Комментарии к лекциям по физике

Тема: Преобразования Лоренца и следствия из них

Содержание лекции

Преобразования Лоренца. Кинематические следствия преобразований Лоренца. Релятивистский закон преобразования скорости. Относительная скорость и скорость сближения. Аберрация света.

Преобразования Лоренца

Релятивистский закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой получим здесь из формул преобразования промежутков времени и пространственных расстояний, которые были выведены в лекции 7 непосредственно из постулатов теории относительности. Релятивистские преобразования координат и времени события должны заменить преобразования Галилея (см. лекцию 6), основанные на классических представлениях об абсолютном характере промежутков времени и пространственных расстояний.

Рассмотрим описание некоторого события A в двух инерциальных системах отсчета K и K', считая, как и прежде, что система K' движется относительно K в положительном направлении оси Ox со скоростью v, и что в момент времени $t = 0$ начала координат систем отсчета K и K' совпадают. Пусть координаты и время события A в системе K есть x, y, z и t, а в системе K' — соответственно x', y', z' и t' (рис. 1).

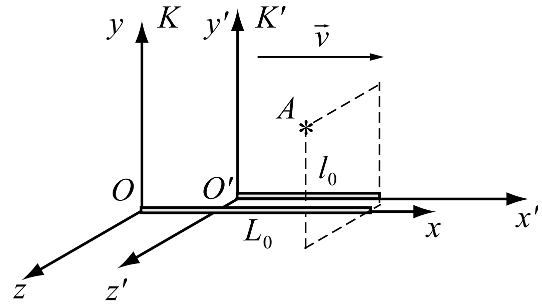

Рис. 1: К выводу преобразований Лоренца

Расстояния в направлениях, перпендикулярных к относительной скорости $\vec{v}$ систем отсчета одинаковы в K и в K', поэтому $y = y'$ и $z = z'$. Чтобы выразить координату x события A через x' и t', расположим мысленно жесткий стержень вдоль оси Ox от начала координат до точки x. Очевидно, что координата x события A есть просто собственная длина этого стержня. Обозначим ее через L_0. Длина L этого же стержня в системе отсчета K', относительно которой стержень движется со скоростью $-v$, в соответствии с релятивистской формулой преобразования длины (см. лекцию 7), дается выражением $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$. С точки зрения наблюдателя в K', длину стержня L можно представить как сумму расстояния vt' между точками O и O' в момент времени t', когда по его часам происходит событие A, и координаты x' события A (см. рис. 1). Таким образом, $L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = x' + vt'$. Учитывая, что $L_0 = x$, получаем отсюда следующую формулу, выражающую координату x события A в системе K через координату x' и время t' этого же события в системе отсчета K':

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1}$$

Чтобы получить недостающую формулу для момента времени t через x' и t', мысленно расположим теперь жесткий стержень в системе K' протяженностью от начала координат O' до точки x'. Очевидно, что координата x' события A есть как раз собственная длина этого стержня. Обозначим ее l_0. Относительно системы K этот стержень движется (вместе с системой K') со скоростью v, и его длина l в K равна $l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$, т. е. $x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Теперь наблюдатель в K может представить координату x события A как сумму расстояния $OO' = vt$ между точками O и O' в момент времени t, когда по его часам происходит событие A, и длины стержня $l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Так как $l_0 = x'$, получаем $x = vt + x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Выразим здесь x через x' и t' с помощью (1). В результате после простых преобразований получаем окончательное выражение для t через x' и t':

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) дают искомый закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они носят название *преобразований Лоренца*. Выпишем их еще раз вместе:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3}$$

Обратные преобразования от системы K к K' можно получить, разрешая уравнения (3) относительно x' и t':

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4}$$

Разумеется, обратные преобразования Лоренца (4) отличаются от прямых (3) лишь заменой $v \to -v$ в полном соответствии с принципом относительности, утверждающим равноправие систем отсчета K и K'.

