, а затем доставить накопленную информацию обратно на орбитальную станцию. Или, напротив, может

возникнуть необходимость запустить зонд на большое расстояние от Земли для изучения межпланетного пространства. Возможны ли необходимые для таких целей траектории полета космического зонда? Как их осуществить?

Примеры моделирования запусков различных космических зондов с помощью компьютерной программы «Маневры на орбите и относительное движение» рассмотрены в разделе 4.5.

При запуске со станции зонд перейдет на собственную эллиптическую орбиту вокруг планеты. Какие требования нужно предъявить к возможной орбите зонда? В первом из упомянутых выше случаев траектория должна подходить близко к поверхности планеты, т. е. это должна быть орбита с низким перигеем. В любом случае период обращения зонда по новой эллиптической орбите должен быть соизмеримым с периодом обращения станции вокруг планеты, чтобы зонд и станция периодически встречались. Такая встреча может произойти только в общей точке орбит станции и зонда. Это именно та точка, где зонд получил импульс дополнительной скорости.

Если, например, периоды обращения зонда и станции относятся как 3 к 2, зонд после совершения двух оборотов придет в общую точку их орбит одновременно со станцией как раз в тот момент, когда станция завершит три оборота.

Сделаем расчет скорости, которую нужно сообщить зонду при отделении от станции, чтобы получить требуемый период обращения. Если после отделения от станции дополнительная скорость сообщается зонду в направлении орбитального движения станции, для перехода на нужную эллиптическую орбиту зонд должен получить геоцентрическую скорость v_0 , величина которой определяется формулой (13.9), а дополнительная скорость $\Delta v = |v_0 - v_{кр}|$ — формулой (13.10).

Расчитанные по формулам (13.9) и (13.10) значения начальной скорости зонда v_0 и соответствующей дополнительной скорости $|\Delta v|$ (в процентах от орбитальной скорости $v_{кр}$) для некоторых значений отношения периодов обращения T_0/T приведены в таблицах 4.1 (стр. 81) и 4.2 (стр. 84).

13.2.2 Космический зонд с радиальным направлением дополнительной скорости

Если при отделении зонда от станции дополнительную скорость Δv сообщать в радиальном направлении (вертикально вверх или вниз), то период обращения зонда по эллиптической орбите может быть только больше периода обращения станции по круговой орбите. Применяя к этому случаю закон сохранения энергии и второй закон Кеплера (закон сохранения момента импульса) и учитывая, что сообщение дополнительной скорости в радиальном направлении не изменяет момента импульса зонда, можно получить следующие выражения для расстояний от центра Земли до апогея и перигея эллиптической орбиты зонда (соответствующий расчет предоставляем выполнить читателю самостоятельно):

$$r_A = \frac{r_0}{1 - \Delta v/v_{кр}}; \quad r_P = \frac{r_0}{1 + \Delta v/v_{кр}}. \quad (13.11)$$

Отсюда для большой полуоси a эллиптической орбиты зонда получаем следующее выражение:

$$a = \frac{1}{2}(r_A + r_P) = \frac{r_0}{1 - (\Delta v/v_{кр})^2}. \quad (13.12)$$

Применим и здесь третий закон Кеплера $r_0/a = (T_0/T)^{2/3}$ для определения орбиты, дающей требуемый период обращения. Тогда из формулы (13.12) можно найти, что для того,

чтобы получить нужное значение (T_0/T) , космическому зонду при отделении от станции в радиальном направлении необходимо сообщить дополнительную скорость Δv , определяемую соотношением:

$$\left(\frac{\Delta v}{v_{\text{кр}}}\right) = 1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^{2/3}. \quad (13.13)$$

Например, для $T_0/T = 2/3$ формула (13.13) дает $\Delta v/v_{\text{кр}} = 0.48668$, а для $T_0/T = 4/5$ из (13.13) имеем $\Delta v/v_{\text{кр}} = 0.37179$. Эти значения дополнительной скорости можно использовать при моделировании запусков зондов в программе «Маневры на орбите и относительное движение».

13.3 Приближенные уравнения относительного движения орбитальных тел

Для исследования относительного движения тел на космических орбитах можно использовать приближенные дифференциальные уравнения, справедливые в условиях сравнительно небольших расстояний между телами (малых по сравнению с размерами орбиты). Рассмотрим для определенности движение некоторого небольшого предмета, брошенного космонавтами с орбитальной станции, движущейся по круговой околоземной орбите (рис. 13.2). Моделирование движения предмета в геоцентрической системе отсчета и моделирование движения предмета относительно орбитальной станции подробно рассматривается в разделе 4.4.1 (стр. 71).

Будем использовать связанную с орбитальной станцией неинерциальную систему отсчета (рис. 13.2). Ось z направим перпендикулярно плоскости орбиты станции (параллельно вектору угловой скорости Ω обращения станции). Ось x направим в плоскости орбиты радиально от центра Земли, а ось y — вдоль направления орбитальной скорости $v_{\text{кр}}$. Вектор \mathbf{r}_0 проведен из центра Земли к орбитальной станции. Радиус-вектор \mathbf{r} определяет положение предмета относительно станции, а вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$ — относительно центра Земли.

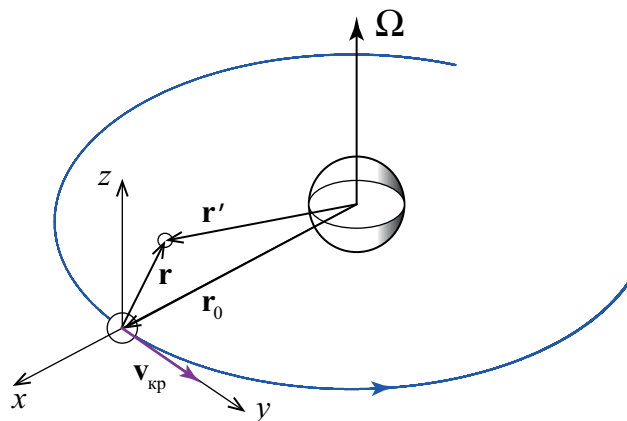


Рис. 13.2: Система координат, связанная с орбитальной станцией.

Ускорение \mathbf{a} предмета относительно выбранной вращающейся системы отсчета определяется силой земного тяготения $-GmM\mathbf{r}'/r'^3$ (M — масса Земли, m — масса предмета), а также центробежной силой инерции $-m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$ и кориолисовой силой инерции $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$, где \mathbf{v} — вектор скорости предмета относительно станции:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r'^3}\mathbf{r}' - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (13.14)$$

Представим входящий в (13.14) вектор \mathbf{r}' в виде суммы $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$. Чтобы упростить $1/r'^3$ в случае малых отклонений $r \ll r_0$, возведем \mathbf{r}' сначала в квадрат, а затем в степень $-3/2$. При возведении в квадрат вектора $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$ можно отбросить r^2 . Ограничиваясь линейными по малой величине r/r_0 членами, в первом члене в правой части (13.14) получим

$$\frac{GM}{r'^3} \approx \frac{GM}{r_0^3} \left(1 + 2\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0^2}\right)^{-3/2} \approx \Omega^2 \left(1 - 3\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0^2}\right). \quad (13.15)$$

Здесь мы учли, что квадрат угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ обращения станции по орбите равен GM/r_0^3 . При подстановке (13.15) в (13.14) с точностью до линейных по r/r_0 членов получаем

$$\mathbf{a} = -\Omega^2(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) + 3\Omega^2\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{r_0^2}\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (13.16)$$

В выражении (13.16) главный член ускорения, сообщаемого брошенному предмету силой тяготения ($-\Omega^2\mathbf{r}_0$), компенсируется главным членом ускорения, сообщаемого центробежной силой инерции $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0)$, см. рис. 13.2). Проекция уравнения (13.16) на оси системы координат, связанной с орбитальной станцией, дают следующую систему приближенных дифференциальных уравнений относительного движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3\Omega^2 x + 2\Omega \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2\Omega \dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\Omega^2 z. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Движение брошенного предмета начинается от станции (из начала координат), поэтому во всех случаях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Получим решения системы уравнений (13.17) для разных направлений начальной скорости \mathbf{v}_0 предмета относительно орбитальной станции.

1. Предмет бросают в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, т. е. $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0$. Для таких начальных условий решение системы (13.17) имеет вид $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $z(t) = (v_0/\Omega) \sin \Omega t$. Таким образом, предмет совершает относительно станции периодическое колебательное движение вдоль оси z с периодом $T = 2\pi/\Omega$, равным периоду обращения станции по круговой орбите. Через четверть оборота предмет удаляется от станции на максимальное расстояние $l = v_0/\Omega = r_0(v_0/v_{кр})$.

Пусть, например, высота круговой орбиты $h = 0.1 R \approx 640$ км (радиус орбиты $r_0 \approx 7$ тыс. км, период обращения $T \approx 98$ мин), а начальная скорость предмета $v_0 = 15$ м/с, что составляет 0.2% орбитальной скорости $v_{кр} = 7.5$ км/с. Тогда максимальное удаление предмета от станции $l \approx 14$ км.

Этот результат легко объяснить, рассматривая движение предмета и станции в геоцентрической системе отсчета. В самом деле, в этом случае предмет будет двигаться практически по круговой орбите, которая отличается от орбиты станции лишь небольшим

наклоном своей плоскости (на угол $\alpha = v_0/v_{кр} \approx 2 \cdot 10^{-3}$). Обращаясь практически с одинаковыми периодами, предмет и станция через каждые поворота будут встречаться в точках пересечения своих орбит, удаляясь затем на максимальное расстояние $l = r_0\alpha = r_0(v_0/v_{кр})$.

2. Предмет бросают в радиальном направлении, например, вертикально вниз в сторону Земли, т. е. $\dot{x}(0) = -v_0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$. Для таких начальных условий второе из уравнений (13.17) дает $\dot{y} = -2\Omega x$. Подставляя \dot{y} в первое уравнение (13.17), получаем $\ddot{x} = -\Omega^2 x$, откуда $x(t) = -(v_0/\Omega) \sin \Omega t$. Теперь из уравнения $\dot{y} = -2\Omega x$ при условии $y(0) = 0$ находим зависимость координаты y от времени: $y(t) = -2(v_0/\Omega)(\cos \Omega t - 1)$. Описываемое этими уравнениями движение предмета относительно станции происходит в плоскости xy ее орбиты ($z(t) = 0$). Чтобы установить форму траектории относительного движения, следует исключить время из уравнений для $x(t)$ и $y(t)$. В результате получаем

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{(y - 2l)^2}{(2l)^2} = 1. \quad (13.18)$$

Здесь, как и раньше, использовано обозначение $l = v_0/\Omega = r_0(v_0/v_{кр})$. Из (13.18) видно, что в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией, предмет движется по эллипсу, малая полуось которого равна $l = r_0(v_0/v_{кр})$, что составляет около 14 км при $v_0 = 15$ м/с (рис. 13.3). Большая полуось эллипса в два раза больше и ориентирована в направлении орбитальной скорости станции. Сравните эту теоретическую траекторию относительного движения с результатом компьютерного моделирования аналогичной ситуации, показанными в правой части рисунка 4.5 (стр. 72).

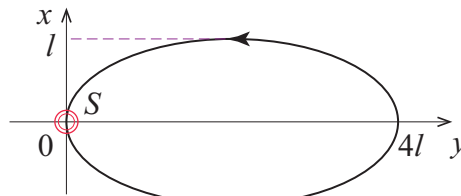


Рис. 13.3: Траектория брошенного предмета относительно орбитальной станции при направлении начальной скорости вертикально вниз к Земле.

Таким образом, брошенный в сторону Земли предмет сначала действительно движется относительно станции вертикально вниз. Именно таким и представляется находящимся на станции космонавтам движение предмета, пока они в состоянии следить за ним невооруженным глазом. Но постепенно предмет начинает отклоняться от первоначально почти вертикальной траектории и через половину оборота станции по орбите оказывается на прежней высоте впереди станции на расстоянии $4l$ (около 56 км). Еще через поворот брошенный вертикально вниз предмет возвращается к станции с противоположной стороны (сверху, см. рис. 13.3).

Такое периодическое движение предмета относительно станции также легко объяснить с точки зрения геоцентрического наблюдателя. Брошенный в радиальном направлении предмет движется по эллиптической орбите с ничтожным эксцентриситетом и практически таким же, как у станции, периодом обращения. Эта орбита лежит в плоскости круговой орбиты станции и отличается от окружности практически лишь небольшим

смещением центра. Обе окружности (т. е. орбиты станции и предмета) пересекаются в начальной точке и в диаметрально противоположной точке, куда станция приходит через половину периода обращения по орбите. В этой точке предмет снова оказывается на прежней высоте. Однако из-за небольшой неравномерности движения по своей эллиптической орбите (вспомните второй закон Кеплера) предмет приходит в эту диаметрально противоположную точку немного раньше станции, так как на середине именно этой половины орбиты он проходит через перигей. В результате в этот момент он опережает станцию в ее орбитальном движении на максимальное расстояние $4r_0(v_0/v_{кр})$. На следующей половине витка предмет проходит через апогей своей орбиты, и из-за небольшого замедления движения на этом участке орбиты приходит в общую начальную точку одновременно со станцией, приближаясь к ней сверху.

3. Когда предмет бросают в направлении орбитальной скорости $v_{кр}$ (вперед или назад), период его обращения по эллиптической геоцентрической орбите уже нельзя считать равным периоду обращения станции. В относительном движении появляется «вековой» член, монотонно возрастающий со временем. Для начальных условий $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$, $\dot{z}(0) = 0$ решение системы (13.17) имеет вид $x(t) = 2l(1 - \cos \Omega t)$, $y(t) = l(-3\Omega t + 4 \sin \Omega t)$, $z(t) = 0$, где, как и прежде, $l = r_0(v_0/v_{кр})$. В радиальном направлении (по высоте) относительное движение по-прежнему периодическое, но вдоль орбиты (вдоль оси y) наряду с периодическими колебаниями происходит также монотонное изменение координаты со средней скоростью $-3\Omega l = -3v_0$. Траектория такого движения показана на рис. 13.4. Сначала брошенный вперед предмет движется относительно станции в направлении сообщенной ему начальной скорости, но вскоре отклоняется вверх и начинает попятное движение. Спустя время T , равное периоду обращения станции, предмет окажется на прежней высоте, но позади станции вдоль орбиты на расстоянии $6\pi l$ (около 265 км при $v_0 = 15$ м/с). Сравните эту теоретическую траекторию относительного движения с результатом компьютерного моделирования аналогичной ситуации, который показан в правой части рисунка 4.9 (стр. 78).

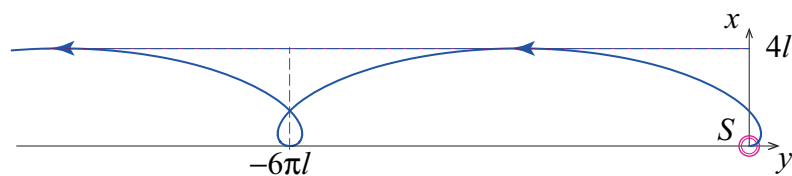


Рис. 13.4: Траектория брошенного предмета относительно орбитальной станции при направлении начальной скорости вперед по направлению орбитальной скорости станции.

13.4 Рандеву в космосе: мягкая стыковка с орбитальной станцией

Орбитальная станция S движется вокруг Земли по круговой орбите (по часовой стрелке на рисунке 13.5). Космический корабль с членами экипажа и расходными материалами запущен для стыковки со станцией, но из-за непредвиденной задержки при старте корабль вышел на ту же, что у станции, круговую орбиту на некотором расстоянии позади станции (в точку A). Стыковка космического корабля со станцией создает серьезные

проблемы, с которыми не сталкиваются, скажем, при сближении двух самолетов для дозаправки. Подобно воздушному транспорту, космические корабли движутся в трех измерениях. Но в отличие от путешествий в атмосфере, дополнительные трудности навигации в космосе возникают из-за того, что космические корабли на орбите находятся в состоянии свободного падения в гравитационном поле Земли.

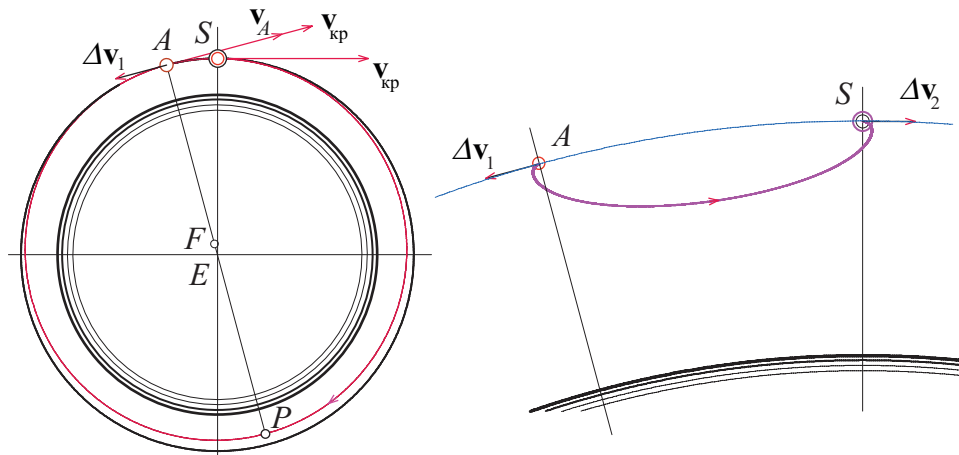


Рис. 13.5: Эллиптическая траектория движения космического аппарата, необходимая для достижения орбитальной станции S (слева), и как эта траектория выглядит в системе отсчета станции S (справа).

Процесс стыковки двух космических аппаратов на орбите был в центре внимания диссертации доктора Олдрин, озаглавленной «Методы визуального наведения для пилотируемого рандеву на орбите», представленной в МИТ (Массачузетский Технологический Институт). Эта диссертация дала ему среди коллег прозвище «Доктор Рандеву». Он был первым доктором философии в космосе. Первая стыковка космических аппаратов произошла на Gemini-8, в 1966 г. Вскоре после этого д-р Олдрин пилотировал корабль Gemini-12 и имел возможность проверить свою докторскую работу на практике. Астронавты Нил Армстронг и Базз Олдрин остаются в истории как первые люди, ступившие в 1969 году на Луну.

Пусть расстояние L между двумя космическими аппаратами на одной орбите мало по сравнению с радиусом r_0 орбиты ($L \ll r_0$), см. рис. 13.5. Даже в этом случае для сближения со станцией и стыковки недостаточно просто направить нос активного транспортного корабля на цель и включить ракетный двигатель. Доктор Олдрин описывает удивительный результат такого маневра, как орбитальный парадокс: «В конечном итоге корабль переходит на более высокую орбиту, по которой движется с меньшей скоростью, и Вы с удивлением будете наблюдать, как Ваша цель — станция удаляется от корабля.

Правильная методика обеспечения рандеву со станцией требует определенного изменения орбиты активного космического корабля. Новая орбита должна позволить сближение корабля с целью, а затем потребуются должным образом уравнивать скорости корабля и станции для устранения их относительного движения.

Для того, чтобы космический аппарат добрался до станции, скажем, через один оборот станции по орбите, требуется дополнительный ракетный импульс бортового двига-

теля. На первый взгляд это может показаться странным, но чтобы догнать станцию, которая движется по той же орбите впереди космического корабля и сблизиться с ней, мы должны тормозить, а не разгонять корабль. Но вооружившись знанием того, как все происходит в условиях орбитального полета, мы можем понять, что в большинстве случаев для наиболее экономичного (с точки зрения затрат ракетного топлива) метода сближения требуется тангенциальный тормозной импульс, который должен замедлить космический корабль. Ракетный импульс, направленный противоположно орбитальной скорости, переводит корабль на внутреннюю эллиптическую орбиту (см рис. 13.5), апогей A которой находится в точке A срабатывания тяги двигателя, а перигей расположен в диаметрально противоположной точке P .

Точка A является единственной общей точкой круговой орбиты станции и эллиптической орбиты космического аппарата. Только в этой точке пространства возможно сближение корабля и станции. Для того, чтобы космический корабль прибыл в эту точку одновременно с мишенью, период T обращения корабля вдоль эллипса должен равняться промежутку времени, в течение которого станция движется по своей орбите от точки S (в которой станция находилась в момент работы ракетного двигателя корабля) до точки A . Мы должны использовать это условие для расчета требуемого значения дополнительной скорости Δv_1 маневра. Это может быть сделано с помощью законов сохранения энергии и момента импульса вместе с третьим законом Кеплера. Детали расчета можно найти в разделе 13.2. Согласно формуле (13.13), после импульса обратной тяги космический аппарат должен иметь в точке A следующую скорость v_A :

$$v_A = v_{кр} \sqrt{2 - (T_0/T)^{2/3}}. \quad (13.19)$$

Здесь T_0 — период обращения станции по круговой орбите. С помощью этой формулы легко рассчитать необходимую величину направленной назад дополнительной скорости Δv_1 :

$$\Delta v_1 = v_{кр} - v_A = v_{кр} \left(1 - \sqrt{2 - (T_0/T)^{2/3}} \right). \quad (13.20)$$

Это точное выражение для Δv_1 . Его можно упростить для случая малого расстояния L между кораблем и отслеживаемой целью. В этом случае эллиптическая орбита лишь незначительно отличается от круговой орбиты станции (см рис. 13.5), так что мы можем представить требуемый период в виде $T = T_0 - \Delta T$ и рассматривать $\Delta T/T_0$ как малый параметр ($\Delta T/T_0 = L/(2\pi r_0) \ll 1$). Это дает для v_A и Δv_1 вместо (13.19) и (13.20) следующие приближенные выражения:

$$v_A \approx v_{кр} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta T}{T_0} \right), \quad \Delta v_1 \approx v_{кр} \frac{\Delta T}{3T_0} = v_{кр} \frac{L}{6\pi r_0} = \frac{L}{3T_0}. \quad (13.21)$$

Для иллюстрации сближения корабля с орбитальной станцией с помощью компьютерного моделирования (см рис. 13.5), мы выбираем для определенности угловое расстояние между космическим кораблем и целевой орбитальной станцией равным 15° (дуга AS на рис. 13.5), так что $\Delta T/T_0 = L/(2\pi r_0) = 1/24$. Приближенное равенство (13.21) дает для этого случая $\Delta v_1 = 0.0139 v_{кр}$, в то время как точное выражение (13.20) дает $\Delta v_1 = 0.0145 v_{кр}$ (значение, используемое при моделировании). Мы видим, что после совершения одного оборота по эллипсу космический корабль прибывает в апогей A одновременно со станцией.

Правая часть рис. 13.5 показывает траекторию космического корабля в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией. Сначала движение корабля относительно стан-

ции на самом ретроградное (попятное): он движется в обратном направлении по отношению к направлению орбитального движения, т. е. в направлении дополнительной скорости Δv_1 . Но очень скоро относительная скорость поворачивается вниз, а затем вперед. Корабль постепенно обгоняет станцию, поднимается на начальную высоту, и после одного полного оборота оказывается в точности перед станцией, пришедшей к этому моменту в точку A по своей круговой орбите. Когда корабль достигнет станции, еще один ракетный импульс требуется для уравнивания скорости корабля и станции для причаливания и мягкой стыковки. Дополнительная скорость Δv_2 , требуемая для этого маневра, должна быть той же величины, что и Δv_1 , но должна быть направлена в противоположную сторону, т. е. в направлении орбитального движения.

Если космический аппарат должен приблизиться и пристыковаться к станции после двух (или n) оборотов по орбите, характеристическая скорость маневра должна быть примерно в два раза (или в n раз) меньше.

Аналитический вывод траектории относительного движения космического корабля в окрестности орбитальной станции можно произвести на основе приближенных (линеаризованных) дифференциальных уравнений (13.17), стр. 221 (см. раздел 13.3). Пусть корабль движется по той же круговой орбите, что и станция, но позади станции на небольшом расстоянии L . Принимая $t = 0$ в качестве момента срабатывания ракетного двигателя, можем записать начальные условия для дифференциальных уравнений (13.17) относительного движения в виде $x(0) = 0$, $y(0) = -L$, $z(0) = 0$. (см. рис. 13.6). Чтобы достичь станции S (в используемой системе отсчета станция неподвижна в начале координат), кораблю в точке A при $t = 0$ нужно сообщить относительно станции начальную скорость $\Delta v_1 = L/(3T_0) = L\Omega/6\pi$ в направлении против орбитального движения: $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y} = -\Delta v_1$, and $\dot{z} = 0$.

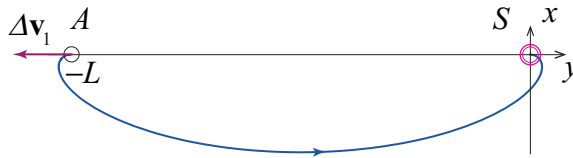


Рис. 13.6: Траектория сближения космического корабля с орбитальной станцией.

Для таких начальных условий частное решение системы дифференциальных уравнений (13.17) относительного движения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{L}{3\pi} (\cos \Omega t - 1), \\ y(t) &= \frac{L}{6\pi} (3 \Omega t - 4 \sin \Omega t) - L, \\ z(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Это решение можно трактовать как периодическое движение корабля (с периодом $T_0 = 2\pi/\Omega$) по эллипсу

$$x(t) = \frac{L}{3\pi} (\cos \Omega t - 1), \quad y(t) = -\frac{2L}{3\pi} \sin \Omega t, \quad (13.23)$$

большая и малая полуоси которого равны $2L/(3\pi)$ и $L/(3\pi)$ соответственно, совместно с одновременным равномерным движением этого эллипса в направлении оси y со скоро-

стью $L\Omega/2\pi = L/T_0$. За время T_0 совершения кораблем одного оборота по эллипсу, сам эллипс смещается (вдоль орбиты) на расстояние L .

Параметрическое уравнение траектории движения корабля относительно станции дается формулами (13.23). Эта траектория показана (для промежутка времени $0 < t < T_0$) на рис. 13.6. Корабль начинает движение из точки A , расположенной на расстоянии L позади орбитальной станции S , находящейся в начале координат. По истечении промежутка времени $T_0 = 2\pi/\Omega$ корабль достигает точки, также находящейся в начале координат: корабль приближается к станции. Можно сравнить эту приближенную траекторию с точной кривой относительного движения в правой части рис. 13.5, полученной с помощью компьютерного моделирования.

Глава 14

Планета с осевой симметрией

Как уже отмечалось в разделе 5.1 (стр. 94), нашу планету можно считать сферически симметричной лишь в первом приближении. Основное отклонение вызвано «сплюснутостью» земного шара, у которого полярный радиус на 21 км короче экваториального. Поэтому гравитационное поле Земли не имеет строгой сферической симметрии. В небесной механике Землю иногда представляют в виде шара с надетым на него по экватору массивным обручем, т. е. вместо полярного сжатия используют эквивалентное представление об экваториальном «вздутии» Земли. В выражении для силы тяготения, действующей на спутник Земли, благодаря экваториальному «обручу» присутствует дополнительный член с осевой симметрией. При учете таких искажений поля тяготения движение спутника происходит уже не по кеплерову эллипсу, а по весьма сложной траектории, в общем случае не замкнутой и не лежащей в одной плоскости. После совершения одного оборота спутник уже не попадает в прежнюю точку.

14.1 Физические причины прецессии эллиптической орбиты экваториального спутника

Для спутника, находящегося на очень большом расстоянии от Земли, фактическое распределение массы Земли несущественно. Другими словами, на очень большом расстоянии поле тяготения Земли можно считать таким, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре: сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Искажение центрального поля тяготения планеты, вызванное ее сплюснутостью вдоль оси, описывается малым дополнительным членом, убывающим гораздо быстрее — обратно пропорционально четвертой степени расстояния до центра планеты. Дополнительная сила тяготения, действующая на спутник со стороны массивного экваториального «обруча», в общем случае не направлена к центру обруча. Поэтому полная сила тяготения характеризуется только осевой (а не сферической) симметрией.