Если относительная скорость v систем отсчета K и K' много меньше скорости света c, преобразования Лоренца (3), как легко проверить, переходят в преобразования Галилея (см. лекцию 6). Это означает, что теория относительности не отвергает преобразования Галилея как неправильные, а включает их в правильные преобразования — преобразования Лоренца — как *предельный случай*, справедливый при относительных скоростях систем отсчета K и K', малых по сравнению со скоростью света (при $v \ll c$). Иными словами, теория относительности не отвергает классические представления о пространстве и времени и опирающуюся на эти представления классическую (нерелятивистскую) физику, а устанавливает *границы применимости* нерелятивистских представлений.

Следствия преобразований Лоренца

Покажем, как из формул преобразований Лоренца можно увидеть относительность одновременности событий (т. е. относительный характер синхронизации часов). Рассмотрим совокупность событий, одновременных с точки зрения системы отсчета K, но происходящих в разных точках оси x. Пусть, например, эти события заключаются в прохождении через нулевое деление стрелок разных часов, неподвижных и предварительно синхронизированных в системе отсчета K (рис. 2, a).

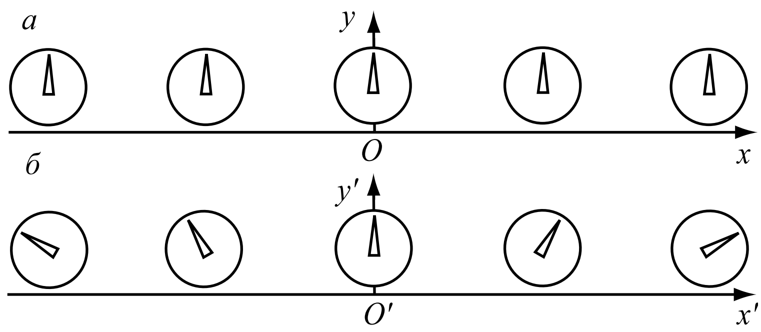

Рис. 2: Относительность синхронизации часов

Поставим вопрос: какими будут показания этих часов с точки зрения наблюдателя в системе отсчета K' в один и тот же момент времени $t' = 0$? Подчеркнем, что речь теперь идет о событиях, одновременных в системе отсчета K'. Подставляя $t' = 0$ в последнюю из формул (3) преобразований Лоренца, находим, что одновременным с точки зрения системы K' событиям, происходящим в разных точках оси x', соответствуют не совпадающие моменты времени в системе отсчета K:

$$t = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, x'. \tag{5}$$

С точки зрения наблюдателя в системе отсчета K' стрелки только тех часов (неподвижных в системе отсчета K), что находятся в начале координат (т. е. при $x' = 0$), показывают в момент $t' = 0$ на нулевое деление $t = 0$. Показания всех остальных часов, в соответствии с (5), будут различаться в зависимости от координаты x', указывающей их положение на оси x' в этот момент времени $t' = 0$ (см. рис. 2, *б*). В этом проявляется относительный характер одновременности событий и синхронизации часов: неподвижные и синхронизированные в системе отсчета K часы с точки зрения наблюдателя в другой системе отсчета K' (относительно которого все эти часы движутся) уже не будут синхронизированными.

Из преобразований Лоренца (3) следует релятивистский закон преобразования скорости частицы. Пусть радиус-вектор $\vec{r}(t)$ задает положение движущейся частицы в момент времени t в системе K, а $\vec{r}\,'(t')$ — положение той же частицы в системе

K' в момент времени t'. Тогда $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ — скорость этой частицы относительно системы K, а $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$ — скорость той же частицы относительно системы отсчета K'. Рассматривая движение частицы как непрерывную последовательность событий, можно найти связь между проекциями вектора скорости $\vec{u}$ и $\vec{u}'$ в двух системах отсчета следующим образом:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'}\frac{1}{(dt/dt')}. \tag{6}$$

Производные $d\vec{r}/dt'$ и dt/dt' в правой части (6) найдем с помощью преобразований Лоренца (3). При дифференцировании нужно принимать во внимание то, что $\vec{r}(t)$ и t зависят от t' не только явно, но и через $\vec{r}'(t')$. В результате получаем:

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right), \quad \frac{dy}{dt'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad \frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'}, \tag{7}$$

и, наконец,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right). \tag{8}$$

Подставляя выражения (7) и (8) в (6), получаем искомый релятивистский закон преобразования скорости частицы:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \tag{9}$$

В предельном случае медленных движений, когда и скорость частицы, и относительная скорость двух систем отсчета много меньше скорости света (т. е. при $v \ll c$, $|u'_x| \ll c$) выражения (9) переходят в классические формулы преобразования скорости, вытекающие из преобразований Галилея. Отметим, что релятивистский закон преобразования скорости частицы (9) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой отнюдь не сводится к векторному сложению относительной ($\vec{u}'$) и переносной ($\vec{v}$) скоростей. Впрочем, это не означает, что в релятивистской механике скорость частицы вообще нельзя рассматривать как векторную величину: при разложении на составляющие в рамках какой-либо одной системы отсчета скорость ведет себя как обычный вектор, т. е. полная скорость равна векторной сумме скоростей отдельных движений, на которые мы разлагаем движение частицы.

Формулы для обратного преобразования скорости при переходе от системы отсчета K к K' можно получить из (9) изменением знака скорости v одной системы отсчета относительно другой:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \tag{10}$$

Релятивистский закон преобразования скорости согласуется, разумеется, с исходным постулатом об абсолютном характере предельной скорости (скорости света c). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, световой импульс, распространяющийся вдоль оси Ox' со скоростью c относительно системы отсчета K'.

Чтобы найти его скорость относительно системы отсчета K, в формулах (9) положим $u'_x = c$. При этом первая из формул (9) дает

$$u_x = \frac{c+v}{1+v/c} = c,$$

т. е. световой импульс и относительно системы отсчета K распространяется с той же предельной скоростью c.

Закон преобразования скорости (9) находится также в полном соответствии с тем, что скорость c ставит предел достижимым скоростям движения материальных тел: никакая материальная частица ни в какой системе отсчета не может иметь скорость, превышающую скорость света c. Покажем это. Рассмотрим для определенности частицу, движущуюся вдоль оси Ox'. Ее скорость u' относительно системы отсчета K' меньше скорости света: $u' < c$. Тогда из формул (9) следует, что и в системе отсчета K, относительно которой K' движется со скоростью v, сколь угодно близкой к скорости света (но, разумеется, $v < c$), скорость частицы всегда будет меньше скорости света: $u < c$. В самом деле, в этом случае (9) сводится к выражению

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2}, \tag{11}$$

из которого в результате простых преобразований получаем:

$$u - c = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} - c = \frac{(u'-c)(1-v/c)}{1+u'v/c^2} < 0.$$

Отсюда следует, что даже при сколь угодно большой относительной скорости v (но $v < c$) скорость частицы в системе отсчета K будет меньше скорости света: $u < c$ (так как $u' < c$). Например, если частица движется относительно системы отсчета K' со скоростью $u' = \frac{3}{4}c$, а система отсчета K' с такой же скоростью $v = \frac{3}{4}c$ относительно системы отсчета K, то, в соответствии с (11), эта частица движется относительно системы отсчета K со скоростью $u = \frac{3}{2}c/(1+\frac{9}{16}) = \frac{24}{25}c$.

Рассмотрим мысленный опыт, в котором покоящаяся радиоактивная частица распадается на два одинаковых осколка, разлетающихся с большими скоростями. Из сохранения импульса следует, что относительно лаборатории скорости осколков одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны (рис. 3). Пусть, например, эти скорости равны 3/4 скорости света. С какой скоростью разлетаются осколки?