При движении спутника в экваториальной плоскости планеты задача упрощается, ибо дополнительная сила притяжения спутника «обручем» направлена к центру, т. е. как и в случае сферически симметричной планеты зависит только от расстояния r до центра планеты. Но эта зависимость становится более сложной, так как к главному члену, обратно пропорциональному квадрату расстояния, добавляется небольшой член, обратно

пропорциональный четвертой степени расстояния r :

$$F_r = -G \frac{mM}{r^2} \left(1 + b \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (14.1)$$

В этой формуле G — гравитационная постоянная, m — масса спутника, M — масса планеты, R — ее экваториальный радиус. Значение безразмерной константы b зависит от степени «сплюснутости» планеты: оно равно отношению дополнительного члена силы тяготения к главному (невозмущенному ньютоновскому) члену на расстоянии R от центра планеты. В случае осевого сжатия планеты константа b положительна ($b > 0$). Если, например, некоторая часть Δm полной массы M сосредоточена в экваториальном поясе, этот параметр дается выражением $b = (3/4)\Delta m/M$ (см. следующий раздел). У Земли «сплюснутость» невелика: значение безразмерной постоянной b в уравнении (14.1) составляет всего лишь 0.0016.

Для гипотетической планеты, вытянутой вдоль оси (похожей на мяч для регби), константа b отрицательна ($b < 0$). В последнем случае можно представлять себе планету в виде шара с дополнительными точечными массами на полюсах — своего рода полярными «шапками.» В первом случае дополнительный член усиливает притяжение экваториального спутника к планете на малых расстояниях, а во втором ослабляет (по сравнению со случаем сферически симметричного распределения масс, когда всю массу планеты можно считать сосредоточенной в ее центре).

Поскольку в экваториальной плоскости планеты сила тяготения зависит только от расстояния r , момент импульса экваториального спутника сохраняется, и спутник описывает плоскую траекторию, которая в общем случае не будет замкнутой кривой. Движение по такой траектории происходит в соответствии со вторым законом Кеплера, т. е. радиус-вектор за равные промежутки времени описывает равные площади.

Как уже было сказано, для спутника, находящегося на очень большом расстоянии от Земли, отклонение поля тяготения от закона обратных квадратов из-за искажения формы планеты невелико. Поэтому на больших расстояниях спутник движется почти по кеплерову эллипсу.

Наличие дополнительного члена у силы тяготения, убывающего с расстоянием быстрее по сравнению с основным членом, заметно сказывается на сильно вытянутых орбитах спутников с низким перигеем, вызывая постепенный поворот большой оси эллипса вокруг фокуса при неизменных максимальном и минимальном расстояниях от центра планеты. Такой непрерывный поворот орбиты обычно называют прецессией.

Наблюдаемая в моделирующем эксперименте прецессия экваториальной орбиты в поле тяготения «сплюснутой» планеты иллюстрируется на рис. 5.1, стр. 95. Чтобы эффект был более заметен, при моделировании можно задавать утрированно большие значения (порядка единицы) безразмерного параметра b , характеризующего несферичность планеты и входящего в дополнительный член силы притяжения в уравнении (14.1).

В случае осевого «растяжения» планеты (или при наличии полярных «шапок») дополнительный член силы тяготения в экваториальной плоскости отрицателен ($b < 0$ в уравнении (14.1)), так как на малых расстояниях от планеты сила тяготения меньше, чем при сферически симметричном распределении масс. В самом деле, при приближении к планете расстояние до полярных «шапок» уменьшается медленнее, чем расстояние до ее центра. В этом случае при приближении к планете сила тяготения сообщает спутнику меньшее ускорение, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу, и этот эллипс как бы «распрямляется» вблизи перигея. В результате прецессия орбиты происходит в направлении, противоположном орбитальному движению спутника.

При работе с программой, моделирующей движение спутника в поле искаженной планеты, следует иметь в виду, что выражение (14.1) для силы тяготения, используемое при моделировании, приближенное и справедливо только для достаточно больших расстояний от планеты. Когда траектория проходит близко к поверхности сильно деформированной планеты, принятая математическая модель не обеспечивает необходимой точности.

14.2 Поле тяготения планеты с осевой симметрией

Когда распределение массы небесного тела обладает сферической симметрией, создаваемое этим телом поле тяготения вне тела эквивалентно гравитационному полю точечной массы, т. е. напряженность поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра тела. У звезд и планет масса распределена почти сферически симметрично, и в большинстве задач небесной механики можно считать, что их поля тяготения с высокой точностью подчиняются закону обратных квадратов.

Но в действительности форма планеты может слегка отличаться от идеальной сферы. Здесь мы покажем, что из-за небольшого аксиального искажения формы планеты ее гравитационное поле отличается от поля точечной массы небольшим дополнительным членом, который, как в уравнении (14.1), убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния от центра планеты.

14.2.1 Поле тяготения «вытянутой» вдоль оси планеты

Рассмотрим сначала случай «вытянутой» планеты, полярный радиус которой немного больше экваториального. Для достаточно больших расстояний от планеты можно принять, что гравитационное поле создается идеальной сферой массы $M - \Delta m$ и двумя точечными массами $\Delta m/2$, расположенными на полюсах планеты (рис. 14.1).

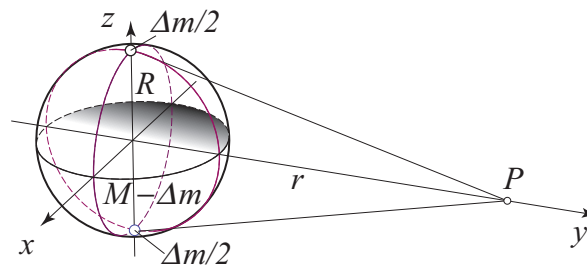


Рис. 14.1: Модель распределения массы для «вытянутой» планеты: шар массы $M - \Delta m$ и две точечные массы $\Delta m/2$ на полюсах.

Другими словами, мы предполагаем, что некоторая небольшая часть Δm всей массы M перенесена из центра на расстояние R к полюсам планеты. Благодаря осевой симметрии системы, гравитационное поле в экваториальной плоскости xy зависит только от расстояния r от центра. Потенциальная энергия $U(r)$ единичной массы в некоторой точке P экваториальной плоскости состоит из главного члена $-G(M - \Delta m)/r$, соответствующего точечному источнику массы $M - \Delta m$ в центре планеты (на расстоянии r от точки

P), и дополнительного члена, соответствующего двум точечным массам $\Delta m/2$ на полюсах (эти массы находятся на расстоянии $\sqrt{r^2 + R^2}$ от точки P):

$$U(r) = -\frac{G}{r}(M - \Delta m) - \frac{G\Delta m}{\sqrt{r^2 + R^2}} = -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{\Delta m}{M} + \frac{\Delta m}{M} \frac{1}{\sqrt{1 + (R/r)^2}} \right). \quad (14.2)$$

Разумеется, это приближенное выражение справедливо только для расстояний r , достаточно больших по сравнению с радиусом R планеты: $r \gg R$. Но когда для точки P это условие выполнено, т. е. $R/r \ll 1$, формулу (14.2) для $U(r)$ можно упростить и привести к следующему виду:

$$U(r) \approx -\frac{GM}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (14.3)$$

Силу тяготения $F(r)$, действующую на единичную массу в экваториальной плоскости планеты, можно найти как производную потенциальной энергии $U(r)$ по расстоянию r (взятую с противоположным знаком):

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (14.4)$$

Мы видим, что дополнительный член в выражении для силы тяготения $F(r)$ пропорционален степени искажения планеты (в нашей модели это искажение характеризуется величиной $\Delta m/M$) и обратно пропорционален четвертой степени расстояния r от центра планеты. Знак этого члена противоположен знаку главного члена, т. е. осевое растяжение планеты уменьшает силу тяготения в экваториальной плоскости. Сравнивая выражение (14.4) с уравнением (14.1), получаем следующее выражение для безразмерной величины b , которая в уравнении (14.1) характеризует искажение поля тяготения из-за аксиального растяжения планеты:

$$b = -\frac{3}{2} \frac{\Delta m}{M}. \quad (14.5)$$

14.2.2 Поле тяготения «сплюснутой» вдоль оси планеты

Аналогично можно рассмотреть случай «сплюснутой» планеты. На больших расстояниях от планеты (при $r \gg R$) поле тяготения будет таким, как если бы оно создавалось идеально сферическим телом массы $M - \Delta m$ с дополнительным экваториальным поясом массы Δm (см. рис. 14.2). Другими словами, мы принимаем модель, в которой некоторая часть Δm полной массы M перенесена из центра планеты на ее экватор, и равномерно распределена вдоль всего экватора.

Чтобы рассчитать поле тяготения, создаваемое такой системой, мы мысленно разбиваем экваториальный пояс на элементарные участки, стягиваемые центральным углом $d\theta$. Масса каждого элементарного участка равна $dm = (\Delta m/2\pi)d\theta$. Если угловое положение некоторого элемента пояса характеризуется углом θ (см. рис. 14.2), то расстояние от элемента до точки P равно $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$, и вклад этого элемента в потенциальную энергию единичной массы в точке P равен

$$dU(r) = -\frac{Gdm}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} = -\frac{G\Delta m}{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}. \quad (14.6)$$

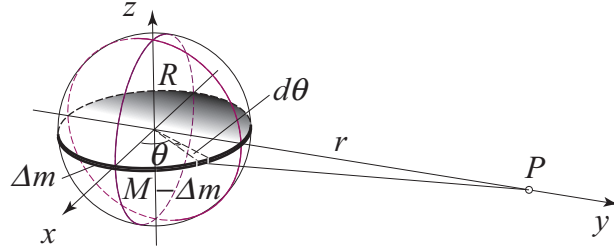


Рис. 14.2: Модель распределения массы для «сплюснутой» планеты: шар массы $M - \Delta m$ и экваториальный обруч массы Δm , опоясывающий планету.

Чтобы найти потенциальную энергию $\Delta U(r)$ в поле тяготения, создаваемом всем поясом, воспользуемся принципом суперпозиции. Для этого проинтегрируем $dU(r)$ из выражения (14.6) по θ вдоль всего пояса от 0 до 2π :

$$\Delta U(r) = -\frac{G\Delta m}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (R/r)^2 - 2(R/r) \cos \theta}}. \quad (14.7)$$

Принятая здесь модель распределения масс для «сплюснутой» планеты применима только для достаточно больших расстояний $r \gg R$, и поэтому можно упростить подынтегральное выражение в случае $R/r \ll 1$:

$$\begin{aligned} \Delta U(r) &\approx -\frac{G\Delta m}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos^2 \theta \right] d\theta = \\ &= -\frac{G\Delta m}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta \right] = \\ &= -\frac{G\Delta m}{r} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Добавляя потенциальную энергию $\Delta U(r)$ поля, создаваемого поясом, к потенциальной энергии $-G(M - \Delta m)/r$ единичной массы в поле тяготения точечного источника массы $M - \Delta m$, расположенного в центре планеты, получаем следующее выражение для потенциальной энергии на расстоянии r от «сплюснутой» планеты:

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\Delta m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] = -\frac{gR^2}{r} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\Delta m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (14.9)$$

Мы заменили здесь произведение GM на gR^2 , где g — ускорение свободного падения на поверхности планеты. Дифференцируя потенциальную энергию $U(r)$ по r , получаем выражение для силы тяготения, действующей на единичную массу в экваториальной плоскости планеты:

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] = -\frac{gR^2}{r^2} \left[1 + b \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (14.10)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр $b = (3/4)(\Delta m/M)$, характеризующий искажение поля тяготения из-за осевого сжатия планеты. Таким образом, в случае «сплюснутой» планеты экваториальный пояс приводит в выражении (14.1) для силы тяготения $F(r)$ к появлению дополнительного члена, который убывает с расстоянием обратно пропорционально четвертой степени расстояния r от центра планеты. Знак дополнительного члена совпадает со знаком основного члена (обратно пропорционального квадрату расстояния): осевое сжатие увеличивает силу тяготения в экваториальной плоскости планеты, что вызывает поворот большой оси эллиптической орбиты экваториального спутника в направлении его орбитального движения.

Глава 15

Задача двух и многих тел

15.1 Задача двух тел

Рассмотрим движение замкнутой системы двух взаимодействующих тел (материальных точек), имеющих массы m_1 и m_2 . В некоторой инерциальной системе отсчета их положения определяются радиусами-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Обозначим через \mathbf{F}_{12} центральную силу, действующую на первое тело со стороны второго. Тогда (в соответствии с третьим законом Ньютона) на второе тело со стороны первого должна действовать равная по модулю и противоположно направленная сила \mathbf{F}_{21} . Таким образом,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (15.1)$$

Не будем пока конкретизировать физическую природу взаимодействия рассматриваемых тел. В частном случае это могут быть силы всемирного тяготения. Запишем уравнения движения (уравнения второго закона Ньютона) для каждого из тел

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}_{12}. \quad (15.2)$$

Двумя точками над буквой здесь обозначена, как это обычно принято в механике, вторая производная по времени (ускорение). Перейдем в этой системе дифференциальных уравнений от переменных \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 к новым переменным \mathbf{r}_c и \mathbf{r} , которые выражаются через \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 следующим образом:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (15.3)$$

Новые переменные \mathbf{r}_c и \mathbf{r} в (15.3) имеют ясный физический смысл: радиус-вектор \mathbf{r}_c определяет положение центра масс системы двух тел, а вектор \mathbf{r} характеризует положение первого тела относительно второго. Складывая почленно уравнения движения (15.2), получаем $\ddot{\mathbf{r}}_c = 0$: центр масс системы двух взаимодействующих тел движется прямолинейно и равномерно. Отметим, что равенство нулю ускорения центра масс связано с тем, что силы взаимодействия удовлетворяют третьему закону Ньютона (15.1).¹ Чтобы

¹ Впрочем, можно считать сохранение импульса замкнутой системы и связанное с этим равномерное движение ее центра масс более фундаментальным свойством (выражающим однородность физического пространства), а третий закон Ньютона (и необходимость его выполнения для всех фундаментальных взаимодействий, включая закон всемирного тяготения) — следствием сохранения импульса.

получить дифференциальное уравнение для переменной \mathbf{r} , описывающей относительное движение тел, разделим первое из уравнений (15.2) на m_1 , второе — на m_2 , и вычтем из первого уравнения второе. В результате получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}. \quad (15.4)$$

Введем *приведенную массу* двух взаимодействующих тел по следующему определению:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{или} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.5)$$

Тогда (15.4) принимает вид уравнения движения *единственного* тела, имеющего массу μ (15.5), под действием центральной силы \mathbf{F}_{12} , равной силе взаимодействия тел. В частности, когда взаимодействие тел обусловлено всемирным тяготением, задача нахождения их относительного движения $\mathbf{r}(t)$ (т. е. движения первого тела относительно второго) сводится к задаче Кеплера для одного тела в центральном поле тяготения под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра. Такое движение происходит по одному из конических сечений (эллипсу, параболе или гиперболе).

Движение каждого из тел удобно рассматривать в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы тел. Выберем начало отсчета в центре масс, полагая $\mathbf{r}_c = 0$, т. е. $m_2 \mathbf{r}_2 = -m_1 \mathbf{r}_1$. Тогда радиусы-векторы каждого из тел будут следующим образом выражаться через радиус-вектор относительного положения $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (15.6)$$

Это значит, что в том случае, когда описываемое уравнением (15.4) относительное движение тел происходит под действием сил тяготения по какой-либо кеплеровой орбите, оба тела движутся по геометрически подобным кеплеровым орбитам с общим фокусом в центре масс системы.

Тела в своем движении находятся все время на противоположных концах отрезка прямой, проходящего через центр масс (см. рис. 6.2, стр. 104). Из (15.6) следует, что линейные размеры таких геометрически подобных орбит обратно пропорциональны массам тел. Когда масса m одного из тел много меньше массы M другого ($m \ll M$), как, например, в случае планеты и Солнца или спутника и планеты, центр масс системы практически совпадает с положением большого тела, а приведенная масса сводится к массе малого тела. В результате мы возвращаемся к задаче о движении тела под действием силы притяжения к неподвижному центру. При равных массах тел приведенная масса равна половине массы одного из тел. Линейные размеры орбит в этом случае одинаковы, а относительное движение тел происходит по геометрически подобной орбите вдвое большего размера.

Поскольку задача о движении двух взаимодействующих тел математически эквивалентна задаче о движении одного тела (с приведенной массой) в заданном постоянном центральном силовом поле, ее обычно не относят к задаче многих тел. Но описанный выше традиционный подход, будучи достаточно простым и совершенно правильным в математическом отношении, может вызвать у студента определенные трудности, поскольку для рассматриваемого относительного движения тел фактически используется неинерциальная система отсчета. При этом производится ссылка на известное решение задачи Кеплера, полученное в инерциальной системе отсчета. При изучении физики в рамках общего курса объяснение этого кажущегося несоответствия может оказаться слишком

тонким и трудным для понимания моментом. Да и задача преобразования от одной системы отсчета к другой в данном случае тоже может вызывать затруднения. В самом деле, ведь как непросто было Копернику и Галилею в свое время довести такие идеи до всеобщего признания.

Все эти затруднения можно обойти, если воспользоваться несколько иным, отличным от традиционного подходом к задаче двух тел. Будем рассматривать движение каждого из тел в инерциальной системе отсчета, связанной с общим центром масс. Поскольку сила тяготения в любой момент направлена вдоль прямой, соединяющей тела, и центр масс находится на этой прямой, то векторы сил, действующих на каждое из тел, всегда направлены к центру масс. Чтобы объяснить, почему движение каждого из тел относительно центра масс подчиняется законам Кеплера и происходит по коническим сечениям, достаточно показать, что можно трактовать движение каждого тела как происходящее в некотором эффективном гравитационном поле, создаваемом *неподвижным центром*, а не другим движущимся телом этой пары. Такой силовой центр расположен в неподвижном центре масс системы, и характеризуется некоторой эффективной массой $M_{\text{эфф}}$. Действующая на какое-либо из тел со стороны такого центра сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до него от этого тела.

В самом деле, пусть \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — проведенные из центра масс радиусы-векторы мгновенных положений тел, массы которых равны m_1 и m_2 . Тогда

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad r_1 + r_2 = [1 + (m_1/m_2)]r_1. \quad (15.7)$$

Пользуясь этим соотношением, в формуле для силы тяготения \mathbf{F}_1 , приложенной к первому телу со стороны второго, мы можем выразить расстояние $(r_1 + r_2)$ между телами через расстояние r_1 от центра масс до первого тела:

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} = -G \frac{m_1 (M_1)_{\text{эфф}}}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}, \quad (M_1)_{\text{эфф}} = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (15.8)$$

Таким образом, в связанной с центром масс инерциальной системе отсчета движение первого тела массы m_1 будет в точности таким, как если бы на него действовало центральное поле тяготения, создаваемое неподвижным источником с массой $(M_1)_{\text{эфф}}$ (а не вторым движущимся телом). Как мы знаем, такое движение происходит по законам Кеплера.

Такие же рассуждения можно применить и ко второму телу системы: его гравитационное взаимодействие с первым телом можно заменить действием некоторого неподвижного источника, расположенного в центре масс и характеризуемого (другой) эффективной массой $(M_2)_{\text{эфф}} = m_1^3/(m_1 + m_2)^2$. Остается только доказать, что кеплеровы движения обоих тел происходят синхронно по геометрически подобным компланарным (замкнутым либо открытым) орбитам, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. Такое заключение немедленно вытекает из уравнения $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$, выполняющегося в системе центра масс при движении тел в любой момент времени.

В любой другой инерциальной системе отсчета, т. е. при наблюдении «со стороны», тела системы движутся неравномерно вдоль сложных волнообразных или петлеобразных траекторий. Эта кажущаяся сложность их движения получается в результате сложения сравнительно простых кеплеровых движений (периодических при замкнутых орбитах) относительно центра масс с равномерным прямолинейным движением вместе с центром масс системы. На рис. 6.3 (стр. 105) показан пример таких траекторий.

15.2 Точные частные решения задачи трех тел

Для ограниченной круговой задачи трех тел существует класс точных решений, соответствующих равновесию третьего тела (масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел) во вращающейся системе отсчета, связанной с линией, соединяющей массивные тела. Такое равновесие возможно, если третье тело находится в одной из пяти точек, называемых *лагранжевыми точками* (или *точками либрации*). Ниже приводится математическое доказательство существования треугольных точек либрации и описан способ нахождения положения коллинеарных точек либрации.

15.2.1 Треугольные точки либрации

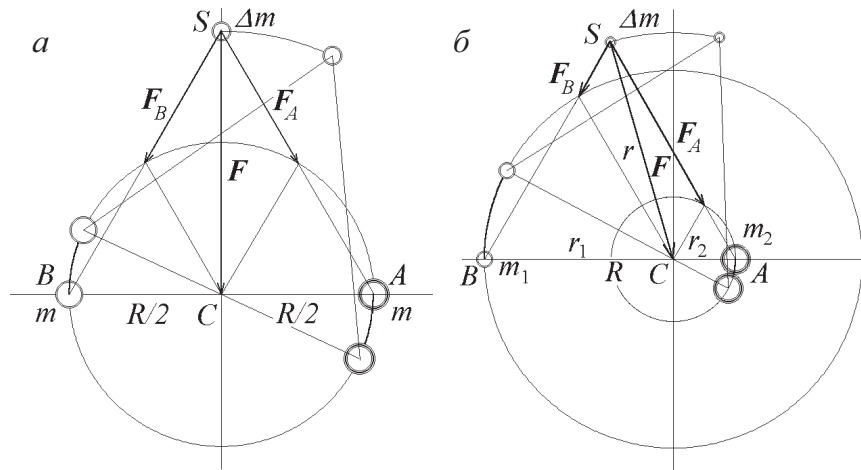


Рис. 15.1: Треугольные точки либрации в системе тяготеющих тел A и B равных масс (a) и различных масс (b).

Рассмотрим сначала треугольные точки либрации в частном случае, когда массы тел A и B равны и в системе центра масс они движутся по общей круговой орбите, находясь в каждый момент в ее диаметрально противоположных точках. Диаметр такой орбиты равен расстоянию R между телами (рис. 15.1, a).

Угловую скорость ω обращения массивных тел легко найти с помощью второго закона Ньютона. Рассматривая круговое движение одного из тел массы m по окружности радиуса $R/2$ под действием силы тяготения, действующей со стороны другого тела, можно написать:

$$m\omega^2 \frac{R}{2} = G \frac{m^2}{R^2}, \quad (15.9)$$

откуда $\omega^2 = 2Gm/R^3$. Если третье тело пренебрежимо малой массы поместить в вершину S равностороннего треугольника BAS , основанием BA которого служит отрезок, соединяющий массивные тела, то результирующая сила притяжения третьего тела двумя массивными телами будет направлена к центру масс C , а ее величина будет как раз такой, чтобы сообщать третьему телу центростремительное ускорение, необходимое для синхронного кругового движения вместе с массивными телами. Действительно, результирующая сила тяготения равна $\sqrt{3}Gm\Delta m/R^2$, а центростремительное ускорение при

обращении вокруг центра масс по окружности радиуса $R\sqrt{3}/2$ с угловой скоростью ω равно $\omega^2 R\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}Gm/R^2$.

Таким образом, если третье тело помещено в точку либрации S и во вращающейся системе отсчета покоится (имеет нулевую скорость), оно будет оставаться в этой точке и дальше. Другими словами, вся система трех тел вращается как целое (как твердое тело) вокруг центра масс C с угловой скоростью $\omega = \sqrt{2mG/R^3}$. Треугольная равносторонняя конфигурация тел сохраняется во время движения. В системе отсчета, связанной с одним из массивных тел, например, с телом A , третье тело обращается вокруг A по той же круговой орбите радиуса R , что и другое массивное тело B , находясь впереди либо позади тела B на угловом расстоянии 60° .

Для системы, в которой массы больших тел A и B различны, доказательство оказывается несколько более сложным. Круговое движение тел вокруг центра масс C (рис. 15.1,б) происходит с угловой скоростью $\omega = \sqrt{(m_1 + m_2)G/R^3}$. Это выражение получается тем же способом, что и для рассмотренного выше случая равных масс: достаточно применить второй закон Ньютона к круговому движению одного из массивных тел.

Чтобы увидеть, что и в этом случае вся система трех тел может вращаться как целое (как твердое тело) вокруг центра масс, нужно показать, что результирующая сила тяготения, приложенная к третьему телу со стороны массивных тел, направлена к центру масс, а ее величина как раз такова, чтобы обеспечить третьему телу необходимое центростремительное ускорение.

Проведем вектор из треугольной точки либрации S (рис. 15.1,б) к центру масс C , и рассмотрим его составляющие, параллельные боковым сторонам треугольника BAS . Из рисунка видно, что эти составляющие равны расстояниям r_1 и r_2 между центром масс и телами B и A соответственно. Покажем, что этот вектор можно рассматривать (в определенном масштабе) как результирующую силу тяготения \mathbf{F} , приложенную к телу S пренебрежимо малой массы Δm , а его составляющие вдоль сторон треугольника — как силы притяжения \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_A тела S телом B массы m_1 и телом A массы m_2 соответственно.

Пусть R — расстояние между массивными телами A и B . Тогда их расстояния от центра масс равны $r_1 = Rm_2/(m_1 + m_2)$ и $r_2 = Rm_1/(m_1 + m_2)$ соответственно. Согласно закону тяготения, $F_B = Gm_1\Delta m/R^2$, и $F_A = Gm_2\Delta m/R^2$, так как расстояния между точкой либрации и каждым из тел A и B также равны R . Мы видим, что отношение сил F_A/F_B равно $m_2/m_1 = r_1/r_2$, и поэтому составляющие вектора SC действительно можно рассматривать как силы тяготения \mathbf{F}_A и \mathbf{F}_B , приложенные к телу S со стороны массивных тел A и B . Поэтому сумма сил \mathbf{F}_A и \mathbf{F}_B действительно направлена к центру масс C .

Теперь остается лишь показать, что величина результирующей силы тяготения $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ как раз такова, чтобы обеспечить третьему телу необходимое центростремительное ускорение $\omega^2 r = (m_1 + m_2)Gr/R^3$ (в инерциальной системе отсчета центра масс), где r — расстояние от центра масс до треугольной точки либрации S . Из рис. 15.1,б мы видим, что $F/F_B = r/r_2$, и, следовательно, $F/F_B = (r/R)(m_1 + m_2)/m_1$. Поскольку $F_B = Gm_1\Delta m/R^2$, находим, что $F = Gr/R^3(m_1 + m_2)\Delta m$. Таким образом, сила имеет как раз необходимую величину.

Таким образом, мы показали, что вся система может вращаться как целое вокруг центра масс. Тела при этом движутся синхронно по окружностям разных радиусов. В системе отсчета, связанной с одним из массивных тел, два других тела движутся по одной и той же круговой орбите на угловом расстоянии 60° одно от другого. В одной из треугольных точек либрации легкое тело опережает массивное тело на угол 60° , в другой — отстает на такой же угол.

Устойчивость движения легкого тела в окрестности треугольных точек либрации в ограниченной круговой задаче трех тел оставалась предметом напряженных исследований в небесной механике на протяжении более двух столетий. В конце концов было установлено, что движение устойчиво, если отношение масс $\kappa = m_1/(m_1 + m_2)$ (где $m_1 < m_2$) удовлетворяет следующему условию:

$$\kappa(1 - \kappa) < 1/27.$$

Таким образом, движение в треугольных точках либрации устойчиво, если масса одного из массивных тел значительно меньше массы другого (если отношение m_1/m_2 не превышает приблизительно 0,04). В системе Земля — Луна $m_1/m_2 = 0.0123$, поэтому треугольные точки либрации устойчивы.

15.2.2 Коллинеарные точки либрации

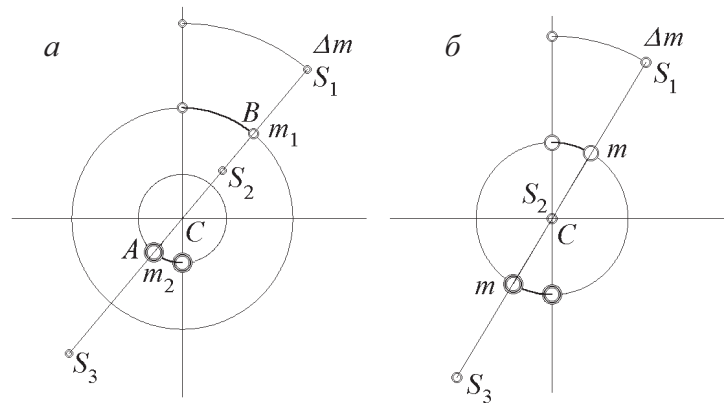


Рис. 15.2: Коллинеарные точки либрации S_1 , S_2 и S_3 в системе тел A и B с различными массами (а) и равными массами (б).

Найдем положения трех коллинеарных точек либрации S_1 , S_2 и S_3 , расположенных на прямой, соединяющей массивные тела A и B (рис. 15.2,а). Когда масса одного из них значительно меньше массы другого, две из трех коллинеарных точек либрации расположены вблизи меньшего тела (B на рис. 15.2,а). В таком случае удобно называть третье тело пренебрежимо малой массы в одной из этих точек спутником меньшего тела, хотя на самом деле оно является спутником обоих массивных тел A и B , и движется синхронно с A и B в их взаимном обращении. Такое обращение происходит с угловой скоростью ω , зависящей от полной массы системы $m_1 + m_2$ и от расстояния R между массивными телами: $\omega = \sqrt{(m_1 + m_2)G/R^3}$.

Для нахождения положения коллинеарных точек либрации, например, расстояния l_1 до внешней точки S_1 от центра масс C , воспользуемся законом тяготения и вторым законом Ньютона. Приложенная к спутнику результирующая сила — это векторная сумма сил притяжения спутника массивными телами B и A . Обе силы направлены в сторону центра масс C , а их сумма должна обеспечивать спутнику центростремительное ускорение $\omega^2 l_1$ для движения по окружности вокруг центра масс с данной угловой скоростью ω .

Поэтому

$$\omega^2 l_1 = G \left[\frac{m_1}{(l_1 - r_1)^2} + \frac{m_2}{(l_1 + r_2)^2} \right]. \quad (15.10)$$

Здесь r_1 и r_2 — расстояния между центром масс C и телами B (массы m_1) и A (массы m_2) соответственно: $r_1 = Rm_2/(m_1 + m_2)$, $r_2 = Rm_1/(m_1 + m_2)$. Первый член в правой части уравнения (15.10) обусловлен притяжением тела B , расстояние до которого от S_1 равно $l_1 - r_1$, второй — тела A , расстояние до которого от S_1 равно $l_1 + r_2$. Подставляя в уравнение (15.10) известное значение квадрата угловой скорости $\omega^2 = (m_1 + m_2)G/R^3$, получаем уравнение для нахождения расстояния l_1 :

$$(m_1 + m_2) \frac{l_1}{R^3} = \frac{m_1}{(l_1 - r_1)^2} + \frac{m_2}{(l_1 + r_2)^2}. \quad (15.11)$$

Это уравнение можно решить численно методом итераций. Для этого перепишем его в виде $x = f(x)$ с $f'(x) < 1$:

$$l_1 = r_1 + \sqrt{\frac{m_1}{(m_1 + m_2)l_1/R^3 - m_2/(l_1 + r_2)^2}}. \quad (15.12)$$

Принимая $l_1 = R$ в качестве нулевого приближения, подставляем это значение в правую часть уравнения (15.12). Тогда левая часть дает первое приближение к l_1 . Подставляя снова это приближенное значение в правую часть, получаем следующее (второе) приближение для l_1 , и так далее, пока очередное приближенное значение не совпадет с предыдущим в пределах заданной точности.

Таким способом мы находим, что расстояние l_1 до внешней точки либрации от центра масс для системы с $m_1 = m_2$ равно $1.1984 R$; для системы с $m_1 = 0.5 m_2$ оно равно $1.2490 R$; для $m_1 = 0.4 m_2$ $l_1 = 1.2597 R$. Для системы Земля — Луна $m_1 = 0.0123 m_2$, так что внешняя точка либрации находится на расстоянии от центра масс, равном произведению 1.1557 на среднее расстояние R от Земли до Луны, т. е. на расстоянии приблизительно $0.17 R$ от Луны.

Аналогично находится положение внутренней коллинеарной точки либрации S_2 . Для расстояния l_2 от этой точки либрации до центра масс C получаем следующие значения: в системе с равными массами двух тел ($m_1 = m_2$) эта точка расположена в центре масс, т. е. $l_2 = 0$, что очевидно из соображений симметрии; для системы с $m_1 = 0.5 m_2$ $l_2 = 0.2374 R$; для $m_1 = 0.4 m_2$ $l_2 = 0.30772 R$. Для системы Земля — Луна $l_2 = 0.8369 R$, т. е. точка находится на расстоянии приблизительно $0.15 R$ от Луны.

Третья коллинеарная точка либрации S_3 находится на противоположной стороне (по отношению к телу B) более массивного тела A . В системе, где массы тел A и B равны (рис. 15.2,б), эта точка находится на таком же расстоянии от центра масс, как и точка S_1 : $l_3 = l_1 = 1.1984 R$. Это очевидно из соображений симметрии. Для системы с $m_1 = 0.5 m_2$ $l_3 = 1.1364 R$; для $m_1 = 0.4 m_2$ $l_3 = 1.1175 R$. Для системы Земля — Луна $l_3 = 1.005 R$, т. е. противоположная внешняя точка находится на расстоянии приблизительно $0.993 R$ от Земли в сторону, противоположную Луне. Спутник в такой точке будет двигаться вокруг Земли вдоль почти такой же, как у Луны, круговой орбиты, если сообщить спутнику необходимую начальную скорость. При движении Луна и спутник будут располагаться в диаметрально противоположных точках своих орбит.

Мы рассмотрели здесь точные частные решения ограниченной задачи трех тел, которым соответствуют круговые движения. Но подобные точные решения, связанные с точками либрации, существуют и для эллиптических (как и для гиперболических) движений

трех тел. Если в системе двух массивных тел, обращающихся вокруг общего центра масс по геометрически подобным эллиптическим орбитам, поместить спутник в одну из точек либрации и сообщить ему необходимую скорость, он также будет двигаться синхронно с массивными телами по эллиптической орбите, геометрически подобной орбитам массивных тел.

Чтобы объяснить возможность таких движений, можно показать, что векторная сумма сил тяготения двух массивных тел, приложенных к помещенному в точку либрации телу пренебрежимо малой массы, направлена в сторону центра масс системы, а ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра масс. Иными словами, если спутник остается в точке либрации, его движение происходит так, как если бы на него действовала единственная сила тяготения, создаваемая некоторым неподвижным эффективным источником в центре масс системы, а не двумя движущимися телами. Синхронное кеплерово движение спутника в точке либрации вместе с массивными телами возможно потому, что его ускорение под действием этого эффективного поля относится к ускорению массивного тела (под действием притяжения вторым массивным телом) так, как его расстояние от центра масс относится к расстоянию этого массивного тела от центра масс системы. Разумеется, для реализации такого движения нужно сообщить спутнику в точке либрации вполне определенную начальную скорость.

15.3 Неограниченная задача трех тел

Задача трех тел часто приводится в научной и учебной литературе в качестве примера чрезвычайной сложности возможных движений, происходящих под действием сил, подчиняющихся простым и точным физическим законам. Однако со времен Эйлера и Лагранжа хорошо известно, что для задачи трех тел, неразрешимой в общем случае, существует несколько точных частных решений, которым соответствуют синхронные движения трех тел по эллиптическим (в частном случае по круговым), гиперболическим или параболическим компланарным орбитам.

Точные частные решения существуют и для неограниченной задачи трех тел, когда массу третьего тела нельзя считать пренебрежимо малой. Существование конечного подмножества неожиданно простых движений на фоне бесконечного набора чрезвычайно сложных общих движений системы трех тел выглядит настоящим чудом. И для таких простых движений должно существовать столь же простое физическое объяснение.

В существующей учебной литературе по общей физике и даже по небесной механике невозможно найти полноценную информацию, касающуюся этих простых точных решений задачи трех тел. В некоторых статьях, опубликованных в научных журналах за последние десятилетия, рассматриваются лишь треугольные точки либрации для круговых движений в ограниченной задаче трех тел. В продвинутых курсах небесной механики простые результаты, касающиеся лагранжевых точек либрации, получаются обычно из чудовищного нагромождения сложных формул и потому не могут доставить эстетического удовлетворения: мы вправе ожидать, что простые и красивые результаты заслуживают столь же простых способов их получения.

Два типа лагранжевых точных решений соответствуют равносторонней конфигурации трех тел. Три других типа соответствуют коллинеарным конфигурациям, в которых при движении сохраняется определенное отношение расстояний между телами. Это отношение расстояний зависит от масс тел m_1 , m_2 и m_3 и может быть найдено решением уравнения пятой степени. Несмотря на то, что в практическом значении этих решений

можно усомниться, само их существование несомненно представляет значительный научный интерес.

15.3.1 Коллинеарная конфигурация

Возможность простых кеплеровых движений в коллинеарной конфигурации почти очевидна в частном случае системы двух планет равных масс, синхронно обращающихся вокруг звезды-хозяина. Пусть планеты находятся на одинаковых расстояниях с противоположных сторон от звезды, как показано на рис. 15.3.1. Если скорости планет равны и противоположны (в системе отсчета центра масс или в системе отсчета звезды, что в данном случае одно и то же), то такая симметричная конфигурация планет будет сохраняться при их движении.

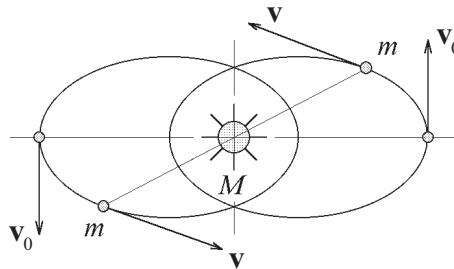


Рис. 15.3: Кеплеровы движения идентичных планет в точном частном решении задачи трех тел.

Покажем, что в такой системе движение планет может быть в точности кеплеровым. Центр масс системы расположен в центре звезды и остается там до тех пор, пока сохраняется симметричная конфигурация системы. Результирующая сила, действующая на каждую планету, обусловлена тяготением звезды и другой планеты. В симметричной конфигурации полная сила всегда направлена к центру звезды, а ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния до звезды:

$$F = G \frac{mM}{r^2} + G \frac{mm}{(2r)^2} = G \frac{m(M + m/4)}{r^2}. \quad (15.13)$$

Здесь M — масса звезды, m — масса каждой из планет, r — расстояние от звезды до каждой из планет. Из уравнения (15.13) следует, что в симметричной конфигурации движение каждой из планет происходит по кеплерову эллипсу, как если бы это движение происходило исключительно под действием центральной силы тяготения некоторого неподвижного источника с эффективной массой $M + m/4$. Планеты в такой системе движутся синхронно по кеплеровым эллипсам с общим фокусом в центре масс системы. В любой момент времени планеты находятся на противоположных концах прямолинейного отрезка, проходящего через центр звезды (см. рис. 15.3.1).

Найдем скорость планет для частного случая круговых орбит. Приравняв силу, даваемую уравнением (15.13), произведению массы на ускорение $v_{\text{кр}}^2/r$, получаем следующее выражение для скорости планеты на круговой орбите радиуса r :

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{G}{r} \left(M + \frac{m}{4} \right)}. \quad (15.14)$$

Период обращения по такой круговой орбите найдем, разделив длину окружности орбиты $2\pi r$ на круговую скорость $v_{\text{кр}}$:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\text{кр}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(M + m/4)}}. \quad (15.15)$$

Это соотношение можно рассматривать как обобщение третьего закона Кеплера на рассматриваемый частный случай движения планет. Уравнение (15.15) в равной мере применимо к эллиптическим орбитам, если заменить в нем r на большую полуось a эллиптической орбиты.

Рассмотренное частное решение задачи трех тел применимо также к планете в системе двойной звезды, компоненты которой имеют равные массы и потому синхронно движутся по равным эллиптическим (или круговым) орбитам. Если в центр масс системы поместить неподвижную планету (произвольной массы), она будет оставаться там в равновесии при движении звезд. В этом случае в уравнениях (15.13)–(15.15) под m нужно понимать массу каждой из звезд, а под M — массу планеты. Равновесие планеты в центре отрезка, соединяющего звезды, неустойчиво: при любом сколь угодно малом нарушении симметрии системы или начальных условий через некоторое время регулярное периодическое движение тел переходит в хаотическое.

15.3.2 Равносторонняя треугольная конфигурация

Приведем простое объяснение точного частного решения неограниченной задачи трех тел, которому соответствует движение в равносторонней конфигурации.

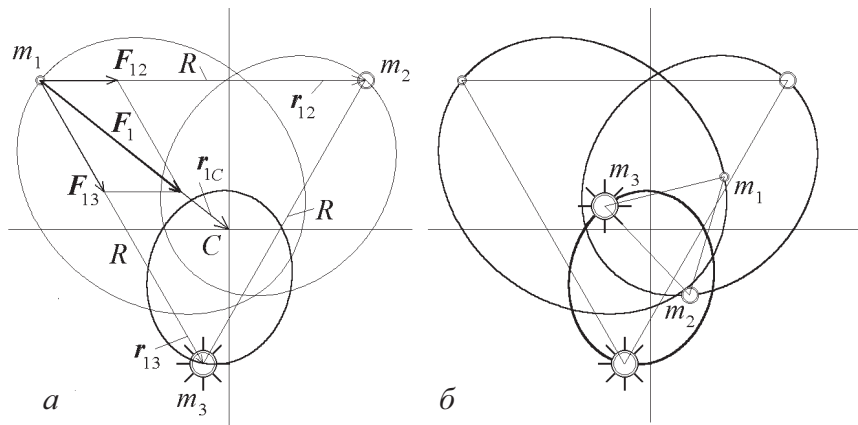


Рис. 15.4: Периодические кеплеровы движения трех тел различных масс в равносторонней конфигурации по геометрически подобным эллиптическим орбитам.

Пусть три тела 1, 2 и 3, массы которых равны m_1 , m_2 и m_3 соответственно, расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами длиной R (рис. 15.4 соответствует системе с $m_1 = 0.3m_3$ и $m_2 = 0.6m_3$). Обозначим через \mathbf{r}_{12} и \mathbf{r}_{13} радиусы-векторы тел 2 и 3 относительно 1, и через \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{13} — силы тяготения, приложенные к телу 1 со стороны тел 2 и 3. В соответствии с законом тяготения

$$\mathbf{F}_{12} = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{R^3}, \quad \mathbf{F}_{13} = Gm_1m_3 \frac{\mathbf{r}_{13}}{R^3}.$$

Сложим векторно силы \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{13} , чтобы найти полную силу тяготения \mathbf{F}_1 , приложенную к телу I :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = \frac{Gm_1}{R^3}(m_2\mathbf{r}_{12} + m_3\mathbf{r}_{13}). \quad (15.16)$$

Сила \mathbf{F}_1 направлена к центру масс C системы тел. Действительно, радиус-вектор \mathbf{r}_{1C} центра масс относительно тела I (т. е. вектор, соединяющий I с C) дается выражением:

$$\mathbf{r}_{1C} = \frac{(m_2\mathbf{r}_{12} + m_3\mathbf{r}_{13})}{M}, \quad (15.17)$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$ — полная масса системы.

С помощью уравнения (15.17) можно выразить полную силу \mathbf{F}_1 , приложенную к телу I со стороны двух других тел 2 и 3 , через M и \mathbf{r}_{1C} :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = \frac{GMm_1}{R^3}\mathbf{r}_{1C}. \quad (15.18)$$

Из уравнения (15.18) следует, что ускорение \mathbf{a}_1 тела I , сообщаемое ему совместным действием сил тяготения тел 2 и 3 , пропорционально \mathbf{r}_{1C} . Из соображений симметрии ясно, что аналогичные выражения справедливы для ускорений двух других тел системы:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{GM}{R^3}\mathbf{r}_{1C}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{GM}{R^3}\mathbf{r}_{2C}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{GM}{R^3}\mathbf{r}_{3C}. \quad (15.19)$$

Здесь \mathbf{r}_{2C} и \mathbf{r}_{3C} — векторы, соединяющие тела 1 и 2 с центром масс C . Поэтому ускорения всех трех тел направлены к центру масс, а величины этих ускорений пропорциональны расстояниям от соответствующих тел до центра масс. Из этого заключения следует, в частности, что система трех тел в равносторонней конфигурации под действием сил взаимного притяжения может вращаться как целое (как твердое тело) вокруг центра масс. С помощью второго закона Ньютона можно рассчитать угловую скорость ω этого вращения. Приравнявая произведение массы одного из тел (например, m_1) на центростремительное ускорение при его вращении вокруг C полной силе \mathbf{F}_1 (см. уравнение (15.18)), действующей на это тело со стороны двух других, получаем:

$$m_1\omega^2\mathbf{r}_{C1} = \frac{GMm_1}{R^3}\mathbf{r}_{1C}, \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{R^3}}. \quad (15.20)$$

Такое равномерное вращение системы в равносторонней конфигурации может происходить только тогда, когда начальные скорости всех тел в системе отсчета центра масс направлены точно перпендикулярно радиусам-векторам тел, проведенным из центра масс, и модули скоростей в точности равны произведениям угловой скорости ω на соответствующие расстояния тел от центра масс. Рассматриваемое движение неустойчиво: если одно из перечисленных условий хотя бы слегка нарушено, через некоторое время равносторонняя конфигурация искажается, и движение тел становится нерегулярным.

Равномерное вращение — это не единственно возможное регулярное периодическое движение системы в равносторонней конфигурации. Можно показать, что полная сила тяготения, приложенная к любому из тел со стороны двух других, будучи направленной к центру масс системы, обратно пропорциональна квадрату расстояния тела от центра

масс, как если бы эта сила создавалась неподвижным источником, а не двумя движущимися телами. Поэтому под действием такой центральной силы каждое из тел может двигаться по (замкнутой либо открытой) кеплеровой орбите.

Для доказательства указанной выше зависимости от расстояния эффективного гравитационного поля выразим расстояние от одного из тел (скажем, тела I) до центра масс C через расстояние R между двумя любыми телами (т. е. через длину стороны равностороннего треугольника) и массы тел. Возводя в квадрат r_{1C} в уравнении (15.17) и принимая во внимание, что модули векторов \mathbf{r}_{12} и \mathbf{r}_{13} равны R , и что угол между ними равен 60° , находим, что $r_{1C}^2 = R^2(m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3)/M^2$, откуда

$$R^2 = \frac{M^2}{m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3} r_{1C}^2.$$

Подставляя R в уравнение (15.18), получаем:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \frac{G(m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3)^{3/2}}{M^2} \frac{\mathbf{r}_{1C}}{r_{1C}^3}. \quad (15.21)$$

Выражение (15.21) показывает, что полная сила тяготения, приложенная к I со стороны двух других тел, направлена к центру масс системы и обратно пропорциональна квадрату расстояния от тела до центра масс. Под действием такой силы тело движется по кеплерову эллипсу с фокусом в центре масс. То же самое справедливо и для двух других тел системы. И поскольку ускорения тел, согласно уравнениям (15.19), пропорциональны их расстояниям от центра масс, все три тела могут двигаться синхронно по геометрически подобным кеплеровым эллипсам с общим фокусом в центре масс системы, сохраняя при движении равностороннюю конфигурацию. Для моделирования такого регулярного периодического движения нужно задать определенным образом начальные скорости тел. В системе отсчета центра масс начальные скорости тел должны быть пропорциональны начальным расстояниям тел от центра масс, а их направления и должны образовывать равные углы с соответствующими радиусами-векторами тел.

15.4 Сфера действия планеты

Для нахождения границы сферы гравитационного действия меньшего тела (например, Земли или другой планеты) относительно большего тела (Солнца), рассмотрим свободное движение спутника A (космического аппарата) под действием сил тяготения Солнца S и планеты P (рис. 15.5). Масса космического аппарата пренебрежимо мала по сравнению с массами планеты и Солнца. Поэтому планета и Солнца движутся, как и в задаче двух тел, в полном соответствии с законами Кеплера по геометрически подобным эллипсам с общим фокусом в центре масс системы. Иначе говоря, здесь рассматривается *ограниченная* задача трех тел. Вблизи планеты движение спутника естественно рассматривать как планетоцентрическое (т. е. использовать систему отсчета, связанную с планетой), считая, что основное ускорение \mathbf{a} обусловлено тяготением планеты.

В соответствии с законом всемирного тяготения (10.4) это ускорение может быть записано в виде

$$\mathbf{a} = -Gm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (15.22)$$

Здесь m — масса планеты, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от планеты к спутнику. Возмущающее ускорение \mathbf{a}' в планетоцентрическом движении — это векторная разность

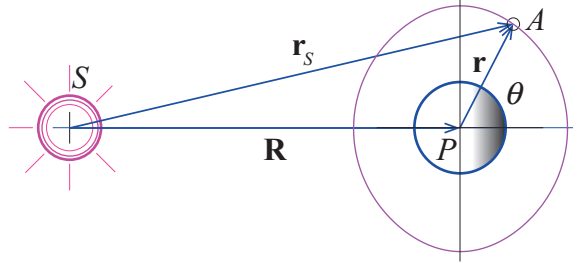


Рис. 15.5: Сфера гравитационного действия планеты относительно Солнца

ускорений, сообщаемых Солнцем спутнику и планете:

$$\mathbf{a}' = -GM \left(\frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right). \quad (15.23)$$

В этой формуле M — масса Солнца, \mathbf{r}_s — радиус-вектор, проведенный от Солнца к космическому аппарату, а \mathbf{R} — от Солнца к планете.

За пределами сферы действия планеты движение космического аппарата естественнее рассматривать как гелиоцентрическое, используя связанную с Солнцем систему отсчета. В этом движении основное ускорение \mathbf{a}_s обусловлено солнечным тяготением:

$$\mathbf{a}_s = -GM \frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3}. \quad (15.24)$$

Возмущающим ускорением \mathbf{a}'_s в данном случае будет разность ускорений, сообщаемых силой тяготения планеты космическому аппарату и Солнцу:

$$\mathbf{a}'_s = -Gm \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \approx -Gm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (15.25)$$

Считая массу планеты m малой по сравнению с массой Солнца M , мы можем предположить, что искомый радиус сферы действия планеты относительно Солнца много меньше расстояния R между ними. Это значит, что интересующие нас значения r в (15.25), соответствующие границе сферы действия планеты, малы по сравнению с R . Поэтому вторым членом в скобках (ускорением, сообщаемым Солнцу тяготением планеты) можно пренебречь по сравнению с первым. Другими словами, когда космический аппарат находится сравнительно недалеко от планеты, его ускорение под действием тяготения планеты значительно больше, чем ускорение Солнца. За меру близости движения космического аппарата к невозмущенному кеплеровому гелиоцентрическому движению можно принять отношение величин возмущающего ускорения (15.25) и основного ускорения (15.24). Вместо отношения модулей составим отношение квадратов этих ускорений \mathbf{a}'_s и \mathbf{a}_s :

$$\left(\frac{a'_s}{a_s} \right)^2 = \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{r_s^4}{r^4} \approx \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{R^4}{r^4}. \quad (15.26)$$

Аналогично, близость движения спутника к кеплерову планетоцентрическому движению можно характеризовать отношением квадратов соответствующих возмущающего \mathbf{a}' и основного \mathbf{a} ускорений, выражаемых формулами (15.23) и (15.22). Перед составлением этого отношения преобразуем формулу (15.23) для случая, когда $m \ll M$. Представим в

(15.23) радиус-вектор \mathbf{r}_s как сумму $\mathbf{R} + \mathbf{r}$ и при возведении \mathbf{r}_s в квадрат учтем, что в интересующей нас области $r \ll R$

$$r_s^2 = (\mathbf{R} + \mathbf{r})^2 = R^2 + 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) + r^2 \approx R^2 \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{r_s^3} \approx \frac{1}{R^3} \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right).$$

Теперь (15.23) можно привести к следующему виду:

$$\mathbf{a}' \approx -\frac{GM}{R^3} \left[(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right) - \mathbf{R} \right] \approx -\frac{GM}{R^3} \left[\mathbf{r} - 3\mathbf{R} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right].$$

Составим отношение квадратов возмущающего и основного ускорений в планетоцентрическом движении

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \left(\frac{M}{m} \right)^2 \frac{r^4}{R^6} \left[r^2 + 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2}{R^2} \right] = \left(\frac{M}{m} \right)^2 \frac{r^6}{R^6} (1 + 3 \cos^2 \theta). \quad (15.27)$$

Здесь мы ввели угол θ между направлениями векторов R и r (см. рис. 15.5) и представили их скалярное произведение $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})$ в виде $Rr \cos \theta$. За границу сферы действия планеты относительно Солнца принимают те точки, где отношения возмущающего ускорения к основному одинаковы для планетоцентрического и гелиоцентрического движений. Приравнивая правые части выражений (15.27) и (15.26), находим

$$\frac{r}{R} = \left(\frac{m}{M} \right)^{2/5} \frac{1}{(1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/10}}. \quad (15.28)$$

Эта формула определяет форму поверхности $r = r(\theta)$, которую можно рассматривать как границу области слабозмущенного планетоцентрического движения. Вид этой поверхности, окружающей планету, показан на рис. 15.5. При $\theta = \pm\pi/2$ (в поперечном направлении) r в формуле (15.28) имеет максимальное значение

$$r_{\max} = R \left(\frac{m}{M} \right)^{2/5}, \quad (15.29)$$

которое обычно и принимают за радиус сферы действия малого тела (планеты) относительно большого (Солнца). В радиальном направлении (при $\theta = 0$) радиус r в (15.28) имеет минимальное значение

$$r_{\min} = R \left(\frac{m}{M} \right)^{2/5} \frac{1}{\sqrt[5]{2}}. \quad (15.30)$$

Отношение максимального радиуса к минимальному составляет всего $\sqrt[5]{2} \approx 1.15$. Поэтому за границу области слабозмущенного планетоцентрического движения вместо поверхности, показанной на рис. 15.5, с хорошей точностью можно принять сферу радиуса r_{\max} , определяемого формулой (15.29).

В методе сопряженных конических сечений движение космического аппарата в пределах сферы действия планеты рассматривают в системе отсчета, связанной с планетой. Это планетоцентрическое движение приближенно можно считать кеплеровым, происходящим по эллипсу, параболе или гиперболе. При пересечении аппаратом границы сферы

действия планеты производят пересчет его положения и скорости в гелиоцентрическую систему отсчета. Полученные значения рассматривают как начальные условия для дальнейшего кеплерова движения аппарата относительно Солнца. В случае сильно различающихся масс планеты и Солнца приближенный метод сопряженных конических сечений дает хорошие результаты. Он с успехом используется для предварительного проектирования орбит межпланетных перелетов.

Глава 16

Океанские приливы в компьютерных моделях

16.1 Введение: происхождение приливов

Возмущения орбит искусственных спутников Земли (в геоцентрической системе отсчета), вызванные их гравитационным притяжением к Солнцу и Луне, обусловлены неоднородным характером этого гравитационного поля на протяжении орбиты спутника Земли. Эти возмущения тем больше, чем протяженнее орбита спутника. На поверхности Земли та же физическая причина вызывает явление океанских приливов.

У берегов морей и океанов вода дважды в сутки поднимается до некоторого максимального уровня и дважды в сутки опускается до минимального уровня. Промежуток времени между следующими друг за другом приливами (или отливами) составляет 12 часов 25 минут. За это время Луна в своем видимом суточном движении совершает половину оборота вокруг Земли. Поэтому уже с давних времен причину приливов и отливов связывали с тяготением Луны. Первое научное объяснение приливов было дано Ньютоном.

Почти все учебники по общей физике и теоретической механике, как и по астрономии, приводят океанские приливы в качестве интересного примера проявления всемирного тяготения. Анализ литературы (в том числе многочисленных публикаций на эту тему в Интернете) показывает, что многие важные аспекты происхождения приливов и их свойств часто трактуются неточно и даже ошибочно.

Множество недоразумений и неточностей в приводимых в учебной литературе объяснениях связано с ролью орбитальных движений Луны и Земли вокруг общего центра масс и осевого суточного вращения Земли в возникновении приливов. Во многих случаях в учебной и даже научной литературе неправильно трактуется вклад центробежных сил инерции в происхождение приливообразующих сил.