Если *скоростью разлета* осколков в лабораторной системе отсчета называть величину $u = dl/dt$, где $l(t)$ — расстояние между осколками, измеренное в лабораторной системе отсчета,то при скоростях самих осколков $v = \frac{3}{4}c$ для скорости разлета получим значение $u = 2v = \frac{3}{2}c$, в полтора раза превышающее скорость света. Противоречит ли такое заключение постулату теории относительности о пределе $c = 3 \cdot 10^8$ м/с для скоростей любых движений?

В действительности этот постулат теории относительности утверждает лишь невозможность передачи *сигнала*, какого бы то ни было *воздействия*, какой-либо *информации* со скоростью, превышающей скорость света. Ясно, что введенная выше скорость разлета осколков, измеряемая в лабораторной системе отсчета, не имеет отношения к передаче сигналов.

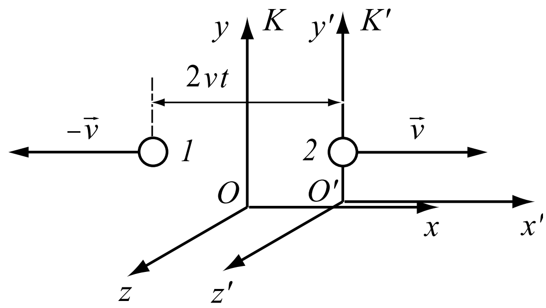

Рис. 3: Движение одинаковых осколков относительно лаборатории.

Другое дело, если говорить о скорости, с которой любой из осколков движется относительно другого, т. е. о величине, которую можно назвать *относительной скоростью* разлетающихся осколков. Скорость одной частицы относительно другой должна удовлетворять релятивистским постулатам и поэтому не может превышать скорость света. Чтобы найти относительную скорость, нужно перейти из лабораторной системы отсчета (пусть это будет система K), где скорости осколков *1* и *2* равны $-\vec{v}$ и $\vec{v}$ соответственно, в систему отсчета, связанную с одним из осколков, например, в систему отсчета K', связанную с осколком *2* (см. рис. 3). Относительно K' скорость второго осколка $v'_2 = 0$, а для нахождения скорости осколка *1* (т. е. величины v'_1) нужно обратиться к первой из формул (10), подставив в нее $u_x = -v$ (скорость осколка *1* относительно K). В результате получаем $v'_1 = -2v/(1 + v^2/c^2) = -\frac{24}{25}c$ (при $v = \frac{3}{4}c$) — относительная скорость разлетающихся частиц меньше скорости света, в полном согласии с постулатами теории относительности.

Понятие относительной скорости можно, разумеется, применять не только к частицам, но и к системам отсчета. Введем кроме системы K', движущейся относительно K со скоростью v_1, еще одну систему отсчета K'', которая движется относительно K' со скоростью v_2. Можно показать (см., например, задачу 737 в [5]), что результат последовательно выполненных преобразований Лоренца (3) для координат и времени некоторого события сначала от K к K', а затем от K' к K'' эквивалентен одному преобразованию Лоренца непосредственно от системы K к K'', причем относительная скорость v систем K'' и K выражается через v_1 и v_2 следующим соотношением, соответствующим релятивистскому закону преобразования скорости (9):

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}. \qquad (12)$$

Результат такого сложения относительных скоростей никогда не превышает скорости света c.

Рекомендуемая литература:
[1], стр. 366–376.
[2], стр. 519–529.
[3], стр. 28–31.
[4], стр. 26–34.

По материалу данного раздела рекомендуется решить следующие задачи из [5]: 730, 733, 734, 737, 739, 740, 741, 742 .

Список литературы

[1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.

[2] Стрелков С.П. Механика. М., «Наука», 1975.

[3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 2 (пространство, время, движение). М., «Мир», 1966.

[4] Бутиков Е. И. Релятивистские представления в курсе общей физики. Спб, 2006.

[5] Сборник задач по общему курсу физики. Механика (под ред. Яковлева И.А.). Изд. 4-е, М., «Наука», 1977.