Физически корректное толкование приливных явлений, наблюдаемых в морях и океанах, не должно ограничиваться картиной приливообразующих сил и вызываемой ими статической деформации водной оболочки Земли. Правильная теория приливов должна быть динамической, т. е. учитывающей реакцию океана как динамической колебательной системы (способной совершать собственные колебания) на приливные силы, периодически зависящие от времени.

Авторы, пишущие о приливах, обычно объясняют (более или менее убедительно), почему гравитационные силы лунного и солнечного тяготения приводят к появлению двух

приливных «вздутый» покрывающей Землю водной оболочки, расположенных на противоположных сторонах земного шара. Но почти невозможно встретить в литературе правильное объяснение физического механизма, ответственного за фазовый сдвиг между кульминациями Луны и максимальными уровнями прилива. Наблюдения показывают, что в некоторых местах Земли этот сдвиг приближается к 90 градусам, т. е. максимальный уровень воды наблюдается в моменты, когда в этом месте Луна находится на горизонте. Часто встречаются также недоразумения в объяснении роли приливного трения в замедлении осевых вращений и в эволюции орбитальных движений небесных тел, связанных гравитационным взаимодействием.

Чтобы максимально прояснить физические основы приливных явлений, в данной главе мы предлагаем весьма простое, но вполне строгое описание структуры и характера приливообразующих сил. Затем предлагается теоретический расчет производимой этими силами приливной волны, циркулирующей вокруг земного шара. При этом используются упрощенные модели мирового океана в виде сплошной водной оболочки, полностью покрывающей всю Землю слоем постоянной глубины, или заполненного водой канала, опоясывающего земной шар по экватору.

Для пояснения теоретических построений этой главы автором разработана моделирующая компьютерная программа, дающая наглядную динамическую картину приливных сил и вызываемой этими силами стационарной приливной волны в открытом океане. Эта программа в виде интерактивных Java-апплетов (с необходимыми пояснениями) доступна в Интернете по адресу butikov.faculty.ifmo.ru/Projects/TidesR0.html.

Подчеркнем, что данная глава, как и моделирующая программа, нацелены лишь на максимально простое объяснение физических принципов, не претендуя на исчерпывающее описание приливных явлений. Чисто теоретическое количественное описание приливов на Земле на основе первых принципов едва ли возможно из-за сложной структуры береговой линии и рельефа дна мирового океана, т. е. из-за чрезвычайной сложности реальной динамической системы, реакция которой на известные приливные силы и проявляется в природе как приливные колебания уровня моря у берегов и приливные течения.

Данная глава организована следующим образом. Сначала приводится качественная картина физического происхождения приливных сил на Земле, порождаемых тяготением Солнца и Луны. При этом используется неинерциальная система отсчета, связанная с Землей, но не участвующая в суточном вращении Земли вокруг собственной оси (не вращающаяся геоцентрическая система отсчета). Затем обсуждается статическая (равновесная) деформация поверхности океана под действием приливных сил. Далее мы показываем, что полученные выражения для приливной силы в произвольной точке земной поверхности справедливы и при учете осевого вращения Земли, и обсуждаем характер зависимости приливных сил от времени на вращающейся Земле. Показано, что равномерное вращение системы приливных сил, конфигурация которой привязана к видимому с вращающейся Земли положению приливообразующего тела (Луны или Солнца), может быть представлено как суперпозиция двух квадрупольных систем осциллирующих сил. Оси симметрии этих систем осциллирующих сил неподвижны относительно Земли и образуют угол 45 градусов друг с другом. Каждая из двух систем осциллирующих сил порождает вынужденное колебание океана в виде стоячей волны, в которой поверхность воды принимает эллипсоидальную форму. Приливную волну, циркулирующую вокруг Земли, можно трактовать как суперпозицию этих стоячих волн. Затем мы обсуждаем кратко сложности наблюдаемой картины приливов, связанные с отличием реальной системы от принятой упрощенной модели, а также роль приливного трения в эволюции осевых вращений и орбитальных движений небесных тел.

16.2 Приливообразующие силы: элементарный подход

В дальнейшем мы разделяем задачу объяснения приливов на две части: сначала мы обсуждаем происхождение и свойства приливообразующих сил, и лишь затем приступаем к значительно более сложному вопросу воздействия этих зависящих от времени сил на мировой океан, т. е. рассматриваем вынужденные приливными силами колебания океана как динамической системы, которая может совершать собственные колебания. Отметим, что в литературе встречается немало недоразумений даже в связи с первой (сравнительно простой) частью задачи, которая может быть исчерпывающим образом решена в рамках ньютоновской механики и теории тяготения.

Вблизи берегов океанские приливы и отливы проявляются как чередующиеся подъемы и опускания уровня воды, сопровождающиеся горизонтальными перемещениями водных масс, которые называют приливными течениями. Хорошо известно, что приливы вызываются изменяющимися со временем силами тяготения Луны и Солнца, которые действуют на земной шар и покрывающие его воды морей и океанов.

Земля как целое движется с ускорением по отношению к инерциальной (гелиоцентрической) системе отсчета. Это ускорение создается главным образом гравитационным притяжением Земли к Солнцу и в значительно меньшей степени притяжением к Луне (а также и ко всем другим небесным телам). Если бы поля тяготения, создаваемые на Земле всеми небесными телами, были строго однородными, то точно такое же ускорение они сообщали бы и всем находящимся на Земле телам, и никаких приливов мы бы не наблюдали. Поэтому истинная причина приливных явлений связана с неоднородностью полей тяготения Луны и Солнца, т. е. с изменениями этих полей на протяжении земного шара.

Сила притяжения к Луне, действующая на любое находящееся на Земле тело, значительно меньше силы притяжения к Солнцу. Но Луна гораздо ближе к Земле, чем Солнце, и поэтому на Земле неоднородность поля тяготения Луны выражена намного сильнее, чем неоднородность поля тяготения Солнца. В результате оказывается, что лунные приливообразующие силы более чем в два раза превосходят солнечные. Тем не менее мы начнем анализ на примере Солнца, забыв на время о существовании Луны, так как в этом случае несколько проще подойти к пониманию происхождения приливообразующих сил. Некоторые упрощения связаны с тем, что центр масс системы Земля-Солнце почти точно совпадает с центром Солнца.

Земля движется вокруг Солнца по почти круговой орбите. Центробежное ускорение \mathbf{a}_0 Земли в этом движении создается гравитационным притяжением к Солнцу, т. е. по существу \mathbf{a}_0 представляет собой ускорение свободного падения Земли на Солнце. Это ускорение не зависит от орбитального движения Земли: оно было бы точно таким же, если бы Земля вместо движения по орбите просто свободно падала на Солнце. Важно сознавать, что в вопросе происхождения приливов имеет значение только ускорение Земли, а скорость ее орбитального движения не играет никакой роли.

Для объяснения поведения тел на Земле, в том числе поведения воды в океане, удобно рассматривать их движение в связанной с Землей (геоцентрической) неинерциальной системе отсчета. Сначала будем использовать не вращающуюся геоцентрическую систему отсчета. Хотя начало координат такой системы движется по окружности вокруг Солнца (точнее, вокруг центра масс системы Солнце — Земля), сама система не вращается, так как направления ее осей координат неизменны по отношению к удаленным звездам. Иначе говоря, эта система, подобно сковороде в руках повара, совершает поступательное круговое движение, потому что все ее точки описывают одинаковые окружности при сохранении ориентации осей координат.

По отношению к инерциальному пространству все точки такой системы отсчета движутся с одним и тем же ускорением \mathbf{a}_0 . Это значит, что на любое тело массы m (например, спутник Земли или каплю воды в океане) в этой системе действует сила инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$, величина и направление которой не зависят от положения тела на Земле. Если бы тело находилось точно в центре Земли, эта сила инерции в точности уравновешивала бы силу притяжения тела к Солнцу. Другими словами, мы можем рассматривать Землю как гигантский космический корабль, совершающий орбитальный полет вокруг Солнца (т. е. свободно падающий на Солнце). Тогда можно сказать, что любое тело в центре этого корабля находится в состоянии невесомости по отношению к солнечному тяготению, подобно тому, как космонавты на орбитальной станции находятся в невесомости по отношению к земному тяготению.

Теперь время вспомнить о том, что действующая на любое тело сила \mathbf{F}_{gr} притяжения к Солнцу всегда направлена к центру Солнца, а ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Солнца. Если тело не находится в центре Земли, то сила \mathbf{F}_{gr} притяжения к Солнцу, зависящая от положения тела, и всюду одинаковая сила инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$ уже не будут полностью уравновешивать друг друга. Из-за конечных размеров Земли эти две силы в любом месте на Земле не будут в точности равны по величине и противоположны по направлению, за исключением центра Земли. Их совместное действие и называют приливной (или приливообразующей) силой.

Иными словами, в любом месте на Земле или вблизи Земли приливная сила — это векторная разность силы гравитационного притяжения тела к Солнцу в данном месте и силы притяжения к Солнцу, которую это тело испытывало бы, будучи помещенным в центр Земли. Пользуясь таким языком, при выводе выражений для приливных сил можно обойтись без использования неинерциальных систем отсчета и сил инерции: вместо векторного сложения силы притяжения к Солнцу и силы инерции в неинерциальной системе можно говорить о вычитании силы притяжения к Солнцу в данном месте и в центре Земли.

Рассматривая ситуацию на Земле «со стороны», из гелиоцентрической инерциальной системы отсчета, мы можем сослаться на обобщенный закон Галилея, согласно которому в одном и том же поле тяготения (в данном случае в поле тяготения Солнца) все тела падают с одинаковыми ускорениями. Земля в целом и все свободные тела на Земле приобретают под действием Солнца почти одинаковые ускорения. Именно потому здесь на Земле мы не особенно ощущаем вмешательство солнечного тяготения в наши земные дела. Малые различия между ускорением Земли как целого и земных тел возрастают при увеличении расстояний, на которых находятся тела от центра Земли, поскольку эти различия вызваны неоднородностью поля тяготения Солнца на протяжении земного шара.

Эти дифференциальные эффекты гравитации Солнца вызывают, в частности, малые возмущения геоцентрических околоземных орбит спутников: после совершения очередного витка спутник уже не возвращается в исходную точку геоцентрической системы отсчета. На поверхности земли эти же дифференциальные эффекты приводят к возникновению океанских приливов. Подчеркнем, что происхождение приливных сил обусловлено не самим по себе полем тяготения Солнца, а неоднородностью этого поля.

Рис. 16.1 схематически иллюстрирует происхождение и свойства приливообразующих сил, вызванных Солнцем. Ускорение свободного падения Земли E в поле тяготения Солнца S равно $a_0 = GM_{\text{sun}}/R^2$, где M_{sun} — масса Солнца, а R — расстояние между центрами Земли и Солнца. Сила притяжения \mathbf{F}_{gr} к Солнцу некоторого тела (например, спутника Земли), находящегося в точке A , почти равна силе инерции \mathbf{F}_{in} по величине, потому что расстояния от центра Солнца до тела и до центра Земли почти одинаковы.

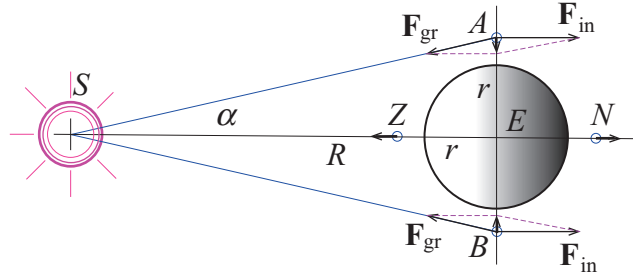


Рис. 16.1: К происхождению приливных сил вблизи Земли в неоднородном поле солнечного тяготения.

Однако в точке A , которая смещена от центра Земли на некоторое расстояние r , направление силы \mathbf{F}_{gr} не в точности противоположно направлению силы инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$. Поэтому результирующая этих сил, т. е. приливно-сила \mathbf{F}_A в точке A , отлична от нуля и направлена к центру Земли. Как видно из рисунка, ее величина равна

$$F_A \approx ma_0\alpha \approx ma_0 \frac{r}{R}, \quad (16.1)$$

где $\alpha \approx r/R$ — угол между направлениями на тело и на центр Земли из центра Солнца. Подставляя сюда $a_0 = GM_{\text{sun}}/R^2$, для приливной силы в точке A получаем:

$$F_A \approx GmM_{\text{sun}} \frac{r}{R^3}. \quad (16.2)$$

Приливно-сила \mathbf{F}_B в противоположной точке B равна \mathbf{F}_A по величине, но направлена противоположно, т. е. тоже вертикально вниз. На поверхности Земли приливно-сила направлена вертикально вниз во всех точках, для которых Солнце в данный момент находится на горизонте.

Если тело находится в точке Z (для которой Солнце оказывается в зените), расстояние от тела до центра Солнца меньше, чем от центра Земли. Здесь сила тяготения Солнца в точности противоположна силе инерции, но имеет несколько большую величину. Поэтому приливно-сила \mathbf{F}_Z в точке Z направлена вертикально вверх, от Земли к Солнцу. Ее величина

$$F_Z = G \frac{mM_{\text{sun}}}{(R-r)^2} - ma_0 = ma_0 \left[\frac{R^2}{(R-r)^2} - 1 \right] \approx ma_0 \frac{2r}{R}, \quad (16.3)$$

как видно из этой формулы, примерно вдвое больше, чем в точках A и B . Аналогично, в противоположной точке N (для которой Солнце находится в надире) сила инерции несколько больше силы тяготения Солнца, так что приливно-сила \mathbf{F}_N в точке N направлена от Солнца, т. е. также направлена вертикально вверх по отношению к поверхности Земли. По величине \mathbf{F}_N приблизительно совпадает с \mathbf{F}_Z .

Подчеркнем, что приливные силы не зависят от орбитального движения Земли: они определяются ускорением Земли в поле солнечного тяготения, и не зависят от ее скорости. Точно такие же приливные силы были бы на Земле и в том случае, если бы Земля не совершала движения по орбите, а просто падала на Солнце (точнее, если бы Земля и Солнце падали друг на друга под действием взаимного тяготения).

Приведенные выше выражения для приливных сил на Земле, которые даются выражениями (16.1) и (16.3), будут применимы также для приливных сил, обусловленных Луной, если заменить в них массу Солнца M_{sun} на массу Луны M_{moon} , а под R понимать расстояние между Луной и Землей. Никаких принципиальных различий в происхождении приливных сил, создаваемых Солнцем и Луной, не существует. В любом случае единственным важным фактором является ускорение Земли под действием ее гравитационного притяжения небесным телом, которое вызывает приливы, а не орбитальные скорости каждого из гравитационно связанных тел (Земли и Солнца, Земли и Луны).

Приливная сила, действующая на какое-либо тело на Земле, пропорциональна его расстоянию r от центра Земли и обратно пропорциональна кубу расстояния R до небесного тела, которое вызывает приливную силу, и пропорциональна массе этого небесного тела. Как уже отмечалось, лунные приливообразующие силы на Земле более чем в два раза больше солнечных (их отношение составляет примерно 2.2), потому что Луна гораздо ближе к Земле.

16.3 Приливные силы в произвольной точке вблизи поверхности Земли

В стандартном выводе выражения для приливных сил обычно вводят приливообразующий потенциал, при использовании которого математика несколько проще. Вместе с тем, чтобы подчеркнуть физику, лежащую в основе происхождения приливообразующих сил, мы рассмотрим векторное сложение соответствующих сил.

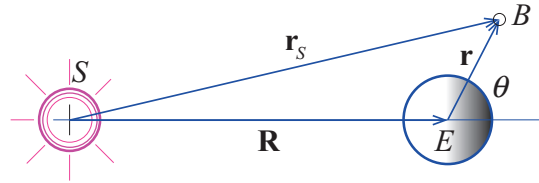


Рис. 16.2: К выводу выражения для приливных сил.

Для того, чтобы получить общее математическое выражение для приливной силы в произвольной точке B над Землей (рис. 16.2), введем радиус-вектор \mathbf{r} этой точки относительно центра Земли E . Тогда ее радиус-вектор \mathbf{r}_s относительно центра Солнца S можно представить как сумму векторов: $\mathbf{r}_s = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, где \mathbf{R} есть радиус-вектор Земли относительно Солнца. Приливная сила \mathbf{F}_{tid} , испытываемая телом массы m в точке B (в неинерциальной геоцентрической системе отсчета) является результирующей его гравитационного притяжения \mathbf{F}_{gr} к Солнцу и псевдо-силы инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0 = -GmM_{\text{sun}}\mathbf{R}/R^3$:

$$\mathbf{F}_{\text{tid}} = \mathbf{F}_{\text{gr}} + \mathbf{F}_{\text{in}} = -GmM_{\text{sun}} \left(\frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right). \quad (16.4)$$

Далее представим \mathbf{r}_s в уравнении (16.4) как сумму $\mathbf{R} + \mathbf{r}$ и вычислим квадрат r_s , принимая во внимание, что $r \ll R$:

$$r_s^2 = (\mathbf{R} + \mathbf{r})^2 = R^2 + 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) + r^2 \approx R^2 \left(1 + 2\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{r_s^3} \approx \frac{1}{R^3} \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right).$$

Подставляя это выражение для $1/r_s^3$ в уравнение (16.4), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{tid}} &\approx -G \frac{mM_{\text{sun}}}{R^3} \left[(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right) - \mathbf{R} \right] \approx \\ &\approx -G \frac{mM_{\text{sun}}}{R^3} \left[\mathbf{r} - 3\mathbf{R} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Отметим, что члены \mathbf{F}_{gr} и \mathbf{F}_{in} , обратно пропорциональные R^2 , которые в (16.5) были бы должны давать главный вклад в \mathbf{F}_{tid} , взаимно компенсируются (уничтожаются). Эта компенсация соответствует вышеупомянутому состоянию невесомости по отношению к тяготению Солнца, в котором мы пребываем на «космическом корабле по имени Земля». Остающаяся в (16.5) сила обратно пропорциональна R^3 , т. е. *третьей степени* расстояния от Солнца (в общем случае от небесного тела, являющегося источником приливной силы).

Для рассмотренных выше точек A и B (см. рис. 16.1) радиус-вектор \mathbf{r} перпендикулярен к вектору \mathbf{R} , и скалярное произведение $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$ в уравнении (16.5) равно нулю. Поэтому в этих точках приливная сила направлена в сторону, противоположную \mathbf{r} (вертикально вниз), а ее величина равна $GmM_{\text{sun}}r/R^3$. В точках Z и N приливная сила, в соответствии с (16.5), направлена вдоль \mathbf{r} (вертикально вверх), а ее величина $2GmM_{\text{sun}}r/R^3$ в два раза больше, чем в точках A и B . Таким образом, для этих четырех точек общая формула (16.5) согласуется с приведенными выше простыми расчетами, выражаемыми формулами (16.1) и (16.3).

16.4 Вертикальные и горизонтальные составляющие приливных сил

Во всех рассмотренных выше четырех точках приливные силы имеют вертикальные направления. Оказывается, что в промежуточных точках приливные силы имеют горизонтальные составляющие (рис. 16.3). Именно горизонтальные составляющие играют наиболее важную роль в образовании приливов. Как видно из рисунков 16.1 и 16.3, система приливных сил стремится растянуть Землю (и покрывающую ее водную оболочку) вдоль линии Солнце — Земля, и сжать Землю в поперечном направлении. Иначе можно сказать, что система приливных сил, обусловленных солнечным тяготением, имеет квадрупольный характер (см. рис. 16.3).

Благодаря осевой симметрии системы приливных сил относительно линии Солнце — Земля, вертикальные и горизонтальные компоненты приливной силы зависят только от угла θ , показанного на рис. 16.2 (и от расстояния r от центра Земли). Угол θ определяет положение рассматриваемого тела массы m на поверхности Земли или вблизи Земли по отношению к линии Солнце — Земля. Система приливных сил, создаваемых Луной, разумеется, тоже имеет квадрупольный характер.

Умножая скалярно правую часть уравнения (16.5) на единичный вектор \mathbf{r}/r , получаем следующую зависимость вертикальной составляющей приливной силы \mathbf{F}_{tid} от угла θ

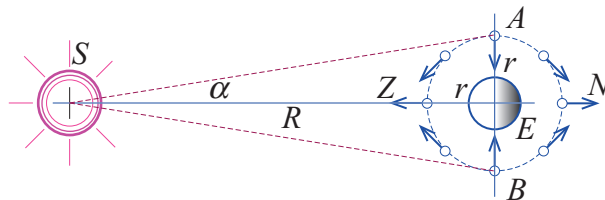


Рис. 16.3: Квадрупольная конфигурация приливных сил в разных точках над поверхностью Земли в неоднородном поле солнечного тяготения.

между R и r :

$$(F_{\text{tid}})_{\text{vert}} = G \frac{mM_{\text{sun}}}{R^3} r(3 \cos^2 \theta - 1) = F_{\text{gr}} \frac{r}{R} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (16.6)$$

Во всех точках, для которых $\cos \theta = \pm 1/\sqrt{3}$, приливная сила направлена горизонтально. Для горизонтальной составляющей приливной силы в произвольной точке B , геоцентрическое положение которой определяется координатами r и θ (см. рис. 16.2), уравнение (16.5) дает:

$$(F_{\text{tid}})_{\text{hor}} = -3G \frac{mM_{\text{sun}}}{R^3} r \cos \theta \sin \theta = -\frac{3}{2} F_{\text{gr}} \frac{r}{R} \sin(2\theta). \quad (16.7)$$

Горизонтальная составляющая $(F_{\text{tid}})_{\text{hor}}$ приливной силы равна нулю в точках A и B , как и во всех других точках плоскости, ортогональной линии Солнце – Земля, для которых угол $\theta = 90^\circ$. Она обращается в нуль также в точках N и Z , для которых угол $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$. Горизонтальная составляющая имеет максимальное значение $(3/2)(r/R)F_{\text{gr}} = (3/2)(r/R)GmM_{\text{sun}}/R^2$ во всех точках вблизи земной поверхности, для которых $\theta = \pm 45^\circ$ и $\theta = \pm 135^\circ$. Эта горизонтальная составляющая солнечной приливной силы вызывает отклонение отвеса от направления земной силы тяготения на угол, равный всего лишь $0.008''$.

Величина действующей на спутник приливной силы пропорциональна расстоянию r спутника от центра Земли и обратно пропорциональна кубу расстояния R до небесного тела, вызывающего приливную силу.

Выражение (16.6) для вертикальной составляющей приливной силы можно преобразовать к следующему виду:

$$(F_{\text{tid}})_{\text{vert}} = G \frac{mM_{\text{sun}}}{R^3} r(3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{3}{2} G \frac{mM_{\text{sun}}}{R^2} \frac{r}{R} (\cos 2\theta + \frac{1}{3}). \quad (16.8)$$

Последний член в правой части выражения (16.8) не зависит от θ , т. е. всюду одинаков (при данном r), и потому он остается постоянным даже при учете суточного вращения Земли. Это значит, что к происхождению приливов он не имеет отношения, и в формуле (16.8) его можно опустить. Такой член можно рассматривать как крошечную (примерно в одну десятимиллионную долю mg) постоянную добавку к вертикальной силе земного тяготения. Таким образом, для вертикальной и горизонтальной составляющих приливной силы можно принять следующие выражения:

$$(F_{\text{tid}})_{\text{vert}} = \frac{3}{2} F_{\text{gr}} \frac{r}{R} \cos(2\theta); \quad (F_{\text{tid}})_{\text{hor}} = -\frac{3}{2} F_{\text{gr}} \frac{r}{R} \sin(2\theta), \quad (16.9)$$

где $F_{\text{gr}} = GmM_{\text{sun}}/R^2$ — полная сила гравитационного притяжения к Солнцу (или к Луне), действующая на находящееся на Земле тело. Такое представление приливообразующих сил особенно удобно, потому что уравнения (16.9) определяют вектор приливной силы, модуль которого $(3/2)(r/R)F_{\text{gr}} = (3/2)GmM_{\text{sun}}/R^2(r/R)$ не зависит от угла θ : приливные силы во всех точках, находящихся на определенном расстоянии r от центра Земли, одинаковы по величине, и отличаются только направлениями.

Приведенные выше выражения справедливы также для приливных сил, создаваемых Луной, если в этих выражениях заменить массу Солнца M_{sun} на массу Луны, и расстояние R до Солнца на расстояние до Луны, или если заменить в них силу солнечного притяжения F_{gr} действующей на тело силой лунного притяжения. Несмотря на то, что масса Луны много меньше массы Солнца, лунные возмущения поверхности океана или орбиты искусственного спутника Земли более чем в два раза сильнее солнечных возмущений, потому что Луна намного ближе к Земле. Моделирование лунных возмущений орбиты искусственного спутника Земли описывается в разделе 7.8, стр. 130.

Подчеркнем еще раз, что не существует никакой принципиальной разницы между приливообразующими силами, создаваемыми Солнцем и Луной. И в том, и в другом случае для возникновения приливов важен лишь один фактор, а именно ускорение Земли под действием тяготения небесного тела, вызывающего приливы. При этом, вопреки распространенному заблуждению, орбитальные скорости взаимного обращения рассматриваемых небесных тел, связанных гравитационными силами, никакой роли не играют. В системе Земля — Солнце это скорость Земли на круговой орбите вокруг Солнца (ускорение Земли в этом движении обусловлено притяжением Солнца), в системе Земля — Луна это скорость центра Земли при ее движении по малой окружности вокруг центра масс всей системы. Этот центр масс лежит внутри самой Земли. В последнем случае для образования приливов также существенно лишь ускорение Земли, создаваемое лунным тяготением, а не скорость кругового движения центра Земли.

Приливная сила, действующая на любое находящееся вблизи Земли тело, прямо пропорциональна расстоянию r , на которое это тело удалено от центра Земли, и обратно пропорциональна третьей степени расстояния R до небесного тела, вызывающего приливы. Разумеется, приливная сила пропорциональна также массе небесного тела — источника приливных сил. Как уже отмечалось, лунные приливообразующие силы на Земле более чем вдвое превосходят солнечные, потому что Луна находится значительно ближе к Земле, нежели Солнце.

Лунная приливообразующая сила $F_{\text{tid}} = (3/2)GmM_{\text{moon}}r_0/R^3$, действующая на тело массы m на поверхности Земли (здесь r_0 — радиус Земли), очень мала по сравнению с весом этого тела, т. е. с силой притяжения к Земле $F_{\text{grav}} = mg = GmM_{\text{earth}}/r_0^2$. Если положить отношение масс $M_{\text{moon}}/M_{\text{earth}} = 1/81$, а для среднего расстояния между центрами Земли и Луны принять $R = 60 r_0$ (в действительности это расстояние изменяется в пределах от $57 r_0$ до $63.7 r_0$ из-за эллиптичности орбиты Луны), получим следующую оценку лунной приливообразующей силы:

$$\frac{F_{\text{tid}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{F_{\text{tid}}}{mg} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{moon}}}{M_{\text{earth}}} \frac{r_0^3}{R^3} = 8.6 \cdot 10^{-8}. \quad (16.10)$$

Несмотря на то, что на поверхности Земли лунная приливообразующая сила составляет примерно лишь одну десятимиллионную (10^{-7}) часть силы земного тяготения, ее влияние на океанские воды может быть значительным благодаря горизонтальной составляющей, которая ортогональна к силе земного тяготения и периодически изменяется из-за суточного вращения Земли. Именно горизонтальные составляющие приливных сил

вызывают перемещения океанских вод вдоль земной поверхности. Подчеркнем еще раз, что именно горизонтальные (направленные по касательной к поверхности Земли) компоненты приливных сил оказывают гораздо большее влияние на океанские приливы и на орбиты спутников Земли по сравнению с вертикальными (радиальными) компонентами приливных сил, которые лишь слегка изменяют силу тяготения Земли.

16.4.1 Статическая деформация поверхности мирового океана

Чтобы получить оценку статической (равновесной) деформации поверхности океана под действием приливных сил, рассмотрим гипотетическую ситуацию планеты, которая не совершает осевого вращения, и потому на ней приливообразующие силы практически не зависят от времени. Из симметрии приливообразующих сил, выражаемых формулами (16.9), следует, что покрывающая сферическую планету водная оболочка испытывает статическое искажение, принимая форму эллипсоида вращения. Эта форма приближенно выражается следующим уравнением:

$$r(\theta) = r_0 + a \cos 2\theta, \quad (16.11)$$

где $2a \ll r_0$ — разность между статическими максимальным и минимальным уровнями воды в точках Z и A (см. рис. 16.3). В соответствии с уравнением (16.11), поверхность воды образует следующий (малый) угол с горизонтом:

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dr(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{2a}{r_0} \sin 2\theta. \quad (16.12)$$

Отсюда следует, что поверхность воды горизонтальна ($\alpha = 0$) при $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ (в точках N и Z), и при $\theta = \pm 90^\circ$ (в точках A и B). Угол α максимален и равен $2a/r_0$ при $\theta = \pm 45^\circ$ и при $\theta = \pm 135^\circ$, где приливная сила имеет горизонтальное направление.

В состоянии равновесия искаженная приливными силами водная поверхность перпендикулярна линии отвеса. Линия отвеса направлена вдоль векторной суммы силы земного тяготения и приливной силы. Малое отклонение линии отвеса от направления земной тяжести (от направления на центр Земли) вызвано горизонтальной составляющей приливной силы. Поэтому угол α равен отношению горизонтальной составляющей $(F_{\text{tid}})_{\text{hor}}$ к силе земного тяготения $F_{\text{grav}} = mg$. Приравнивая $\alpha = 2a/r_0$ при $\theta = 45^\circ$ к $(F_{\text{tid}})_{\text{hor}}/F_{\text{grav}}$ и принимая во внимание, что $(F_{\text{tid}})_{\text{hor}}/F_{\text{grav}} = (3/2)(M_{\text{sun}}/M_{\text{earth}})(r_0^3/R^3)$, получаем для статической разности уровней $2a$ в точках Z и A под действием солнечных приливообразующих сил:

$$2a = \frac{3}{2} r_0 \frac{M_{\text{sun}}}{M_{\text{earth}}} \frac{r_0^3}{R^3}. \quad (16.13)$$

Выражение (16.13) дает $2a = 0.24$ м. Аналогичное выражение, в котором M_{sun} заменено на M_{moon} , справедливо и для статического искажения поверхности океана под действием лунных приливообразующих сил. Для максимальной статической разности уровней оно дает значение $2a = 0.54$ м. В разделе 16.4.2 это значение для статической деформации поверхности океана получено также с помощью потенциала приливообразующих сил.

16.4.2 Потенциальная функция для приливных сил

Подход, часто используемый в литературе для вывода выражения для приливной силы, обычно опирается на потенциальную энергию тела в поле приливообразующих сил.

Этот подход проще, чем приведенный выше. Тем не менее, выше мы выбрали такой подход, поскольку он не затеняет физику, лежащую в основе явления и, следовательно, его можно считать предпочтительным для развития интуиции. Тем не менее, для полноты картины мы введем здесь потенциальную функцию $U_{\text{tides}}(r, \theta)$, и покажем, как она может быть использована при расчете равновесной формы поверхности океана и ее статического искажения под действием приливных сил.

Компоненты приливной силы в экваториальной плоскости Земли даются выражениями (16.9), стр. 258. Можно рассматривать эти компоненты как производные по координатам от соответствующей потенциальной функции $U_{\text{tides}}(r, \theta)$ (взятые со знаком минус):

$$\begin{aligned} (F_{\text{tid}})_{\text{vert}}(t) &= Ar \cos(2\theta) = -\frac{\partial U_{\text{tides}}(r, \theta)}{\partial r}, \\ (F_{\text{tid}})_{\text{hor}}(t) &= -Ar \sin(2\theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_{\text{tides}}(r, \theta)}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Поэтому искомую потенциальную функцию для приливных сил можно записать в следующем виде:

$$U_{\text{tides}}(r, \theta) = -\frac{1}{2}Ar^2 \cos 2\theta = -\frac{3}{4} \frac{GmM_s}{R^3} r^2 \cos 2\theta. \quad (16.15)$$

Восстанавливающие силы, противодействующие приливному искажению формы поверхности водной оболочки Земли, обусловлены Земным тяготением. В отсутствие приливных сил поверхность океана имела бы идеально сферическую форму под действием только земной тяжести. Если бы Земля не совершала суточного вращения по отношению к линии Луна – Земля, форма статического искажения водной оболочки, покрывающей земной шар, была бы поверхностью постоянного значения полного потенциала:

$$U(r, \theta) = U_0(r) + U_{\text{tides}}(r, \theta) = \text{const}, \quad (16.16)$$

где $U_0(r) = mgr$ — сферически симметричная потенциальная функция силы земного тяготения, которой соответствует сила тяжести $-dU_0(r)/dr = -mg$, направленная радиально (вертикально вниз). Таким образом,

$$U(r, \theta) = mgr - \frac{1}{2}Ar^2 \cos 2\theta. \quad (16.17)$$

В частности, в точках Z и A (см. рис. 16.3, стр. 258) значения полной потенциальной функции (16.17) равны $U(r_Z, \pi) = U(r_A, \pi/2)$, откуда следует

$$\begin{aligned} mgr_Z - \frac{1}{2}Ar_Z^2 &= mgr_A + \frac{1}{2}Ar_A^2, \\ mgr_Z - mgr_A &= \frac{1}{2}A(r_Z^2 + r_A^2). \end{aligned} \quad (16.18)$$

Этим условием (16.18) можно воспользоваться для нахождения статического равновесного искажения поверхности океана приливными силами, в отсутствие которых поверхность была бы сферической. Пусть радиусы искаженной поверхности в точках Z и A равны соответственно $r_Z = r_0 + a$ и $r_A = r_0 - a$, где r_0 — радиус неискаженной поверхности. В таком случае величина $2a$ равна статической разности уровней воды океана в точках Z и A , где этот уровень имеет соответственно максимальное и минимальное значения. Из уравнения (16.18) мы находим $2mga = (1/2)A(r_Z^2 + r_A^2) \approx Ar_0^2$, откуда для величины $2a$ получаем:

$$2a = \frac{Ar_0^2}{mg} = \frac{3}{2}r_0 \frac{F_{\text{sun}}}{mg} \frac{r_0}{R}. \quad (16.19)$$

Учитывая, что $F_{\text{sun}}/mg = (M_{\text{sun}}/M_{\text{earth}})(r_0^2/R^2)$, выражение для статического искажения поверхности океана создаваемыми Солнцем приливными силами можно также представить в виде:

$$2a = \frac{3}{2}r_0 \frac{M_{\text{sun}}}{M_{\text{earth}}} \frac{r_0^3}{R^3}. \quad (16.20)$$

Это выражение совпадает с (16.13), стр. 260, которое было получено из условия ортогональности статической равновесной поверхности океана векторной сумме силы земной тяжести и приливной силы.

16.4.3 Приливообразующие силы на вращающейся Земле

В приведенных выше рассуждениях использовалась связанная с Землей, но не вращающаяся вместе с Землей система отсчета. Эта система отсчета совершает вместе с Землей поступательное круговое движение вокруг Солнца (в случае анализа солнечных приливов) или вокруг общего центра масс Земли и Луны (в случае анализа лунных приливов) при сохранении направления осей относительно инерциального пространства. Для наглядности можно сравнить поступательное движение этой системы отсчета с круговыми движениями сковороды в руках повара. Такая система отсчета удобна для анализа движения искусственных спутников Земли. В этой системе спутник движется по замкнутой эллиптической орбите, если пренебречь влиянием приливообразующих сил. Приливные силы вызывают лишь слабые возмущения орбиты спутника.

Однако для описания приливов нужно воспользоваться геоцентрической системой отсчета, участвующей в суточном вращении Земли вокруг своей оси. У такой системы, в отличие от движущейся поступательно, ускорение в разных точках разное. Сложное движение Земли (и жестко связанной с ней системы отсчета) можно представить в виде двух простых составляющих движений. Первое — это рассмотренное выше круговое поступательное движение относительно центра масс системы Солнце — Земля (или Луна — Земля) без осевого вращения. Второе движение — это равномерное суточное вращение Земли относительно собственной оси, проходящей через центр Земли.

В задаче о приливах важны оба движения, но они играют совершенно различные роли. Ускорение \mathbf{a}_0 , связанное с поступательным движением, ответственно за происхождение действующей на все земные тела силы инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$, которая не зависит от положения тела на Земле. Совместное действие этой силы инерции и неоднородной силы притяжения данного тела приливообразующим небесным телом (Солнцем или Луной) описывается рассмотренной выше приливообразующей силой \mathbf{F}_{tid} . Приливообразующие силы в разных точках образуют квадрупольную систему, ось симметрии которой ориентирована вдоль линии, соединяющей Землю и небесное тело, которое сообщает Земле ускорение \mathbf{a}_0 . Отметим еще раз, что существенно только ускорение \mathbf{a}_0 этого поступательного движения Земли, а не орбитальная скорость Земли.

Участвуя в суточном вращении Земли, разные ее точки имеют определенные центростремительные ускорения. Из-за этих ускорений возникают центробежные силы инерции, величина которых растет пропорционально удалению от оси вращения. Вызываемые вращением Земли центробежные силы инерции значительно больше приливных сил. Благодаря центробежным силам равновесная форма Земли (и покрывающего ее океана) немного отличается от идеального шара: это приблизительно эллипсоид вращения, экваториальный диаметр которого немного больше полярного диаметра.

Но к задаче о приливах это постоянное искажение формы Земли (и океана) не имеет никакого отношения, потому что оно совершенно не зависит от видимого положения

небесного тела, вызывающего приливы (Солнца или Луны). Связанное с суточным вращением Земли центробежное ускорение (в противоположность ускорению \mathbf{a}_0 в поступательном движении Земли) ничего не добавляет к приливному силам. Однако суточное вращение Земли приводит к тому, что вся система приливных сил вращается как целое относительно Земли, поскольку ось симметрии системы приливообразующих сил жестко привязана к кажущемуся положению светила — источника приливных сил. Реакция мирового океана как динамической системы на эти зависящие от времени силы и составляет сущность явления приливов.

Для простоты будем рассматривать случай, когда вызывающее приливы небесное тело (Солнце или Луна) находится в экваториальной плоскости Земли. Для земного наблюдателя система приливообразующих сил вращается как целое с угловой скоростью Ω осевого вращения Земли, следуя за изменяющимся на протяжении суток видимым положением источника приливов. Суточное вращение картины приливообразующих сил иллюстрирует рис. 16.4 и компьютерная программа «Океанские приливы», которую можно найти в сети по адресу <http://butikov.faculty.ifmo.ru/TidesR0.html>.

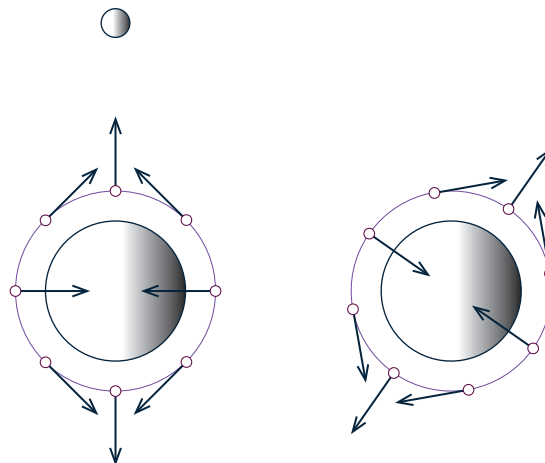


Рис. 16.4: Квадрупольная конфигурация приливных сил в разных точках над поверхностью Земли в неоднородном поле лунного тяготения, поворачивающаяся вслед за видимым положением Луны.

Таким образом, в проблеме приливов полученные выше выражения (16.9) для приливных сил $(F_{\text{tid}})_{\text{hor}}$ и $(F_{\text{tid}})_{\text{vert}}$ применимы также в геоцентрической системе отсчета, участвующей вместе с Землей в ее суточном вращении вокруг оси.

Хотя система приливообразующих сил, показанная на рис. 16.4 и рис. 16.3, стр. 258, равномерно вращается как целое с угловой скоростью Ω осевого вращения Земли, т. е. с периодом $2\pi/\Omega$, истинный период T изменения приливообразующих сил в экваториальной плоскости Земли вдвое меньше ($T = \pi/\Omega$) из-за квадрупольной симметрии системы сил (полусуточный прилив). Для солнечных приливов этот период равен 12 часам, для лунных он составляет 12 ч. 25 мин. Разница в периодах солнечных и лунных приливов связана с орбитальным движением Луны (видимое положение Луны меняется не только из-за суточного вращения Земли, но и из-за движения Луны вокруг Земли по своей орбите).

В произвольной фиксированной точке экваториальной плоскости Земли приливообразующая сила представляет собой вращающийся вектор. Вектор приливной силы равномерно вращается в вертикальной плоскости, совершая два полных оборота за то время, пока приливообразующее небесное тело (Луна или Солнце) совершит один оборот видимого движения вокруг Земли. Иначе говоря, угловая скорость вращения вектора приливной силы вдвое превосходит угловую скорость видимого движения светила (угловую скорость осевого вращения Земли). Наглядное представление о поведении приливных сил в фиксированных точках дает компьютерная программа «Океанские приливы» и (в значительно меньшей степени) рис. 16.5. При изменении видимого положения Луны на угол θ , вектор приливной силы поворачивается на вдвое больший угол 2θ . Векторы приливных сил в диаметрально противоположных точках экватора в каждый момент направлены противоположно, т. е. совершают вращение в противофазе.

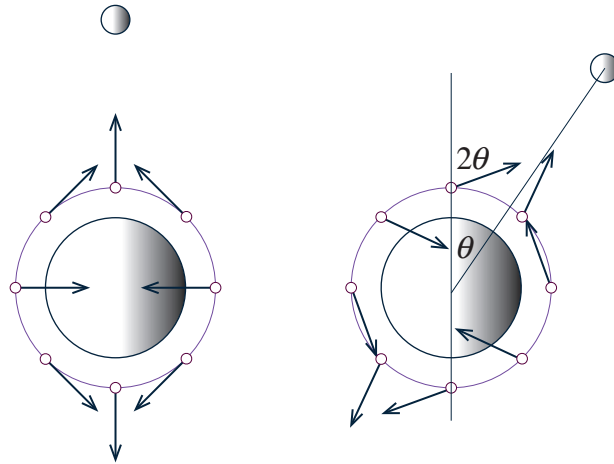


Рис. 16.5: Вращение векторов приливообразующих сил в фиксированных точках экваториальной плоскости Земли при изменении видимого положения Луны.

В каждом месте экваториальной плоскости дважды в сутки приливная сила направлена вертикально вверх: в моменты, когда Луна (или Солнце) оказывается для данной точки в зените и в надире. Также дважды в сутки приливная сила направлена вертикально вниз. Это случается в моменты, когда Луна (или Солнце) оказывается для данной точки Земли на линии горизонта.

Аналитические выражения для зависимости приливных сил от времени в данном месте экваториальной плоскости на вращающейся Земле можно получить, подставляя $\theta(t) = \Omega t$ для $(F_{\text{tid}})_{\text{hor}}$ и $(F_{\text{tid}})_{\text{vert}}$ в уравнения (16.9). Для точки экватора, в которой Солнце проходит через зенит при $t = 0$, получаем:

$$(F_{\text{tid}})_{\text{vert}}(t) = Ar \cos(2\Omega t); \quad (F_{\text{tid}})_{\text{hor}}(t) = -Ar \sin(2\Omega t), \quad (16.21)$$

где $A = (3/2)F_{\text{gr}}/R = (3/2)GmM_{\text{sun}}/R^3$. В любой другой экваториальной точке Земли вектор приливной силы также вращается в вертикальной плоскости с угловой скоростью 2Ω . Таким образом, все эти векторы вращаются синхронно, но с различными фазами.

Формулы (16.21) показывают, что в каждой точке экватора вращающийся вектор приливообразующей силы можно рассматривать как суперпозицию двух сил неизменных направлений (вертикальной и горизонтальной), осциллирующих с частотой 2Ω со сдвигом

по фазе на четверть периода. Так как такое разложение равномерно вращающегося вектора приливной силы на два ортогональных осциллирующих вектора применимо в любой точке экватора, то и вся вращающаяся система приливообразующих сил может быть представлена как две квадрупольные системы осциллирующих сил, оси которых образуют одна с другой угол $\pi/4$. Цитированная выше компьютерная программа «Океанские приливы» дает наглядную динамическую картину такого представления приливообразующих сил.

16.5 Динамическая теория приливов

После того, как установлены основные закономерности приливообразующих сил, следует рассмотреть реакцию мирового океана на действие этих сил. В учебной и научно-популярной литературе о приливах этот вопрос трактуется чрезмерно упрощенно. А именно, вслед за Ньютоном и Бернулли, большинство авторов полагают, что под действием приливообразующих сил поверхность океана принимает равновесную форму эллипсоида вращения, вытянутого вдоль линии Земля Солнце (или Земля Луна для лунных приливов). В соответствии с таким предположением высокий уровень воды в некотором месте на Земле должен наблюдаться всякий раз когда Луна находится в верхней и нижней кульминациях (в зените и надире), а низкий уровень — в промежутках между этими моментами, когда Луна в данном месте Земли находится на горизонте.

Однако наблюдения не согласуются с таким выводом. Скорее справедлива обратная закономерность: кульминациям Луны соответствует низкий уровень. Во всяком случае, между кульминацией Луны и последующей высокой водой проходит промежуток времени в несколько часов.

Объяснить это можно только в рамках динамической теории приливов, впервые предложенной Лапласом и развитой Эйри. В динамической теории рассматривается вынужденное движение покрывающей Землю воды под действием известных зависящих от времени приливообразующих сил.

Динамическая теория приливов рассматривает мировой океан как динамическую систему, в которой возможны собственные колебания с определенным периодом. Чтобы избежать трудностей, связанных с трехмерным характером задачи, представим, следуя Эйри, простейшую модель системы в виде воды в широком канале постоянной глубины h , опоясывающем земной шар по экватору.

16.5.1 Собственные колебания воды в опоясывающем земной шар канале

Представим себе, что равновесие воды в таком канале каким-либо образом нарушено, скажем, уровень воды повысился в двух диаметрально противоположных точках канала и понизился посередине между ними, так что профиль поверхности воды имеет форму эллипса. Такое искажение профиля, описываемое формулой (16.11), возникло бы под действием статических приливообразующих сил. В сильно преувеличенном виде искаженная форма поверхности показана слева на рис. (16.6).

Если «отключить» внешнее воздействие, вызвавшее искажение формы поверхности воды (т. е. «убрать» Луну), то под действием сил земного тяготения профиль будет стремиться восстановить равновесную круговую форму, так что вода из мест с повышенным уровнем устремится (в обе стороны) к местам с пониженным уровнем. В момент, когда

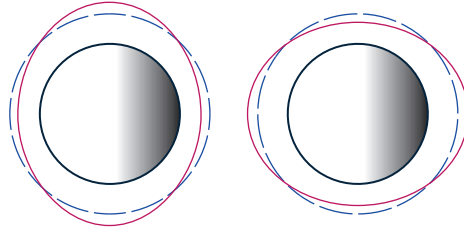


Рис. 16.6: Квадрупольные колебания уровня воды (стоячая волна) в канале, опоясывающем Землю по экватору.

восстановится круговая форма профиля, массы воды будут по инерции продолжать движение, и в результате возникнут «вспучивания» поверхности воды в тех местах, где был низкий уровень, и наоборот. Иначе говоря, вода в канале будет совершать колебания, при которых эллиптический профиль через четверть периода становится круговым, а еще через четверть периода снова принимает форму эллипса, вытянутого в направлении, ортогональном к первоначальному, как показано в правой части рис. 16.6. Затем все повторяется в обратном направлении.

Такую моду собственных колебаний воды в канале можно рассматривать как стоячую волну, длина которой (расстояние от одного максимума до другого) равна половине окружности земного шара. Суперпозиция двух стоячих волн, оси симметрии которых образуют одна с другой угол $\pi/4$ (45°), а фазы колебаний сдвинуты на четверть периода, дает бегущую (циркулирующую вдоль экватора) волну с двумя «горбами» в диаметрально противоположных точках.

Как известно из гидродинамики, в канале глубины h длинные волны, длина которых много больше глубины канала ($\lambda \gg h$), распространяются со скоростью, которую можно рассчитать по следующей формуле (g — ускорение свободного падения):

$$v = \sqrt{gh}. \quad (16.22)$$

Отметим, что скорость достаточно длинных волн на мелкой воде не зависит от длины волны. С помощью этой формулы легко подсчитать время, в течение которого волна в канале obeжит вокруг Земли. Если положить $h = 3.5$ км, что примерно соответствует средней глубине воды в океане, получим 59 часов. Для рассматриваемой волны с двумя одинаковыми «горбами» собственный период T_0 вдвое меньше, т. е. составляет около 30 часов ($T_0 = \pi r_0 / \sqrt{gh} \approx 30$ часов).

16.5.2 Приливы как вынужденные колебания воды в опоясывающем земной шар канале

Вращающаяся система приливообразующих сил вызывает в опоясывающем земной шар канале такую же циркулирующую приливную волну с двумя одинаковыми «горбами» в диаметрально противоположных точках.

Что действительно представляет интерес для объяснения приливов — это установившиеся вынужденные колебания поверхности океана под действием зависящих от времени приливных сил. Каждая из двух осциллирующих систем сил, описанных выше, возбуждает режим вынужденных колебаний воды в экваториальном канале, в частности режим той

же симметрии, как у соответствующей системы движущих сил. Эти режимы имеют такую же эллиптическую форму, как у собственных колебаний, рассмотренных выше, а именно, это эллиптические стоячие волны, оси которых составляют угол 45° друг с другом. Тем не менее, мы можем рассматривать эти режимы как ортогональные в том смысле, что их пространственные формы описываются собственными функциями, образующими ортогональный базис в функциональном пространстве. Оба вынужденные колебания в этой линейной системе, каждое из которых возбуждается одной системой осциллирующих приливных сил, независимы друг от друга, и результирующее вынужденное движение представляет собой суперпозицию этих вынужденных колебаний.

Для объяснения постоянного фазового сдвига между моментами высокой воды и кульминациями Луны (Солнца) существенную роль играет соотношение между собственным периодом T_0 такой циркулирующей волны и периодом T порождающих эту волну приливообразующих сил. Период вынужденной волны, в отличие от рассмотренной выше собственной волны, совпадает с периодом T внешнего воздействия, т. е. составляет 12 часов для солнечных приливов и 12 ч. 25 мин. для лунных приливов. Этот период меньше периода T_0 собственной волны.

Из теории колебаний известно, что в таких условиях установившиеся вынужденные колебания происходят почти в противоположной фазе с изменениями внешней силы, возбуждающей колебания. Связь рассматриваемого вопроса о приливах с элементарной теорией вынужденных колебаний становится особенно ясной, если заменить вращающуюся систему приливных сил двумя осциллирующими, как обсуждалось выше. Каждая из этих вынуждающих сил независимо от другой порождает свое вынужденное колебание в виде соответствующей стоячей волны. Суперпозиция таких стоячих волн одинакового периода и одинаковой амплитуды, сдвинутых по фазе на четверть периода, и представляет собой вынужденную приливную волну, циркулирующую вокруг земного шара.

Если пренебречь трением (диссипацией механической энергии при распространении возбужденной волны), вынужденное движение происходит в точности в фазе с движущей силой при условии, что период возбуждения больше, чем собственный период. В противном случае вынужденное движение происходит в противофазе по отношению к движущей силе. Статическая теория качественно верно описывала бы приливы, если бы собственный период T_0 был меньше $T \approx 12$ часов, но для этого в рассматриваемой модели глубина канала h должна превышать 20 км.

Для упрощенной модели приливов в экваториальном канале постоянной глубины (а также для модели Земли, покрытой повсюду океаном одинаковой глубины), период свободных колебаний больше, чем 12-часовой период возбуждения. Таким образом, динамическая теория предсказывает в этом случае стационарную циркулирующую волну эллиптической формы, большая ось которой (линия приливных вздутий) перпендикулярна линии Земля — Солнце (Земля — Луна).

Характер искажения поверхности воды в циркулирующей приливной волне иллюстрирует рис. 16.7 (слева при $T_0 < T$, и справа при $T_0 > T$). Величина искажения на рисунке сильно преувеличена.

Таким образом, в рамках рассматриваемой упрощенной модели океана динамическая теория приливов предсказывает для соответствующего действительности случая $T_0 > T$ (собственный период больше полусуток) наступление отлива, когда Луна находится в верхней и нижней кульминациях, и наступление прилива, когда Луна находится в квадратуре (наблюдается из данного места на горизонте).

С другой стороны, собственный период упругой волны в твердой земной коре короче, чем 12-часовой период приливных сил. Следовательно, в пренебрежении вязкостью при-

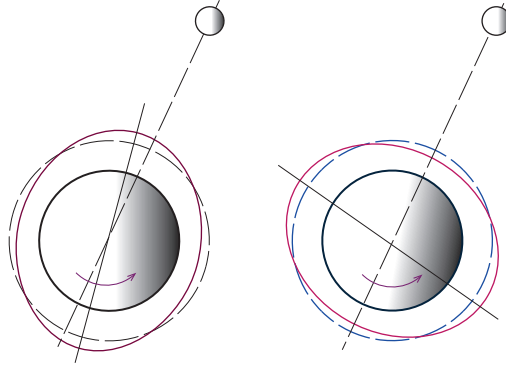


Рис. 16.7: Приливообразующее небесное тело (Луна) и приливная волна при $T_0 < T$ (слева), и при $T_0 > T$ (справа).

ливные вздутия в земной коре должны быть ориентированы вдоль линии Земля – Солнце (Земля – Луна). Наблюдения показывают, что твердое тело Земли на самом деле испытывает два раза в сутки приливы с максимальной амплитудой около 30 см, выпуклости которых отстают примерно на 3° от линии Земля – Луна.

16.5.3 Математическое описание вынужденных колебаний океана

Каждое из двух частичных вынужденных колебаний океана под действием осциллирующих ортогональных составляющих приливных сил можно описать установившимся решением соответствующего дифференциального уравнением линейного осциллятора. Пусть $q_1(t)$ есть нормальная координата, описывающая первую моду вынужденных колебаний, эллиптическая форма которого характеризуется большой осью, ориентированной вдоль линии Земля – Солнце (и ориентированной в перпендикулярном направлении через половину периода), и пусть $q_2(t)$ – нормальная координата, описывающая второе колебание с осью, наклоненной на 45° относительно линии Земля – Солнце. Нарушение равновесной поверхности воды, т. е. небольшое вертикальное смещение поверхности воды в произвольной точке (r_0, θ) экватора, вызванное первой модой колебаний, можно описать выражением $\Delta r_1(\theta, t) = q_1(t) \cos(2\theta)$. Аналогично, второе колебание вызывает искажение поверхности, описываемое выражением $\Delta r_2(\theta, t) = q_2(t) \cos(2\theta)$. Вынужденные колебания, совершаемые нормальными координатами $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – это периодические (стационарные) частные решения соответствующих каждой моде дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\gamma\dot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 &= \omega_0^2 a \cos \omega t, \\ \ddot{q}_2 + 2\gamma\dot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 &= \omega_0^2 a \sin \omega t. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Здесь ω_0 – собственная частота соответствующей моды ($\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\sqrt{gh}/r_0$), γ – постоянная затухания, $\omega = 2\Omega$ – вынуждающая частота и a – величина равновесного искажения поверхности воды под действием статических приливных сил (такое искажение было бы на планете, осевое вращение которой синхронизировано с обращением по орбите). Теоретическое значение статического искажения дается полученными выше выражениями (16.19) или (16.20). Характеризующие вынуждающую силу величины a и $\omega = 2\Omega$

(удвоенная частота суточного вращения) известны с высокой достоверностью, чего нельзя сказать о значениях величин ω_0 (собственная частота) и γ (постоянная затухания).

В гипотетическом предельном случае очень медленного осевого вращения Земли решение уравнений (16.23), описывающее установившийся режим, имеет вид

$$q_1(t) = a \cos \omega t = a \cos 2\Omega t, \quad q_2(t) = a \sin \omega t = a \sin 2\Omega t \quad (16.24)$$

Это решение описывает квазистатическое искажение формы океана, имеющее эллиптическую форму. Оси эллипса адиабатически следуют за медленно поворачивающейся линией Земля – Солнце (или Земля – Луна). Большая ось этого эллипса в каждый момент времени ориентирована вдоль этой линии. Смещение уровня воды от среднего положения дается в этом предельном случае следующим выражением:

$$\Delta r(\theta, t) = \Delta r_1(\theta, t) + \Delta r_2(\theta, t) = q_1(t) \cos 2\theta + q_2(t) \sin 2\theta = a(\cos 2\Omega t \cos 2\theta + \sin 2\Omega t \sin 2\theta) = a \cos 2(\Omega t - \theta). \quad (16.25)$$

Чтобы найти искажение поверхности воды при произвольном значении ω , можно воспользоваться хорошо известным решением уравнений (16.23) для нормальных координат $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

$$q_1(t) = q_0 \cos(\omega t - \delta), \quad q_2(t) = q_0 \sin(\omega t - \delta), \quad (16.26)$$

где амплитуда q_0 и запаздывание по фазе δ (одинаковые для $q_1(t)$ и $q_2(t)$) даются выражениями:

$$q_0 = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (16.27)$$

Поэтому результирующее искажение формы поверхности океана под действием приливных сил принимает вид:

$$\Delta r(\theta, t) = \Delta r_1(\theta, t) + \Delta r_2(\theta, t) = q_1(t) \cos 2\theta + q_2(t) \sin 2\theta = q_0[\cos(2\Omega t - \delta) \cos 2\theta + \sin(2\Omega t - \delta) \sin 2\theta] = q_0 \cos 2(\Omega t - \delta/2 - \theta). \quad (16.28)$$

Как видно из уравнения (16.28), в любой момент времени T максимум (высокая вода) приливной волны, циркулирующей вокруг Земли, находится в том месте Земли, положение которого определяется углом $\theta_{\max} = \Omega t - \delta/2$. То есть положение этого максимума отстает от Солнца (Луны) на угол $\delta/2$. Если $\gamma \ll \omega$, то из уравнения (16.27) следует, что этот угол запаздывания почти равен нулю для случая $\omega < \omega_0$. Другими словами, морская приливная волна будет почти равновесной, и моменты высокой воды будут совпадать с кульминациями Солнца (Луны), если естественный период циркулирующей волны меньше, чем 12-часовой период возбуждения (то есть, если $T_0 < T$).

Но для нашей модели океана оценка естественного периода составляет приблизительно 30 часов. Поэтому ситуация соответствует $\omega > \omega_0$ ($T < T_0$), когда установившиеся вынужденные колебания происходят почти в противоположной фазе относительно движущей силы. В этом случае волна должна быть обращенной по отношению к равновесной. Угол запаздывания $\delta/2$ приближается к $\pi/2$ в соответствии с (16.27), что означает, что для данной точки экватора высокая вода наступает в моменты, когда Солнце (Луна) находится почти на горизонте (а не в зените или надире).

Из уравнения (16.28) следует, что в любом заданном месте на экваторе уровень воды изменяется относительно среднего значения в зависимости от времени t по закону

$z(t) = q_0 \cos(2\Omega t - \delta)$, где $t = 0$ соответствует моменту кульминации Солнца (Луны) в месте, о котором идет речь. Можно ожидать, что для модели канала постоянной глубины значение q_0 , определяемое формулой (16.27), является более или менее надежным, поскольку гидродинамика позволяет оценить собственную частоту $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\sqrt{gh}/r_0$ с помощью известного выражения для скорости $v = \sqrt{gh}$ очень длинных гравитационных волн. Тем не менее, существует значительная неопределенность, связанная с коэффициентом затухания γ . Если мы предположим, что затухание мало ($\gamma \ll \omega_0$), можно сделать вывод, что ориентация приливных вздутий лишь незначительно отклоняется от линии, перпендикулярной к линии Солнце – Земля (Луна – Земля), но конкретное значение этого отклонения остается неопределенным.

В приведенном выше обсуждении мы рассмотрели только установившееся колебание поверхности океана (стационарная волна), предполагая, что переходный процесс уже завершен. Чтобы стационарное движение установилось, необходимо некоторое трение (пусть даже очень малое). В рассматриваемой задаче мы имеем дело с движением воды, вызванным исключительно приливными силами, продолжающимися вечно, и поэтому у нас были века и даже тысячелетия, чтобы дождаться затухания переходного процесса. Поэтому использование стационарного решения правомерно для описания приливов и отливов. Мы также подчеркиваем, что в динамической теории приливов движущие приливообразующие силы известны достоверно, так что большинство неопределенностей возникает в основном из-за плохого соответствия между принятой нами простой моделью динамической системы и реальными океанами Земли.

16.5.4 Лунные и солнечные приливы

Лунные и солнечные приливы накладываются друг на друга. Когда Солнце и Луна находятся на одной прямой с Землей (т. е. в полнолуние и новолуние), приливы получаются особенно сильными. Их называют большими или сизигийными. Когда Луна находится в первой и в последней четверти, лунные приливы ослабляются из-за наложения солнечных. В таких случаях говорят о малых, или квадратурных, приливах. Амплитуды больших приливов могут быть в 2.7 раза больше амплитуды малых.

Как уже отмечалось, максимальная статическая разность уровней под действием лунных приливообразующих сил составляет 0.55 м, под действием солнечных примерно 0.24 м. В соответствии с динамической теорией, амплитуды приливов (в модели экваториального канала) должны быть несколько больше. Для данного значения отношения вынуждающего и собственного периодов T/T_0 (далекого от 1, т. е. от резонансной ситуации) динамическая амплитуда отличается от статической деформации множителем

$$\frac{1}{1 - (T/T_0)^2}. \quad (16.29)$$

Для приведенных выше значений $T \approx 12$ ч. и $T_0 \approx 30$ ч. этот множитель равен примерно 1.2. Поэтому для амплитуды сизигийных приливов динамическая теория дает значение порядка 1 м, что довольно близко соответствует значениям, наблюдаемым на островах в открытом океане.

16.5.5 За рамками модели – сложности реальной картины

Картина приливных сил привязана к видимому с Земли положению приливообразующего небесного тела. В приведенном выше анализе предполагалось, что это тело находится над земным экватором. Но орбиты Луны и Солнца не лежат в плоскости экватора,

поэтому их положения относительно Земли периодически изменяются, что создает так называемые неравенства величин приливов.

Когда Луна или Солнце не находятся в экваториальной плоскости, возникает суточное неравенство, выражающееся в том, что амплитуды последовательных полусуточных приливов не равны. Это неравенство выражено тем сильнее, чем больше склонение светила и чем больше географическая широта места наблюдения.

Полумесячное неравенство выражается в различии амплитуд во время сизигий и квадратур. Параллактическое неравенство возникает вследствие периодических изменений расстояния от Земли до Луны из-за эллиптичности лунной орбиты: приливообразующая сила в перигее примерно на 40% больше, чем в апогее.

Неравенства с более длинными периодами происходят из-за изменений угла наклона лунной орбиты к плоскости земного экватора с периодом 18.6 года, и из-за изменений эксцентриситета лунной орбиты с периодом 8.85 года. Имеются и другие неравенства с меньшими амплитудами.

На характере приливов сильно сказывается сложный рельеф дна океанов и морей, препятствия в виде материков и островов со сложными очертаниями береговых линий, морские течения, ветры и множество других трудно учитываемых факторов. Амплитуда прилива в океане вдали от побережья не превышает 1 м, но у берегов в зависимости от их очертаний и глубины моря приливы могут достигать значительной высоты. Особенно высокие приливы могут наблюдаться в узких проливах либо в глубине длинных заливов. Например, в заливе Фанди на атлантическом побережье Канады амплитуда сизигийных приливов нарастает от 4 м при входе до 12 – 18 м в глубине залива.

На некоторых реках приливная волна значительной высоты может проникать из океана вверх по течению на большие расстояния. Такое явление называется бором. Например, на Амазонке приливная волна – поророка – высотой до 3 м распространяется на 300 км вверх по течению.

16.5.6 Эволюция движений небесных тел под действием сил приливного трения

Распространение приливной волны сопровождается рассеянием механической энергии. Этот эффект очень важен для понимания истории Земли и Луны. То, что Луна обращена к нам все время одной стороной, связано с имевшими место в далеком прошлом эффектами приливного трения на Луне.

Приливное трение на Земле приводит к постепенному замедлению ее осевого вращения. Уменьшение момента импульса, связанного с вращением Земли вокруг оси, компенсируется возрастанием момента импульса орбитального движения Луны. Это означает, что орбита Луны постепенно расширяется. Измерения показывают, что в современную эпоху продолжительность суток возрастает на 0.0016 секунды в столетие, и среднее расстояние до Луны увеличивается примерно на 4 см в год. Конечным этапом такого замедления вращения Земли и эволюции орбиты Луны станет выравнивание периодов обращения Луны вокруг Земли и суточного вращения Земли. Другими словами, в конце концов из-за приливного трения произойдет полная синхронизация осевого вращения Земли с орбитальным движением Луны, и земные сутки сравняются с месяцем. Луна и Земля в своем орбитальном кружении вокруг центра масс системы будут все время обращены друг к другу одной стороной. На основе закона сохранения момента импульса можно подсчитать, что в конечном состоянии продолжительность как суток, так и месяца будет равна приблизительно 50 современным суткам.

Далее в этом разделе приводится подробное физическое объяснение эволюции движений небесных тел под действием приливного трения.

Помимо возмущающего воздействия на орбиты искусственных спутников, гравитационное поле одного небесного тела, находящегося на орбите вокруг другого, приливно искажает форму другого тела. Твердое тело Земли также испытывает два раза в сутки приливы с максимальной амплитудой около 30 сантиметров.

Когда вынужденное движение происходит в той же или в противоположной фазе относительно движущей силы, никакого обмена энергией между внешним источником и колебательной системой в среднем не происходит. Тем не менее, из астрономических наблюдений хорошо известно, что Луна медленно отдаляется от Земли с сопутствующим увеличением орбитального периода (месяца). В то время как орбитальный момент импульса Луны увеличивается, спиновый момент импульса Земли уменьшается: суточное вращение Земли замедляется, так что день становится длиннее. Для объяснения векового замедления осевого вращения Земли под действием приливных сил необходимо учитывать влияние трения.

Можно задаться вопросом, почему диссипация механической энергии в приливах происходит в масштабах, которые могут показаться очень скромными. Дело в том, что под влиянием приливных сил циркулирует по всему земному шару только волна в океане, а не сама вода. Запаздывание по фазе δ установившихся вынужденных колебаний от вынуждающей периодической силы определяется формулой (16.27). Для интересующего нас режима колебаний фазо-частотная характеристика — это почти ступенчатая функция ($\delta = 0$ при $\omega < \omega_0$, то есть при $T > T_0$, и $\delta = -\pi$ в противном случае). Только вблизи резонанса ($\omega \approx \omega_0$) эта ступенька фазо-частотной характеристики слегка сглажена. Поэтому смещение приливных вздутий воды от линии, перпендикулярной линии Луна — Земля, очень мало.

Тем не менее, это смещение, нарушающее симметрию системы, в принципе абсолютно необходимо для того, чтобы движущие приливные силы быть способны поддерживать циркулирующую приливную волну (то есть, не давать ей затухать). При симметричном расположении приливных вздутий момент действующих на них сил лунного тяготения равен нулю. Если принять Землю в качестве системы отсчета, можно видеть, что при смещении вздутий из симметричного положения относительно линии Луна — Земля приливные силы создают тормозящий момент относительно оси Земли и, следовательно, совершают ненулевую работу над системой. Эта работа компенсирует потери на трение, испытываемое бегущей по поверхности океана приливной волной и отвечает за постепенное уменьшение механической энергии системы. Энергия, необходимая для совершения этой работы, обеспечивается за счет замедления осевого вращения (спина) Земли. Поэтому спин монотонно замедляется, и момент импульса осевого вращения уменьшается.

Глядя на всю систему тел из инерциальной системы отсчета, мы должны помнить, что Луна взаимодействует с Землей только посредством центральных гравитационных сил (рис. 16.8). Если вздутия были бы ориентированы точно вдоль или перпендикулярно линии Луна — Земля, эта сила гравитации не создавала бы действующего на Землю крутящего момента. Рассматривая гравитационные силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 (рис. 16.8), действующие на вздутия, мы приходим к выводу, что тормозящий момент относительно оси Земли, который замедляет осевое вращение Земли, обусловлен упомянутым выше смещением вздутий, которое нарушает симметрию системы относительно линии Луна — Земля.

Тем не менее, полный крутящий момент центрального гравитационного поля Луны, приложенный к Земле и вздутиям ее водной оболочки, измеренный относительно Луны, равен нулю. Таким образом, полный угловой момент системы сохраняется, как это долж-

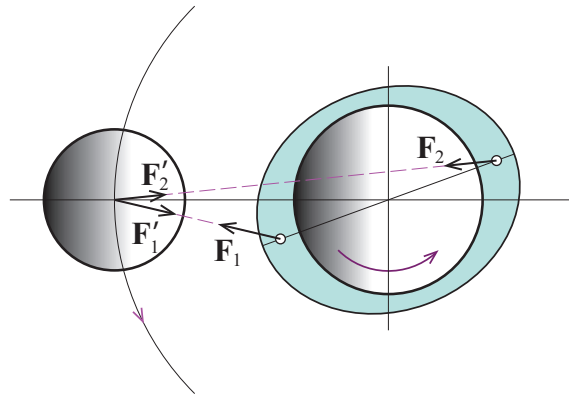


Рис. 16.8: К возникновению момента сил (действующих на приливные вздутия), который приводит к замедлению осевого вращения.

но быть в любой замкнутой физической системе. Замедление вращения Земли вследствие приливного трения означает, что орбитальный момент системы медленно увеличивается во время приливной эволюции, и орбита Луны постепенно расширяется. Нарушение симметрии из-за приливного трения не влияет на сохранение полного углового момента, но лишь вызывает медленное вековое перераспределение углового момента между спином и орбитальным движением. По мере расширения орбиты механическая энергия орбитального движения также возрастает. Эта дополнительная механическая энергия (а также рассеиваемая из-за трения механическая энергия) черпается из энергии осевого вращения Земли.

Этот вывод о расширении орбиты Луны, полученный из сохранения углового момента всей системы, часто встречается в литературе. Хотя такое рассуждение вполне убедительно, тем не менее оно оставляет необъясненным физический механизм явления. Чтобы понять физическую причину этого явления, нужно принять во внимание действующие силы. Рассматривая свойства гравитационных сил \mathbf{F}'_1 и \mathbf{F}'_2 (см. рис. 16.8), которые действуют на Луну со стороны приливных вздутий Земли, и влияние этих сил на орбитальное движение Луны, нужно обратить внимание на тонкую особенность, которая заслуживает подробного обсуждения.

В то время как орбита расширяется, орбитальная скорость Луны уменьшается. Тем не менее, из асимметрии конфигурации, которая отвечает за эволюцию, можно сделать вывод, что результирующая гравитационная сила, действующая на Луну со стороны приливных вздутий Земли (сумма \mathbf{F}'_1 и \mathbf{F}'_2) имеет компоненту, направленную вперед, в направлении орбитального движения Луны. Как может эта ускоряющая сила замедлить орбитальное движение? Все авторы, которые пишут о приливной эволюции, оставляют этот вопрос без ответа.

Рассматриваемая ситуация похожа на широко известный парадокс спутника Земли на круговой орбите, который постепенно снижается в разреженной верхней атмосфере. Интуитивно мы ожидаем, что слабое атмосферное торможение должно замедлить спутник, но вместо этого спутник набирает скорость по мере того, как его орбита постепенно понижается. Из-за сопротивления воздуха спутник ускоряется в направлении своего движения, как будто тормозящая сила сопротивления воздуха толкает спутник вперед. Физическое объяснение этого так называемого аэродинамического парадокса спутника

можно найти в разделе 3.4, стр. 57.

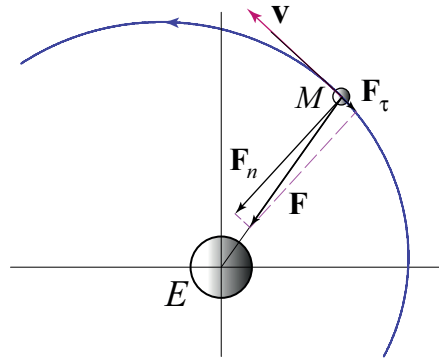


Рис. 16.9: Действующая на Луну (M) сила \mathbf{F} тяготения Земли, направленная к центру Земли (E), и ее нормальная \mathbf{F}_n и тангенциальная \mathbf{F}_τ составляющие.

Чтобы понять, почему происходит замедление Луны во время приливной эволюции, мы должны принять во внимание, что Луна постепенно удаляется от Земли и ее орбита расширяется, так что реальное движение Луны относительно Земли происходит не по окружности, а по расширяющейся спирали. Часть этой траектории (с сильно преувеличенным расширением) схематически показана на рис. 16.9. Из-за этого расширения перпендикуляр к траектории направлен не к центру Земли, а проходит немного впереди центра. Поэтому сила \mathbf{F} гравитационного притяжения, действующая на Луну со стороны Земли, имеет тормозную тангенциальную составляющую \mathbf{F}_τ , направленную назад вдоль траектории. Эта компонента больше по величине, чем направленная вперед суммарная тангенциальная составляющая сил \mathbf{F}'_1 и \mathbf{F}'_2 (см. рис. 16.8), которые действуют на Луну со стороны приливных вздутий (эта составляющая не показана на рис. 16.9). Следовательно, общее тангенциальное ускорение Луны направлено против скорости.

В общем случае, для того, чтобы объяснить приливную эволюцию, то есть замедление осевого вращения (спина) и вековое изменение орбит гравитационно связанных небесных тел, необходимо учитывать как динамическое искажение сферической формы тела (и его жидкой оболочки, если таковая имеется), под действием приливных сил, так и дополнительное смещение вздутий, вызванное приливным трением. Неоднородное гравитационное поле одного тела, обращающегося по орбите вокруг другого, искажает форму второго. Рассеяние энергии, запасенной в приливных искажениях, приводит к связи, вызывающей вековые (происходящие всегда в одном направлении) изменения орбит и осевых вращений (спинов) обоих тел. Замедление осевого вращения и эволюция орбит будет продолжаться до тех пор, пока осевое вращение не станет синхронным со средним орбитальным обращением.

Приливное трение ответственно за современное состояние осевого вращения некоторых планет и их спутников, а также за состояние вращения и орбитального движения тесных двойных звезд. Все крупные спутники (за исключением Гиперона — спутника Сатурна) и близкие малые спутники планет Солнечной системы вращаются вокруг своих осей синхронно с их орбитальным движением.

Самая далекая планета Плутон и ее спутник Харон дают пример пары небесных тел в Солнечной системе, которые уже достигли конечного состояния синхронизации своего

осевого вращения и взаимного обращения, когда дальнейшей эволюции под действием приливных сил не происходит.

Важная роль приливных сил в космогонии впервые была отмечена английским астрономом Джорджем Дарвиным (сыном знаменитого естествоиспытателя Чарльза Дарвина).

Изменение орбитального движения во время приливной эволюции также интересно в том смысле, что оно опровергает распространенное убеждение, будто внутренние силы не могут влиять на движение центра масс системы. Это утверждение верно только для системы, движущейся в однородном внешнем поле. Вышеупомянутое расширение орбиты Луны во время приливной эволюции на самом деле вызвано (хотя и косвенно) внутренними силами, а именно гравитационными силами между океанской водой и твердым телом Земли, и силами трения. Внутренние силы изменяют конфигурацию системы (состоящей из Земли и вод океана), которая движется в неоднородном внешнем гравитационном поле. Поэтому в результате эти внутренние силы изменяют (косвенно) внешнюю гравитационную силу, действующую на систему. Эти вариации внешней гравитационной силы изменяют орбитальное движение системы. Во время приливной эволюции внутренние силы взаимного тяготения вместе с трением вызывают перераспределение масс (Земли и приливных вздутий), которые движутся во внешнем неоднородном центральном поле.

16.5.7 Предел Роша

Другим интересным примером проявления приливных сил может служить так называемый предел Роша, т. е. минимальное расстояние, на которое большой (естественный) спутник может приблизиться к своей планете — хозяину без того, чтобы приливные силы не разорвали его на части. Чтобы получить оценку этого критического расстояния R_c , можно приравнять приливную силу (16.6), стр. 258, при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, приложенную к некоторой материальной точке массы m на поверхности спутника радиуса r_{sat} и массы m_{sat} со стороны планеты массы M , и силу собственного гравитационного притяжения этой материальной точки спутником:

$$2 \frac{GmM}{R^3} r_{\text{sat}} = \frac{Gmm_{\text{sat}}}{r_{\text{sat}}^2}, \quad (16.30)$$

откуда для предела Роша получаем следующее выражение:

$$R_c = r_{\text{sat}} \sqrt[3]{\frac{2M}{m_{\text{sat}}}} = r_{\text{pl}} \sqrt[3]{\frac{2\rho}{\rho_{\text{sat}}}}. \quad (16.31)$$

В этой формуле r_{pl} — радиус планеты — хозяина, ρ — ее средняя плотность, а ρ_{sat} — средняя плотность спутника. Если планета и спутник имеют сходный состав (т. е. $\rho \approx \rho_{\text{sat}}$), предел Роша равен приблизительно $\sqrt[3]{2} = 1.26$ радиуса планеты — хозяина. Знаменитые кольца Сатурна лежат внутри предела Роша и потому могут быть образованы осколками естественного спутника, разорванного приливными силами.

Этот предел назван по имени французского астронома Эдуарда Роша (1820—1883), который первым провел соответствующие расчеты. Приведенное выше вычисление предела Роша предполагает, что спутник остается сферическим: в этом вычислении не приняты во внимание неизбежные искажения формы спутника в присутствии сильных приливных сил. Более точный расчет, который рассматривает спутник как самогравитирующую несжимаемую жидкость, дает примерно в два раза большую величину для критического расстояния R_c .

Отметим, что малые орбитальные тела, такие как камни, или даже маленькие луны, могут оставаться целыми в пределах радиуса Роша, потому что они удерживаются вместе в первую очередь внутренними упругими силами, а не самогравитацией. Тем не менее этот механизм становится все менее эффективным по мере возрастания размеров рассматриваемого тела. Не удивительно, что все крупные спутники планет Солнечной системы имеют орбиты, радиусы которых превышают соответствующий радиус Роша, в то время как все кольцевые системы планет (которые состоят из мириад движущихся по орбитам малых осколков твердых пород) имеют размеры, лежащие внутри радиуса Роша. Знаменитые кольца Сатурна лежат внутри предела Роша для Сатурна и могут быть обломками разрушенной луны (естественного спутника Сатурна).

Искусственные спутники слишком малы, чтобы испытывать значительные приливные напряжения.

Задания для самостоятельной работы

Вопросы для дальнейшего размышления

1. Почему небесные тела, такие как планеты и их спутники могут существовать только в движении? Почему не может существовать планетная система с неподвижными планетами? Почему в планетной системе или даже в Галактике невозможно существование хотя бы одного неподвижного тела (планеты или луны)? Почему же тогда мы воспринимаем звезды на небе как неподвижные?
2. Какие физические законы дают объяснение фактических (круговых или эллиптических) форм планетных орбит? Какая особенность закона всемирного тяготения ответственна за существование замкнутых орбит? Укажите требования (физические условия), при которых орбита небесного тела была бы в точности эллиптическая.
3. Первый закон Кеплера утверждает, что тело под действием центральной силы тяжести, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра, движется по эллиптической орбите. Каковы свойства таких движений, которые описываются вторым и третьим законам Кеплера?
4. Какие особенности строения Солнечной системы отвечают за (приблизительно) эллиптическую форму планетных орбит? Почему реальные орбиты лишь приблизительно эллиптические?
5. Сила гравитационного притяжения к Солнцу нашего естественного спутника — Луны — больше гравитационной силы, действующей на Луну со стороны Земли. Почему же в таком случае имеет смысл говорить, что Луна обращается вокруг Земли? Как выглядит орбита Луны в геоцентрической (связанный с Землей) и гелиоцентрической системах отсчета?
6. Каковы физические причины, объясняющие (почти) постоянный наклон оси суточного вращения Земли к плоскости своей орбиты (этот наклон равен 23.5° , и он отвечает за смену времен года на Земле)?
7. Наклон оси Земли к плоскости своей орбиты в течение тысячелетий остается почти неизменным. Но ориентация оси Земли в пространстве медленно изменяется — ось описывает круговой конус с периодом почти 26 000 лет. Такое движение называется прецессией. Исторически оно было третьим из обнаруженных движений Земли, после гораздо более очевидных суточного вращения вокруг оси и годового обращения

вокруг Солнца. Из-за прецессии оси, северный полюс небесной сферы, который в нашу эпоху находится в пределах 1° дуги от Полярной звезды (и будет ближе всего к Полярной звезде в 2017 году), через 12 000 лет будет находиться приблизительно в 5° от Веги. Каковы физические причины прецессии земной оси?

8. Почему две одиночные звезды, находящиеся на очень большом расстоянии одна от другой в просторах Галактики и движущиеся навстречу, не могут при сближении образовать двойную звезду? При каких условиях в Галактике возможно образование кратных звезд?
9. Почему равновесная форма водной оболочки, покрывающей Землю, имеет форму эллипсоида вращения с двумя «вздутиями» на противоположных сторонах земного шара? Почему в модели океана в виде водной оболочки постоянной глубины, целиком покрывающей Землю, приливные вздутия ориентированы почти перпендикулярно линии Луна – Земля?
10. Почему для объяснения приливной эволюции осевых вращений и орбитальных движений гравитационно связанных небесных тел необходимо учитывать приливное трение?

Задачи для самостоятельного решения

Ниже приведены задачи для самостоятельного решения и задания для выполнения моделирующего эксперимента на компьютере с пакетом программ «Движение космических тел».

1*. Эксцентриситет эллиптической орбиты. Как эксцентриситет эллиптической орбиты, получающейся при горизонтальной начальной скорости, зависит от величины начальной скорости? Как изменяется эксцентриситет эллиптической орбиты при увеличении начальной скорости от нуля до круговой скорости и далее вплоть до скорости освобождения? Выразите эксцентриситет орбиты через отношение начальной скорости к круговой скорости $v_0/v_{кр}$.

2*. Геометрически подобные эллиптические орбиты. Для некоторой величины v_0 поперечной начальной скорости, превышающей круговую скорость ($v_0 > v_{кр}$), мы получаем эллиптическую орбиту с ближним фокусом в центре силы. При какой величине начальной скорости (меньшей чем круговая) результирующая орбита будет эллипсом, геометрически подобным первой орбите? Каковы периоды обращения по этим орбитам (в периодах обращения по круговой орбите, проходящей через начальную точку)? Проверьте свой результат в вычислительном эксперименте.

3. Гиперболический избыток скорости. Допустим, что сообщенная спутнику начальная скорость превышает скорость освобождения для данной начальной точки ($v_0 > v_{осв}$). Докажите, что по мере удаления спутника в бесконечность его скорость стремится к постоянной величине. Покажите, что эта величина (называемая гиперболическим избытком скорости) не зависит от направления начальной скорости и равна квадратному корню из разности между квадратами начальной скорости и скорости освобождения для данной начальной точки.

4.** Угол между асимптотами. Как угол между асимптотами гиперболической траектории зависит от скорости тела в вершине гиперболы (в точке траектории, самой близ-

кой к центру силы)? Примите, что эта скорость v_0 выражена в единицах круговой скорости $v_{кр}$ для данной точки. Какой должна быть величина поперечной начальной скорости (в единицах круговой скорости для данной начальной точки), чтобы направление движения изменилось на заданный угол θ ($\theta < 90^\circ$) в процессе движения тела от начального положения в бесконечность?

5.** **Время прохождения половины эллиптической орбиты.** Какую долю периода обращения по эллиптической орбите с эксцентриситетом e занимает прохождение спутником ближней к Земле половины эллипса? Результат расчета проверьте в вычислительном эксперименте для $e = 0,5$.

6. **Скорости в перигее и апогее.** Чему равно отношение скоростей спутника в перигее и апогее для эллиптической орбиты с заданными расстояниями r_P и r_A от центра Земли до перигея и до апогея соответственно? Чему равно отношение угловых скоростей поворота радиуса-вектора спутника в перигее и апогее орбиты?

7. **Третий закон Кеплера и круговые орбиты.** Радиусы двух круговых орбит относятся как 4 : 1. Как относятся периоды обращения планет по этим орбитам? Как относятся их орбитальные скорости? Как относятся угловые скорости? Применяя третий закон Кеплера к круговым орбитам, покажите, что сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра.

8. **Круговая и эллиптическая орбиты.** Какую начальную скорость (в единицах круговой скорости для данной начальной точки) нужно сообщить спутнику в горизонтальном направлении, чтобы получить эллиптическую орбиту с вдвое большим периодом обращения, чем на круговой орбите, проходящей через начальную точку? С вчетверо большим периодом? С вдвое меньшим периодом? Проверьте результаты Ваших расчетов в моделирующем эксперименте на компьютере.

9.** **Свободное падение на Солнце.** Сколько времени продолжалось бы свободное падение тела на Солнце с расстояния, равного радиусу земной орбиты (при нулевой начальной скорости)? В течение какой доли всего времени падения тело пройдет первую половину этого расстояния?

10. **Радиус и центр годографа скорости.** Допустим, что в перигее эллиптической орбиты скорость спутника в 1.25 раз больше круговой скорости для этой точки. Вычислите радиус годографа скорости для этой эллиптической орбиты. Выразите этот радиус в единицах круговой скорости для перигея эллиптической орбиты. Вычислите также координаты центра этого кругового годографа в пространстве скоростей (положение центра годографа относительно начала координат пространства скоростей). Найдите значение скорости спутника в момент прохождения через конец малой оси эллиптической орбиты (в единицах круговой скорости для перигея эллиптической орбиты).

11. **Радиус кривизны эллиптической орбиты в перигее и апогее.** Рассчитайте радиус кривизны эллиптической орбиты в начальной точке, где спутнику сообщается в горизонтальном направлении скорость, составляющая 1.25 круговой скорости для данной высоты. Искомый радиус выразите через расстояние от центра Земли до начальной точки. Каким будет радиус кривизны этой эллиптической орбиты в апогее?

12*. **Годограф скорости для гиперболической траектории.** Рассмотрите тело (скажем, комету), которое приближается к солнцу из бесконечности, проходит через перигелий гиперболической траектории со скоростью, равной 1.5 круговой скорости для этой точки, и затем уходит в бесконечность по другой асимптоте гиперболы. Вычислите радиус

годографа скорости для этого гиперболического движения (в единицах круговой скорости для перигелия). Найдите также положение (координаты) центра кругового годографа в пространстве скоростей. В этом движении конец вектора скорости проходит только часть этой окружности. Вычислите центральный угол, который стягивает эту дугу кругового годографа.

13*. Круговая форма годографа скорости.** Попробуйте доказать аналитически, что годограф скорости при произвольном кеплеровом движении (т. е. движении под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра) представляет собой окружность (для замкнутых орбит и параболического движения) или дугу окружности (для открытых гиперболических орбит).

14*. Скорость спутника на половине пути между перигеем и апогеем. Как найти скорость спутника при прохождении через конец малой оси эллиптической орбиты, если известны скорости в перигее и в апогее орбиты?

15.** **Вертикальный полет баллистического снаряда.** Баллистическому снаряду на поверхности Земли сообщают направленную вертикально вверх начальную скорость, равную первой космической скорости. На какую максимальную высоту поднимется снаряд? Сколько времени пройдет от момента старта до момента падения снаряда на Землю? Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте.

16. Семейство эллиптических траекторий баллистических снарядов. Пусть баллистические снаряды запускаются из одной точки на поверхности Земли в разных направлениях (под разными углами к горизонту). Пусть величина начальной скорости всех снарядов равна первой космической скорости. Предположим, что атмосфера отсутствует.

(а)* Докажите, что большая ось каждой такой орбиты параллельна направлению начальной скорости.

(б) Докажите, что большая полуось любой из этих орбит равна радиусу Земли.

(в) Какой максимальной высоты над поверхностью Земли могут достичь эти снаряды?

(г) Докажите, что вторые фокусы всех эллипсов расположены на окружности, центр которой находится в начальной точке, а радиус равен радиусу Земли.

(д)** Который из таких снарядов, выпущенных одновременно под разными углами к горизонту, последним упадет на Землю? Сколько времени пройдет от старта до момента его падения на Землю?

(е)** Пусть снаряд выпущен под углом α с вертикалью. Рассчитайте угловое положение точки его падения на Землю (относительно начальной точки). Сколько времени продолжится полет этого снаряда? Сделайте численные расчеты для $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ и 60° . Результаты расчета проверьте в моделирующем эксперименте.

(ж)** Докажите, что огибающая всех траекторий (граница области, в пределах которой лежат траектории рассматриваемого семейства) представляет собой эллипс. Где расположены фокусы этого эллипса? Чему равен его эксцентриситет?

17. Семейство эллиптических траекторий осколков при одинаковой величине начальной скорости. Допустим, что поднимающийся вертикально вверх снаряд в высшей точке подъема (расстояние r_0 до которой от центра Земли в несколько раз больше радиуса Земли) разбивается на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с начальными скоростями, равными $1.2 v_{кр}$, где $v_{кр}$ — круговая скорость для данной начальной точки (для расстояния r_0 от центра Земли).

(а) При каком направлении начальной скорости осколок удалится на наибольшее расстояние от центра Земли? Рассчитайте наибольшее расстояние, на которое осколки могут удалиться от центра Земли.

(б)* При каком направлении начальной скорости осколок удалится на наибольшее расстояние от начальной точки (от точки взрыва)? Рассчитайте это наибольшее расстояние. Где расположена точка наибольшего удаления от начальной точки?

(в) Сравните найденное в пункте (б) расстояние от начальной точки до точки наибольшего удаления с найденным в пункте (а) наибольшим расстоянием, на которое может удалиться осколок от центра Земли. Как можно объяснить совпадение этих расстояний?

(г)* Один из фокусов эллиптических орбит всех осколков находится в центре Земли. Докажите, что вторые фокусы всех орбит лежат на некоторой сфере. Где расположен центр этой сферы? Чему равен радиус этой сферы?

(д)** Докажите, что граница области, в пределах которой лежат орбиты всех осколков (т.е. огибающая всех орбит), представляет собой вытянутый эллипсоид вращения, фокусы которого расположены в центре Земли и в начальной точке (точке взрыва). Чему равен эксцентриситет этого эллипсоида?

18*. Орбиты спутников, запущенных из одной точки с общим направлением начальной скорости. Докажите, что вторые фокусы эллиптических орбит всех спутников, запущенных с разными величинами, но общим направлением начальных скоростей, лежат на одной прямой, проходящей через начальную точку. Докажите, что эта прямая образует с проходящей через начальную точку вертикалью угол, вдвое больший угла, образованного вектором начальной скорости с этой вертикалью (воспользуйтесь «оптическим» свойством эллипса).

19. Эволюция вытянутой эллиптической орбиты в верхней атмосфере. Объясните, почему постепенно снижается апогей сильно вытянутой эллиптической орбиты спутника, перигей которой расположен в разреженных верхних слоях атмосферы, так что форма орбиты постепенно приближается к круговой.

20. Эволюция круговой орбиты в верхней атмосфере. Обращающийся по низкой круговой орбите спутник непрерывно испытывает действие очень малой силы сопротивления разреженных верхних слоев атмосферы. После большого числа витков радиус орбиты уменьшился на 0.2%. На сколько процентов изменилась за это время скорость спутника? На сколько процентов изменился период его обращения? Каждый отдельный виток траектории спутника можно с высокой точностью считать круговым.

21*. Аэродинамический парадокс спутника. Объясните, каким образом из-за действия на спутник тормозящей его движение силы сопротивления в разреженных верхних слоях атмосферы скорость спутника возрастает.

22.** **Высота подъема и время полета.** Баллистический снаряд, начальная скорость которого направлена радиально вверх (от центра планеты), будет замедленно двигаться прямолинейно (удаляться от планеты по вертикали), достигнет некоторой максимальной высоты, и затем начнет падать на планету вдоль той же прямой. На какое максимальное расстояние от центра планеты удалится баллистический снаряд, если начальная точка находится на расстоянии r_0 от центра планеты, а начальная скорость равна круговой скорости для данной начальной точки? Сколько времени пройдет от момента старта до того момента, когда этот баллистический снаряд снова пройдет (в обратном направлении) через начальную точку? Ответ выразите в периодах обращения по круговой орбите, проходящей через начальную точку.

23*. **Возвращение с орбиты.** Орбитальная станция движется вокруг Земли по низкой круговой орбите ($h \ll R$, где h — высота орбиты над поверхностью Земли, R — радиус Земли). Какой дополнительный импульс скорости Δv (и в каком направлении) должен

быть сообщен отстыковавшемуся от станции транспортному кораблю, чтобы обеспечить переход с круговой орбиты на траекторию приземления, оптимальную с точки зрения затрат ракетного топлива? Сделайте численный расчет необходимой дополнительной скорости для $h = 0.1 R$. Ответ выразите в единицах скорости орбитальной станции. Проверьте результат расчета в моделирующем эксперименте. Получите также приближенное выражение для Δv , справедливое вплоть до квадратичных членов по малому параметру $h/R \ll 1$.

24*. **Приземление спускаемого аппарата сообщением дополнительной скорости вертикально вниз.** Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите высотой h над поверхностью Земли. Рассчитайте дополнительную скорость Δv , которую нужно сообщить отстыковавшемуся от орбитальной станции спускаемому аппарату в направлении вертикально вниз для того, чтобы он по касательной вошел в плотные слои атмосферы. Выразите ответ в естественных для данной задачи единицах скорости станции на круговой орбите. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте. В какой точке орбиты нужно сообщить эту дополнительную скорость, чтобы аппарат совершил посадку в заданном месте?

25*. **Сравнение двух способов возвращения с орбиты.** Покажите расчетом и проверьте в моделирующем эксперименте, что для выполнения «мягкой» посадки сообщением дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальному движению по низкой круговой орбите, требуется приблизительно в четыре раза меньшая дополнительная скорость, чем при сообщении ее в вертикальном направлении.

26*. **Возвращение на Землю после направленного вверх дополнительного импульса.** Можно ли посадить спускаемый аппарат, сообщая ему дополнительную скорость вертикально вверх (по радиусу от центра Земли)? Если да, то какой должна быть необходимая для этого дополнительная скорость Δv ? В какой точке исходной круговой орбиты нужно сообщать эту скорость для того, чтобы спускаемый аппарат совершил посадку в заданной точке земной поверхности?

27*. **Относительное движение орбитальных тел.** Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите. Космонавт, вышедший в открытый космос, бросает рукой небольшой предмет в горизонтальном направлении перпендикулярно вектору скорости станции. Как этот предмет будет двигаться относительно орбитальной станции? На какое максимальное расстояние от станции он удалится? Космонавт сообщает предмету начальную скорость 15 м/с.

28.** **Относительное движение в плоскости орбиты.** Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите. Космонавт, вышедший в открытый космос, бросает рукой небольшой предмет в направлении вертикально вниз (в сторону Земли). Как этот предмет будет двигаться относительно орбитальной станции? На какое максимальное расстояние от станции он удалится? Начальная скорость предмета 15 м/с. Дайте ответы на те же вопросы, если предмет брошен вертикально вверх.

Программа, моделирующая относительное движение орбитальных тел, позволяет составить представление о характере свободного движения любого предмета, выброшенного с орбитальной станции. Каким увидят это движение космонавты, находящиеся на борту станции? При такой постановке задачи существенно, что начальная скорость предмета относительно станции невелика по сравнению с орбитальной скоростью. Сделайте качественные предсказания относительно формы траектории предмета относительно станции и проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте.

29*. Относительное движение орбитальных тел.** Выведите приближенные дифференциальные уравнения относительного движения орбитальных тел (т. е. уравнения движения предмета, брошенного с небольшой скоростью относительно орбитальной станции, движущейся по круговой орбите). Проинтегрируйте эти уравнения для разных начальных условий (начальная скорость направлена вертикально вниз, вертикально вверх, горизонтально поперек плоскости орбиты станции, горизонтально по направлению движения станции и в противоположном направлении), и найдите для этих случаев траектории относительного движения.

30*. Зонды с разными периодами обращения. Наиболее экономичный с точки зрения затрат ракетного топлива способ запуска космического зонда для приближения к поверхности и исследования планеты со станции, движущейся вокруг планеты по круговой орбите, состоит в сообщении зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальной скорости станции. При этом зонд переходит на приближающуюся к планете эллиптическую орбиту, которая имеет единственную общую точку с круговой орбитой станции, где и должна произойти последующая встреча зонда со станцией. Для такой встречи периоды зонда и станции должны относиться как небольшие целые числа, т. е. период зонда T_0 может быть равен $(m/n)T$. Какие (целые) значения m и n допустимы? Возможна ли орбита с $T_0 = T/2$? При каких значениях отношения радиуса орбиты станции и радиуса планеты возможен такой зонд? Какой должна быть дополнительная скорость, необходимая для запуска такого зонда? Проверьте свои расчеты в моделирующем эксперименте. Возможна ли орбита с $T_0 = T/3$?

31.** **Орбита космического зонда.** Орбитальная станция движется вокруг планеты по круговой орбите, радиус которой r_0 вдвое больше радиуса планеты R ($r_0 = 2R$). Для запуска зонда на нужную эллиптическую орбиту он должен получить после отстыковки от станции некоторую дополнительную скорость. Наиболее экономичный (с точки зрения затрат ракетного топлива) способ соответствует сообщению зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальному движению станции.

(а) Рассчитайте дополнительную скорость Δv , потребную для маневра, обеспечивающего максимальное приближение зонда к поверхности планеты (с последующим возвращением к станции). Сколько процентов от скорости станции составляет эта дополнительная скорость?

(б) На какое минимальное расстояние зонд приближается к планете? Рассчитайте расстояние от центра планеты до ближайшей к ее поверхности точки орбиты. Выразите это расстояние в единицах радиуса круговой орбиты станции и попробуйте запустить такой зонд в моделирующем эксперименте.

(в) Чему равно отношение периодов обращения такого зонда и орбитальной станции? Сколько раз зонд приблизится к планете с момента запуска до первой встречи с орбитальной станцией? Какой вид имеет орбита зонда для космонавтов на борту орбитальной станции?

32*. **Зонды с горизонтальной и радиальной начальными скоростями.** Орбитальная станция движется вокруг планеты по круговой орбите. Попробуйте запустить зонд, который возвратился бы к станции, совершив четыре оборота вокруг планеты за то время, пока станция совершит пять оборотов. Какую дополнительную скорость в направлении орбитального движения станции нужно сообщить зонду для этого? Как выглядит траектория зонда с точки зрения космонавтов, находящихся на орбитальной станции? Какая дополнительная скорость в радиальном направлении необходима для достижения того же результата (четыре оборота за пять оборотов станции)? Чем отличаются траектории

космического зонда в этих двух случаях?

33*. Пример орбитального маневрирования. Перевод отстыковавшегося от орбитальной станции космического корабля в противоположную со станцией точку той же круговой орбиты можно осуществить с помощью двухимпульсного маневра с использованием промежуточных эллиптических орбит с периодами обращения, например, $3/2$ или $3/4$ периода обращения станции. В первом случае, получив при отделении от станции дополнительную скорость в направлении орбитального движения, корабль перейдет на эллиптическую орбиту, за время одного оборота по которой станция совершит полтора оборота. Это значит, что корабль выйдет в общую точку этих орбит в тот момент, когда станция будет находиться в диаметрально противоположной точке своей круговой орбиты. Если в этот момент повторным включением реактивного двигателя погасить избыток скорости над значением круговой скорости, корабль будет дальше двигаться по той же круговой орбите, что и станция, но уже в диаметрально противоположной точке.

(а) Рассчитайте значения дополнительной скорости, необходимые для выполнения таких маневров (в первом и во втором импульсах). Выразите эти значения в единицах круговой скорости (скорости орбитальной станции).

(б) Попробуйте выполнить эти маневры в моделирующем эксперименте. Для успеха очень важно точно выдержать момент сообщения второго (тормозного) импульса. Выберите режим автоматического выполнения маневров и введите расчетное значение момента времени сообщения второго импульса, выразив его в единицах периода обращения станции. Как выглядит промежуточная орбита корабля относительно Земли и относительно орбитальной станции?

(в) Какие маневры необходимы для того, чтобы корабль возвратился к станции? Попробуйте выполнить их в эксперименте.

(г) Поставленной цели можно добиться и с помощью промежуточной эллиптической орбиты с периодом обращения, например, в $3/4$ периода обращения по круговой орбите. В каком случае (промежуточная орбита в $3/2$ или $3/4$ периода) расход ракетного топлива будет меньше?

34. Внешний космический зонд. Орбитальная станция обращается вокруг планеты по низкой круговой орбите. Для фотографирования сразу возможно большей части полушария поверхности планеты необходим автоматический зонд, который удалится бы от центра планеты на расстояние, по крайней мере вдвое превышающее радиус орбиты станции, и затем вернулся к станции. Как можно запустить такой зонд при наименьших затратах ракетного топлива? Рассчитайте величину необходимой для этого дополнительной скорости, выразив ее в процентах от скорости орбитальной станции. Для мягкого причаливания зонда к станции при возвращении нужно уравнивать их скорости повторным кратковременным включением ракетного двигателя зонда. Какими должны быть величина и направление необходимой для этого маневра дополнительной скорости? Проверьте свой расчет в моделирующем эксперименте в режиме автоматического выполнения маневров по введенной заранее программе. Какой вид имеет орбита зонда для космонавтов на борту орбитальной станции?

35. Радиальная дополнительная скорость. Орбитальная станция движется вокруг планеты по круговой орбите. Чтобы исследовать поверхность планеты с близкого расстояния и удаленные от планеты области межпланетного пространства с помощью одного зонда, можно использовать эллиптическую орбиту, получающуюся при сообщении зонду дополнительной скорости в радиальном (вертикальном) направлении. Какой должна быть величина этой дополнительной скорости, чтобы период обращения зонда был в

1.5 раза больше периода обращения станции? Рассчитайте минимальное и максимальное расстояния такого зонда от центра планеты. Какой вид имеет орбита зонда для космонавтов на борту орбитальной станции? Чем различаются орбиты стартующего со станции зонда, получающиеся при сообщении ему дополнительной скорости в направлениях вертикально вниз и вертикально вверх?

36. Переход на более высокую орбиту. Придумайте двухимпульсные маневры, с помощью которых можно перевести транспортный космический корабль с исходной круговой орбиты станции на новую более высокую круговую орбиту (с последующим возвращением на станцию совершением новых двухимпульсных маневров). При выборе из нескольких возможностей предпочтение должно отдаваться вариантам, оптимальным с точки зрения экономии топлива (т. е. вариантам, требующим наименьшего расхода ракетного топлива).

(а) Сделайте расчет необходимой дополнительной скорости в каждом импульсе для перехода на круговую орбиту с вдвое большим периодом обращения, чем орбита станции. Рассчитайте время t_2 второго импульса (в единицах периода обращения станции), считая время первого импульса $t_1 = 0$.

(б) После того, как корабль совершит по меньшей мере один полный оборот по новой круговой орбите, необходимо выполнить маневры для возвращения на станцию. Попробуйте придумать маневры, которые позволили бы осуществить сближение и стыковку корабля с орбитальной станцией. Рассчитайте возможный момент t_3 для совершения перехода на траекторию возвращения и необходимую для этого дополнительную скорость, а также момент t_4 сообщения последнего импульса для уравнивания скоростей корабля и станции после их сближения перед причаливанием.

(в) Введите все необходимые параметры (дополнительные скорости и моменты времени) для автоматического выполнения маневров по заранее рассчитанной программе. Проверьте правильность Ваших расчетов в моделирующем эксперименте.

37. Переход на орбиту вдвое большего радиуса. Рассмотрите предыдущее задание, заменив в нем требование перехода корабля на круговую орбиту с вдвое большим периодом (чем период орбитальной станции) требованием перехода на круговую орбиту вдвое большего радиуса, чем орбита станции. Проверьте правильность расчетов в моделирующем эксперименте.

38. Чтобы догнать, нужно тормозить. Орбитальная станция движется вокруг Земли по круговой орбите. При наземном старте транспортного корабля, который должен состыковаться со станцией, произошла непредвиденная задержка, из-за которой он с небольшим опозданием вышел на круговую орбиту станции, оказавшись позади станции на некотором расстоянии L . Это расстояние много меньше радиуса r орбиты станции ($L \ll r$). Чтобы догнать станцию через один ее оборот по орбите, требуется сообщить кораблю дополнительный импульс кратковременным включением ракетного двигателя.

(а) Каким должно быть направление этого импульса? Рассчитайте необходимую дополнительную скорость Δv , которую нужно сообщить кораблю. Выразите ее через расстояние L и период обращения станции T . Выразите также Δv через орбитальную скорость станции и отношение L/r .

(б) Какую дополнительную скорость Δv нужно сообщить кораблю, чтобы он догнал станцию после двух оборотов по орбите?

(в) Ответьте на те же вопросы для ситуации, когда корабль вышел на круговую орбиту станции, опережая ее на расстояние L .

39. Относительное и «абсолютное» движение компонент двойной звезды. Допустим, что одна из компонент двойной звезды движется относительно другой звезды (т. е. относительно неинерциальной системы отсчета, связанной со второй звездой) по кеплерову эллипсу, в одном из фокусов которого находится вторая звезда. Докажите, что в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы, обе звезды описывают геометрически подобные эллиптические орбиты с общим фокусом в центре масс системы. Чему равно отношение линейных размеров этих орбит?

40*. Двойная звезда и эффективный неподвижный силовой центр. Покажите, что в задаче двух тел, связанных взаимным тяготением, движение каждого из тел в инерциальной системе отсчета (системе центра масс) можно рассматривать как происходящее в некотором стационарном центральном гравитационном поле, т. е. в поле, создаваемом не движущимся вторым телом, а некоторым эффективным неподвижным источником (силовым центром). Покажите, что напряженность этого эффективного поля тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра масс системы. Какие выводы можно сделать на основе такого подхода о возможных траекториях компонент двойной звезды? Докажите, что ускорения тел в таких движениях относятся как их расстояния до центра масс системы: $a_1/a_2 = r_1/r_2$ (т. е. ускорения прямо пропорциональны расстояниям от центра масс).

41. Двойная звезда и масштабные преобразования (скейлинг). Компоненты двойной звезды имеют одинаковые массы и движутся по общей круговой орбите, находясь в каждый момент на противоположных концах ее диаметра.

(а) Во сколько раз изменится период обращения компонент двойной звезды по орбите, если пространственный размер системы (расстояние между компонентами) увеличить в 2 раза, сохранив прежние массы и характер движения (т. е. сохранив круговую орбиту)?

(б) Во сколько раз изменится период обращения, если массы компонент увеличить в 4 раза, сохранив пространственные размеры (и круговую орбиту)?

(в) Ответьте на аналогичные вопросы для двойной звезды, компоненты которой имеют неравные массы и обращаются по эллиптическим орбитам.

42. Поле тяготения несферической планеты.** Покажите, что дополнительный член в выражении для силы тяготения планеты, обусловленный небольшим осевым сжатием (или растяжением) планеты, убывает с расстоянием r от центра планеты (в экваториальной плоскости) обратно пропорционально четвертой степени расстояния r , т. е. что силу тяготения в экваториальной плоскости такой планеты можно приближенно описать формулой $F(r) = (GmM/r^2)(1 + bR^2/r^2)$, где R — радиус планеты, а безразмерный параметр b характеризует величину осевой деформации планеты. Для сжатой планеты примите модель однородного шара радиуса R с массивным «обручем» вдоль экватора, считая, что небольшая часть ΔM от общей массы M планеты приходится на этот экваториальный обруч. Для вытянутой планеты примите модель однородного шара радиуса R с дополнительными точечными массами на полюсах (полярными «шапками»), на которые приходится небольшая часть ΔM от общей массы M планеты.

43. Круговая экваториальная орбита и оскулирующий эллипс. Какую скорость нужно сообщить спутнику в экваториальной плоскости планеты с осевым сжатием (характеризуемым параметром $b > 0$), чтобы движение происходило по круговой орбите? По какой траектории стал бы двигаться этот спутник, если бы деформация планеты внезапно исчезла? (Такая невозмущенная кеплерова орбита, соприкасающаяся в данной точке с действительной орбитой, называется оскулирующей).

44*. **Максимальное и минимальное удаления экваториального спутника несферической планеты.** Спутнику, находящемуся на заданном расстоянии r_0 от центра сжатой вдоль оси планеты (сжатие планеты характеризуется параметром $b > 0$), сообщается некоторая скорость v_0 в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору (в экваториальной плоскости). Как можно рассчитать максимальное и минимальное расстояния его орбиты от центра планеты?

45*. **Круговые движения массивных планет.** Пусть две планеты имеют одинаковые массы $m = M/4$ (где M — масса звезды) и в начальный момент находятся с противоположных сторон от звезды на одинаковых расстояниях g . Других планет в этой системе нет. Какие начальные скорости нужно сообщить планетам, чтобы в дальнейшем они двигались по круговым орбитам? Проверьте полученный Вами результат в вычислительном моделирующем эксперименте на компьютере. Напомним, что при вводе начальных скоростей планет их значения нужно выражать в единицах круговой скорости, которая соответствовала бы системе звезды с единственной планетой (при заданных значениях масс), т. е. без учета возмущений со стороны второй планеты.

46*. **Простое частное решение задачи трех тел.** Для системы трех массивных тел, два из которых имеют одинаковые массы, возможно сравнительно простое движение с сохранением симметричной коллинеарной конфигурации системы, в которой тела одинаковой массы все время расположены на равных расстояниях по обе стороны третьего тела. В инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы, центральное тело может быть неподвижно: действующие на него силы притяжения двух других тел уравновешены. Покажите, что два тела равной массы могут при этом синхронно двигаться по конгруэнтным кеплеровым эллипсам (или параболам, или гиперболам) так, как если бы каждое из них находилось в стационарном центральном поле тяготения, создаваемом неподвижным источником. Какова эффективная масса такого источника, если масса центрального тела равна M , а одинаковые массы двух других тел равны m ?

47. **Устойчивость простого частного решения.** Проверьте описанную в задаче 46 возможность кеплеровых движений в системе двух планет конечной массы с помощью моделирующего эксперимента на компьютере, задав соответствующие параметры системы и начальные условия. Затем несколько измените параметры либо начальные условия и выясните, к каким изменениям в характере движения приводят такие изменения. Устойчива ли рассматриваемая система? Другими словами, будут ли малые отклонения в начальных условиях или в значениях параметров приводить к малым отклонениям в описанных выше кеплеровых движениях планет, или эти малые начальные отклонения будут нарастать со временем?

48.** **Равносторонняя конфигурация трех тел одинаковой массы.** Покажите, что система из трех точечных (или сферических) небесных тел одинаковой массы, находящихся в вершинах равностороннего треугольника, может под действием сил взаимного тяготения равномерно вращаться как целое вокруг центра масс. Рассчитайте угловую скорость такого вращения. Воспроизведите круговое движение трех тел одинаковой массы в моделирующем эксперименте, используя программу «Система планет». При вводе параметров следует задать массы двух «планет» равными массе «звезды» и должным образом задать их начальные положения. Значения начальных скоростей планет, которые необходимы для реализации рассматриваемого кругового движения, нужно пересчитать предварительно в «гелиоцентрическую» (т. е. в связанную со «звездой») систему отсчета. Для ввода начальная скорость каждой планеты должна быть выражена в единицах ее невозмущенной круговой скорости, т. е. скорости обращения планеты по круговой орбите под

действием только силы притяжения со стороны звезды (в отсутствие второй планеты). Как будет выглядеть такое симметричное движение в «гелиоцентрической» или в «геоцентрической» системе отсчета (т. е. в системе отсчета, связанной с одним из этих тел)? Устойчиво ли рассматриваемое движение?

49.** **Одинаковые тела в вершинах квадрата.** Покажите, что система из четырех небесных тел одинаковой массы, находящихся в вершинах квадрата, может под действием сил взаимного тяготения равномерно вращаться как целое вокруг центра масс. Рассчитайте угловую скорость такого вращения. Воспроизведите круговое движение четырех тел одинаковой массы в моделирующем эксперименте, используя программу «Система планет». При вводе параметров следует задать массы трех «планет» равными массе «звезды» и должным образом задать их начальные положения. Значения начальных скоростей планет, которые необходимы для реализации рассматриваемого кругового движения, нужно пересчитать предварительно в «гелиоцентрическую» (т. е. в связанную со «звездой») систему отсчета. Для ввода начальная скорость каждой планеты должна быть выражена в единицах ее невозмущенной круговой скорости, т. е. скорости обращения планеты по круговой орбите под действием только силы притяжения со стороны звезды (в отсутствие второй планеты). Как будет выглядеть такое симметричное движение в «гелиоцентрической» или в «геоцентрической» системе отсчета (т. е. в системе отсчета, связанной с одним из этих тел)? Устойчиво ли рассматриваемое движение?

50.** **Эллиптические движения в равносторонних конфигурациях.** Покажите, что система небесных тел одинаковой массы, находящихся в вершинах правильного треугольника или квадрата, может под действием сил взаимного тяготения совершать синхронное движение по конгруэнтным эллиптическим орбитам (а также по параболическим или гиперболическим траекториям), сохраняя во время движения равностороннюю конфигурацию. Стороны образуемого телами правильного многоугольника в таком движении непрерывно изменяются, а сам многоугольник, сохраняя правильную форму, равномерно вращается вокруг своего центра. Воспроизведите такие движения в моделирующем эксперименте. Устойчивы ли такие движения?

51.** **Треугольные точки либрации.** Два массивных тела одинаковой массы (компоненты двойной звезды) совершают круговые движения, находясь на неизменном расстоянии друг от друга. Покажите, что третье тело (планета, спутник), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел, тоже может двигаться по окружности синхронно с массивными телами, находясь все время в вершине правильного (равностороннего) треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий массивные тела. Реализуйте такое круговое движение системы трех тел (описываемое точным частным решением ограниченной задачи трех тел) в моделирующем эксперименте, используя программу «Двойная звезда с планетой» или «Планета со спутником». Какую начальную скорость нужно сообщить третьему телу? Будет ли устойчиво движение малого тела в треугольной точке либрации по отношению к малым отклонениям в параметрах системы или в начальных условиях?

52*.** **Треугольные точки либрации при неравных массах.** Покажите, что тело пренебрежимо малой массы, находясь в вершине равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий (неодинаковые) массивные тела, может двигаться синхронно с массивными телами, совершающими круговые движения под действием взаимного тяготения, оставаясь все время в такой треугольной точке либрации. Реализуйте такое круговое движение трех тел, образующих равностороннюю конфигурацию, в моделирующем эксперименте, используя программу «Двойная звезда с планетой»

или «Планета со спутником». Какую начальную скорость нужно сообщить третьему телу? Будет ли устойчиво движение малого тела в треугольной точке либрации по отношению к малым отклонениям в параметрах системы или в начальных условиях?

53**. Коллинеарные точки либрации.** Два массивных тела (компоненты двойной звезды) совершают круговые движения вокруг центра масс, находясь на неизменном расстоянии друг от друга. Покажите, что в такой системе на линии, проходящей через тела, существуют три точки, в которых третье тело (планета, спутник), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел, тоже может двигаться по окружности синхронно с массивными телами, так что коллинеарная конфигурация системы сохраняется во время движения. Рассчитайте положения внутренней и двух внешних коллинеарных точек либрации. Воспроизведите описанное круговое движение в моделирующем эксперименте. Устойчиво ли движение малого тела в коллинеарных точках либрации?

54**. Эллиптические движения в ограниченной задаче трех тел.** Покажите, что в случае эллиптических движений двух массивных тел, третье тело пренебрежимо малой массы, находящееся в треугольной точке либрации, может синхронно с массивными телами двигаться по геометрически подобному эллипсу, так что равносторонняя конфигурация системы сохраняется во время движения. При этом стороны треугольника испытывают непрерывные периодические изменения, а сам треугольник неравномерно вращается вокруг центра масс системы. Воспроизведите описанное эллиптическое движение в моделирующем эксперименте.

55**. Эллиптические движения в коллинеарной конфигурации.** Покажите, что в случае эллиптических движений двух массивных тел, третье тело пренебрежимо малой массы, находящееся в одной из коллинеарных точек либрации, может синхронно с массивными телами двигаться по геометрически подобному эллипсу, так что коллинеарная конфигурация системы сохраняется во время движения (расстояния между телами периодически изменяются при таком движении, но отношение расстояний остается неизменным). Воспроизведите такое эллиптическое движение в моделирующем эксперименте.

56**. Эллиптические кеплеровы движения в неограниченной задаче трех тел.** Покажите, что три массивных тела (с произвольным соотношением масс) могут синхронно совершать кеплеровы эллиптические (круговые, параболические, гиперболические и даже прямолинейные) движения по геометрически подобным траекториям (с общим фокусом в центре масс системы), сохраняя равностороннюю конфигурацию. Стороны треугольника при этом непрерывно изменяются (периодически в случае эллиптических движений тел), а сам треугольник неравномерно вращается вокруг центра масс (вращается периодически в случае ограниченных движений или поворачивается в противном случае). Доказательство можно провести на основе концепции эффективного стационарного центрального гравитационного поля, в котором движется каждое из тел: несмотря на то, что каждое из тел движется под действием сил тяготения со стороны двух других движущихся тел, при равносторонней конфигурации эти силы складываются таким образом, что их сумма направлена к центру масс всей системы, и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра масс. Этим обеспечивается возможность синхронных кеплеровых движений трех тел в равносторонней конфигурации. Воспроизведите такие эллиптические движения в моделирующем эксперименте. Устойчивы ли рассматриваемые движения в равносторонней конфигурации?

Рекомендуемая литература

При изучении темы «Основы космической динамики» и при подготовке к работе с пакетом программ «Движение космических тел» рекомендуется использовать следующую дополнительную литературу:

1. *Левантовский В.И.* Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1974.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. Механика. М.: Наука, 1989.
3. *Рябов Ю.А.* Движения небесных тел. М.: Наука, 1977.
4. *Марленский А.Д.* Основы космонавтики. Факультативный курс (пособие для учащихся). М.: Просвещение, 1975.
5. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977.

Глоссарий

Апогей и перигей

Апогей — это точка орбиты Луны или искусственного спутника Земли, которая удалена от Земли на максимальное расстояние. В *перигее* околоземной орбиты тело находится на минимальном расстоянии от Земли.

Астероид

Астероиды или малые планеты Солнечной системы — это малые тела, которые обращаются вокруг Солнца между орбитами Марса и Юпитера в области, называемой астероидным поясом. Размеры астероидов заключены в пределах от примерно 1000 км для самого крупного (Церера) до менее километра в диаметре. По оценкам, существует около 500 астероидов с диаметрами, превышающими 100 км.

Афелий и перигелий

Афелий — это точка орбиты планеты, кометы, астероида или искусственного спутника Солнца на околосолнечной орбите, наиболее удаленная от Солнца. В *перигелии* тело на околосолнечной орбите находится на минимальном расстоянии от Солнца.

Возмущение

Возмущениями называют отклонения небесного тела от траектории или орбиты, по которой оно бы двигалось под действием единственной центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра. Такая сила описывается ньютоновским законом всемирного тяготения. В соответствии с законами Кеплера, одиночная планета, движущаяся вокруг Солнца, или спутник, движущийся вокруг Земли, должны описывать эллиптические орбиты. В действительности орбиты планет подвержены возмущающим влияниям сил тяготения, действующих со стороны других планет. Аналогично, околоземные орбиты спутников подвержены гравитационным возмущениям со стороны Солнца и Луны (эти возмущения вызываются приливными силами), и отклонениями формы Земли от сферической симметрии. Параболические и гиперболические траектории комет испытывают возмущения, когда кометы проходят вблизи планет.

Гипербола

Гипербола представляет собой коническое сечение, которое можно определить также как плоскую кривую, все точки которой удовлетворяют следующему свойству: разность расстояний от любой точки гиперболы до двух фиксированных точек (называемых фокусами гиперболы) постоянна. Кеплерово движение с положительным значением полной энергии происходит по гиперболе.

См. также:

Конические сечения

Эллипс

Парабола

Годограф

В общем случае *годографом* некоторого вектора называют кривую, которую «вычерчивает» конец этого (изменяющегося со временем) вектора при условии, что начало вектора остается в одной точке. Например, пространственная траектория движущейся частицы — это годограф ее радиуса-вектора.

Годограф вектора скорости тела, движущегося под действием центральной ньютоновской силы тяготения представляет собой окружность (или часть окружности) в пространстве скоростей. Это свойство произвольного кеплерова движения иллюстрируется моделирующей программой «Годограф вектора скорости».

Закон всемирного тяготения

Сила гравитационного притяжения двух любых материальных точек (точечных масс) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r между точками:

$$F_r(r) = -G \frac{mM}{r^2}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная, r — расстояние между взаимодействующими телами (материальными точками), массы которых равны m и M . Это выражение дает проекцию силы тяготения на радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный от одного из тел к второму (знак минус показывает, что гравитационная сила, действующая на каждое из взаимодействующих тел — это сила притяжения, направленная в сторону второго тела).

Это выражение применимо также для силы тяготения, приложенной к любому телу небольших размеров (к точечной массе) со стороны тела произвольно больших размеров, если у последнего распределение массы имеет сферическую симметрию. Оно применимо также для сил гравитационного взаимодействия между любыми двумя сферически симметричными массивными телами, такими как звезды или планеты. В этом случае под r следует понимать расстояние между центрами тел.

Законы Кеплера

Три закона, которым подчиняется движение планет вокруг Солнца:

1. Орбита планеты — это эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце (первый закон Кеплера).

2. Обращение планеты вокруг Солнца происходит так, что радиус-вектор, соединяющий планету с Солнцем, описывает равные площади за равные промежутки времени (второй закон Кеплера).

3. Отношение квадрата периода обращения планеты вокруг Солнца к кубу ее среднего расстояния от Солнца (кубу большой полуоси орбиты) одинаково для всех планет (третий закон Кеплера).

Эти законы были открыты Иоганном Кеплером (Johannes Kepler, 1571 — 1630) около 1610 года на основе тщательного изучения многолетних астрономических наблюдений, выполненных Тихо Браге (Tycho Brahe, 1546 — 1601). В обобщенном виде законы Кеплера справедливы не только для движений планет вокруг Солнца, но также для любого кеплерова движения, происходящего под действием центральной силы всемирного тяготения.

Кеплерово движение

Кеплеровым называют движение тела под действием центральной силы притяжения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра. В частности, движение планеты вокруг Солнца (не возмущенное тяготением других планет), движение спутников вокруг Земли (и других планет), т. е. движения под действием центральной ньютоновской силы тяготения, дают примеры Кеплеровых движений. Кеплерово движение описывается законами Кеплера.

Кометы

Кометы — это малые небесные тела, движущиеся вокруг Солнца либо по сильно вытянутым эллиптическим орбитам с большими эксцентриситетами, либо по открытым параболическим (или гиперболическим) траекториям. Короткопериодическими называют кометы, периоды обращения которых вокруг Солнца лежат в пределах до 150 лет. Долгопериодические кометы могут иметь периоды, превышающие 100 000 лет. Из короткопериодических комет наиболее известна комета Галлея, период обращения которой составляет около 76 лет. Ее последний визит в окрестности Солнца наблюдался в 1986 году. Эта комета названа в честь английского астронома Эдмунда Галлея (Edmund Halley, 1656 — 1742), первым высказавшим гипотезу о периодическом характере кометы и рассчитавшим ее орбиту.

Типичные кометы имеют ядро из загрязненного льда, окруженное облаком пыли и газа, и газо-пылевой хвост, который появляется только при прохождении кометы вблизи Солнца.

Конические сечения

Коническое сечение — это геометрическая фигура, образованная пересечением кругового конуса плоскостью. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, сечение представляет собой окружность. Если секущая плоскость наклонена к оси конуса на угол, превосходящий половину угла при вершине конуса, сечение представляет собой эллипс. Если секущая плоскость параллельна образующей конуса, сечение представляет собой параболу. Если плоскость разрезает обе половины конуса, при пересечении возникают две ветви гиперболы.

См. также:

Эллипс

Парабола

Гипербола

Круговая скорость

Круговая скорость — это скорость, которую должно иметь небесное тело или спутник для того, чтобы оставаться на круговой орбите определенного радиуса (при движении вокруг Солнца или другого небесного тела). Значение круговой скорости можно рассчитать на основе второго закона Ньютона, приравнивая центростремительное ускорение тела, умноженное на его массу, гравитационной силе притяжения, действующей на дви-

жущееся по круговой орбите тело со стороны центрального тела:

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная, M — масса центрального тела, r — радиус круговой орбиты. Второе из приведенных выражений дает круговую скорость спутника Земли. В нем g — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли, R — радиус Земли, r — радиус круговой орбиты. Для данного центрального тела круговая скорость обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса орбиты r . Круговая скорость спутника не зависит от его массы m . Последнее утверждение справедливо при условии $m \ll M$. В противном случае необходимо рассматривать орбитальные движения обоих тел вокруг центра масс системы, а не обращение одного тела вокруг другого.

Оскулирующая орбита

Тело совершает кеплерово движение тогда, когда на него действует единственная сила — центральная ньютоновская сила тяготения. Кеплерово движение замечательно тем, что оно подчиняется очень простым законам (законам Кеплера). Когда имеются возмущающие воздействия (силы тяготения со стороны других тел, отклонения в распределении масс от строгой сферической симметрии и т.п.), уравнения движения становятся неинтегрируемыми. Замечательная простота эллиптических кеплеровых движений пропадает.

Когда возмущающие воздействия малы по сравнению с основной гравитационной силой, кеплерово движение можно принять в качестве нулевого приближения к действительному движению. Можно считать, что малые возмущения приводят к сравнительно медленным изменениям параметров, характеризующих эллиптическую кеплерову орбиту нулевого приближения. Такой эллипс с медленно изменяющимися параметрами, касающийся в данной точке возмущенной траектории (траектории действительного движения), называют *оскулирующей орбитой*. Если представить, что возмущения внезапно исчезли, то все параметры оскулирующего эллипса будут оставаться неизменными в дальнейшем движении, и тело будет двигаться по эллипсу, который касается в данной точке действительной траектории. Такое невозмущенное Кеплерово движение будет очень мало отличаться от действительного движения по крайней мере на протяжении некоторой части оскулирующего эллипса.

Парабола

Парабола представляет собой коническое сечение, которое можно определить также как плоскую кривую, все точки которой удовлетворяют следующему свойству: расстояние от любой точки параболы до фиксированного фокуса равно расстоянию до заданной прямой, называемой директрисой параболы. Кеплерово движение с равной нулю полной энергией происходит по параболе.

См. также:

Конические сечения

Эллипс

Гипербола

Перигей и апогей

Апогей — это точка орбиты Луны или искусственного спутника Земли, которая удалена от Земли на максимальное расстояние. В *перигее* околоземной орбиты тело находится на минимальном расстоянии от Земли.

Перигелий и афелий

Афелий — это точка орбиты планеты, кометы, астероида или искусственного спутника Солнца на околосолнечной орбите, наиболее удаленная от Солнца. В *перигелии* тело на околосолнечной орбите находится на минимальном расстоянии от Солнца.

Сидерический период

Сидерический период — это промежуток времени, на протяжении которого планета (или спутник) совершает один оборот по своей орбите на фоне далеких звезд (т.е. измеренный в системе отсчета звезд)

Синодический период

Синодический период — это средний промежуток времени, который проходит между двумя последовательными одинаковыми конфигурациями некоторой планеты и Солнца при наблюдении с Земли, например, среднее время S между последовательными противостояниями Земли и планеты. Для внутренних планет $1/S = 1/T - 1/E$, где T — сидерический период планеты, E — сидерический период Земли. Для внешних планет $1/S = 1/E - 1/T$.

Скорость освобождения

Скорость освобождения — это минимальная скорость, которую нужно сообщить космическому аппарату, чтобы он смог покинуть гравитационное поле, создаваемое Землей, Луной или другой планетой. Потенциальная энергия тела массы m в центральном поле тяготения, создаваемом небесным телом массы M , равна $-GmM/r$. Чтобы покинуть такое поле тяготения, тело должно иметь кинетическую энергию, превосходящую абсолютную величину $|GmM/r|$ этой потенциальной энергии. Отсюда для тела, находящегося на расстоянии r от силового центра, скорость освобождения равна

$$v_{\text{осв}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}} = \sqrt{2} v_{\text{кр}}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная, M — масса центрального тела, $v_{\text{кр}}$ — круговая скорость для орбиты радиуса r . Поэтому скорость освобождения обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния r от центра небесного тела.

Сфера гравитационного действия

Представление о *сфере гравитационного действия* используется при приближенном решении ограниченной задачи трех тел с помощью метода сопряженных конических сечений. Например, пассивное движение космического аппарата на пути к другой планете

в пределах сферы гравитационного действия Земли можно приближенно рассматривать как геоцентрическое кеплерово движение, почти не возмущенное Солнцем. После того, как аппарат покинет сферу действия Земли, его движение приближенно рассматривается как гелиоцентрическое кеплерово движение. После того, как аппарат войдет в сферу действия планеты-цели, его движение приближенно можно рассматривать как планетоцентрическое кеплерово движение. На границе сферы гравитационного действия обе кеплеровы орбиты (гелиоцентрическая и планетоцентрическая) сопрягаются («сшиваются») путем пересчета координат и скоростей космического аппарата из одной системы отсчета в другую. Полученные при пересчете новые значения координат и скоростей служат начальными условиями для дальнейшего кеплерова движения аппарата в новой системе отсчета.

В качестве границы сферы гравитационного действия планеты относительно Солнца принимается поверхность, на которой отношение возмущающего ускорения к основному ускорению аппарата в планетоцентрическом движении равно соответствующему отношению в гелиоцентрическом движении аппарата.

Ускорение свободного падения

Ускорение свободного падения — это ускорение, испытываемое телом в свободном движении в гравитационном поле (когда поле тяготения — единственная причина, вызывающая ускорение).

В одном и том же гравитационном поле все тела, независимо от их массы, в свободном падении имеют одинаковые ускорения. Ускорение свободного падения не зависит от природы падающего тела. Это свойство установлено на опыте с высокой точностью. Оно свидетельствует о том, что для всех тел инертная масса (масса, которая фигурирует во втором законе Ньютона) строго пропорциональна гравитационной массе (массе, фигурирующей в законе всемирного тяготения). Несмотря на то, что инертная и гравитационная массы тела характеризуют различные свойства этого тела, обе массы оказываются физически эквивалентными и могут быть измерены в одних единицах. Эйнштейн пришел к заключению, что точное совпадение инертной и гравитационной масс не может быть случайным — оно свидетельствует о физической тождественности явлений инерции и гравитации.

Хаос

Хаос — это нерегулярное, на вид беспорядочное поведение, наблюдаемое в физических системах, подчиняющихся строгим детерминистским законам. Планетная динамика дает один из многочисленных примеров хаотического поведения физических систем. Чтобы система могла проявлять хаотическое поведение, она должна описываться нелинейными дифференциальными уравнениями, содержащими несколько переменных. Такие системы могут обнаруживать очень высокую чувствительность к начальным условиям, так что ничтожные различия в начальном состоянии могут привести к драматическим отклонениям в долговременном поведении системы.

Эллипс

Эллипс представляет собой коническое сечение, которое можно определить также как плоскую кривую, все точки которой удовлетворяют следующему свойству: сумма рассто-

яний от любой точки кривой до двух фиксированных точек (называемых фокусами эллипса) постоянна.

Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Величина p называется фокальным параметром конического сечения, а безразмерный параметр e называется эксцентриситетом конического сечения. При $e = 0$ оба фокуса эллипса совпадают, и он превращается в окружность. При $e = 1$ эллипс вырождается в прямолинейный отрезок, соединяющий фокусы.

Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (большая и малая оси). Ограниченная эллипсом часть плоскости имеет площадь πab , где a и b — большая и малая полуоси. Фокусы эллипса находятся на расстоянии ea от его центра.

См. также:

Конические сечения

Парабола

Гипербола

Оглавление

Предисловие	3
Введение	4
Перечень моделирующих программ	5
Как работать с программами	6
Как управлять работой программ	6
Как создавать новые примеры	8
Как распечатать орбиты и траектории	9
I Обзор моделирующих программ	11
1 Моделирование кеплеровых движений	13
1.1 Введение. Немного истории	13
1.2 Задача Кеплера и компьютерное моделирование	17
1.3 Первый закон Кеплера	18
Контрольные вопросы	22
1.4 Второй закон Кеплера	23
Контрольные вопросы	25
1.5 Третий закон Кеплера	25
Контрольные вопросы	31
1.6 Приближенный характер законов Кеплера	32
Контрольные вопросы	34
2 Годограф вектора скорости	35
2.1 Годограф скорости для замкнутых орбит	35
2.2 Годограф скорости для открытых орбит	37
Контрольные вопросы	39
3 Баллистические снаряды и спутники	41
3.1 Как моделировать запуски спутников	42
3.2 Семейства кеплеровых орбит	45
3.2.1 Различные направления начальных скоростей	46
3.2.2 Равные по модулю начальные скорости	49
3.2.3 Разные по модулю начальные скорости	52
Контрольные вопросы	53
3.3 Орбита спутника в атмосфере	55
3.4 Аэродинамический парадокс спутника	57

4	Маневрирование на орбитах	61
4.1	Введение: импульсные орбитальные маневры	61
4.2	Как выполнять активные маневры	62
4.3	Космические полеты и маневрирование	65
4.3.1	Планирование космических полетов	66
4.3.2	Возвращение из космоса на Землю	66
	Контрольные вопросы	70
4.4	Относительное движение на орбитах	71
4.4.1	Движение небольшого предмета, брошенного с орбитальной станции	71
4.4.2	Численные оценки размеров траектории относительного движения	73
4.4.3	Замкнутая траектория относительного движения	76
4.4.4	Вековая составляющая относительного движения	77
4.5	Космический зонд	79
4.5.1	Семейство внутренних резонансных орбит	80
4.5.2	Семейство внешних резонансных орбит	83
4.5.3	Космический зонд с радиальным направлением дополнительной скорости	85
4.6	В противоположную точку орбиты	87
4.7	Переходы между орбитами и межпланетные перелеты	89
	Контрольные вопросы	91
5	Прецессия экваториальной орбиты спутника	93
5.1	Сила тяготения в экваториальной плоскости	94
5.2	Спутник планеты с осевым сжатием	94
5.3	Спутник планеты с осевым растяжением	97
	Контрольные вопросы	100
6	Двойная звезда – задача двух тел	101
	Контрольные вопросы	106
7	Планета со спутником – задача трех тел	109
7.1	Введение: ограниченная задача трех тел	109
7.2	Планета со спутником — обзор	110
7.3	Как работать с программой «Планета со спутником»	110
7.4	Возмущения в движении спутников планеты	112
7.5	Планета со спутником – примеры моделирования	114
7.5.1	Спутник на низкой почти круговой орбите	114
7.5.2	«Космический баскетбол»	115
7.5.3	Спутник с ретроградным обращением	116
7.6	Точные частные решения задачи трех тел	117
7.6.1	Простое точное решение задачи трех тел	117
7.6.2	Спутники в треугольных точках либрации	119
7.6.3	Коллинеарные точки либрации	121
7.6.4	Точки либрации и эллиптические движения	124
	Контрольные вопросы	127
7.7	Полет над обратной стороной Луны	127
7.8	Лунные возмущения орбиты спутника	130
7.9	К удаленной планете и обратно	131
7.10	Кометы – межпланетные странники	135

8	Двойная звезда с планетой	139
8.1	Как работать с программой «Двойная звезда с планетой»	139
8.2	Примеры сложных движений	141
	Контрольные вопросы	144
9	Система планет — задача многих тел	147
9.1	Как работать с программой «Система планет»	147
9.1.1	Управление программой	148
9.1.2	Самостоятельное моделирование системы многих тел	149
9.1.3	Как создавать и сохранять новые примеры	150
9.2	Модель Солнечной системы	151
9.2.1	Кинематика верхних (внешних) планет	151
9.2.2	Кинематика нижних (внутренних) планет	154
9.3	Гипотетические планетные системы	155
9.3.1	Двойная планета на орбите вокруг звезды	155
9.3.2	Встречи планетных систем — космические катастрофы	156
9.4	Кратные звезды	159
9.5	Точные решения задачи многих тел	161
9.5.1	Звезда с двумя одинаковыми планетами	162
9.5.2	«Хоровод» одинаковых «планет»	164
9.5.3	Равносторонние конфигурации идентичных тел (правильный многоугольник) в отсутствие центрального тела	165
9.5.4	Равносторонние конфигурации трех тел произвольных масс	167
9.5.5	Великолепная «восьмерка»	169
	Контрольные вопросы	171
II	Теоретические основы моделируемых явлений	173
10	Закономерности кеплеровых движений	175
10.1	Введение	175
10.2	Закон всемирного тяготения	177
10.3	Потенциальная энергия тела в поле тяготения	178
10.4	Круговая скорость и скорость освобождения	179
10.5	Геометрия кеплеровых орбит	180
10.6	Параметры кеплеровых орбит	181
11	Законы динамики и кеплеровы движения	185
11.1	Момент импульса и секториальная скорость	185
11.2	Аналитический вывод 1-го закона Кеплера	187
11.3	Третий закон Кеплера	191
11.4	Годограф вектора скорости	193
11.4.1	Геометрическое доказательство круговой формы годографа	193
11.4.2	Аналитический вывод круговой формы годографа	195
11.5	Альтернативный вывод годографа скорости	198

12	Огибающая эллиптических орбит равных энергий	201
12.1	Огибающая траекторий баллистических снарядов	201
12.2	Семейство эллиптических орбит	202
12.3	Форма огибающей поверхности	204
12.4	Полезные применения огибающей поверхности	208
12.4.1	В цель на экваторе с Северного полюса	209
12.4.2	Цели в северном и южном полушариях	211
12.5	Огибающая семейства параболических траекторий	212
13	Механика космического полета	215
13.1	Активное маневрирование — возвращение с орбиты на Землю	215
13.2	Орбита с требуемым периодом обращения	217
13.2.1	Космический зонд с тангенциальным направлением дополнительной скорости	218
13.2.2	Космический зонд с радиальным направлением дополнительной скорости	219
13.3	Уравнения относительного движения	220
13.4	Рандеву в космосе	223
14	Планета с осевой симметрией	229
14.1	Прецессия эллиптической орбиты	229
14.2	Поле тяготения искаженной планеты	231
14.2.1	Поле тяготения «вытянутой» вдоль оси планеты	231
14.2.2	Поле тяготения «сплюснутой» вдоль оси планеты	232
15	Задача двух и многих тел	235
15.1	Задача двух тел	235
15.2	Точные решения задачи трех тел	238
15.2.1	Треугольные точки либрации	238
15.2.2	Коллинеарные точки либрации	240
15.3	Неограниченная задача трех тел	242
15.3.1	Коллинеарная конфигурация	243
15.3.2	Равносторонняя треугольная конфигурация	244
15.4	Сфера действия планеты	246
16	Океанские приливы в компьютерных моделях	251
16.1	Введение: происхождение приливов	251
16.2	Приливообразующие силы: элементарный подход	253
16.3	Приливные силы вблизи поверхности Земли	256
16.4	Составляющие приливных сил	257
16.4.1	Статическая деформация поверхности мирового океана	260
16.4.2	Потенциальная функция для приливных сил	260
16.4.3	Приливообразующие силы на вращающейся Земле	262
16.5	Динамическая теория приливов	265
16.5.1	Собственные колебания воды в опоясывающем земной шар канале	265
16.5.2	Приливы как вынужденные колебания воды в опоясывающем земной шар канале	266
16.5.3	Математическое описание вынужденных колебаний океана	268
16.5.4	Лунные и солнечные приливы	270

<i>ОГЛАВЛЕНИЕ</i>	303
16.5.5 За рамками модели — сложности реальной картины	270
16.5.6 Эволюция движений небесных тел под действием сил приливного трения	271
16.5.7 Предел Роша	275
Задания для самостоятельной работы	277
Вопросы для дальнейшего размышления	277
Задачи для самостоятельного решения	278
Рекомендуемая литература	290
Глоссарий	291