Комментарии к лекциям по физике

Тема: Параметрическое возбуждение колебаний

Содержание

Вынужденные и параметрические колебания. Особенности параметрического резонанса. Энергетические превращения. Порог резонанса и параметрическая регенерация. Частотные интервалы параметрической неустойчивости.

О классификации колебаний

В соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу их возбуждения колебания называют *вынужденными*, если осциллятор подвержен периодическому внешнему воздействию, влияние которого в дифференциальном уравнении осциллятора можно выразить отдельным членом, имеющим вид заданной периодической функции времени. Более сложен для изучения случай параметрического возбуждения колебаний, когда внешнее воздействие выражается в периодическом изменении (модуляции) какого-либо параметра системы. Пусть, например, при отклонении от положения равновесия возникает восстанавливающая сила $F = -kx$, но в отличие от стационарного случая параметр k в результате какого-либо периодического воздействия изменяется со временем: $k = k(t)$. В дифференциальном уравнении такой системы,

$$m\ddot{x} = -k(t)x, \tag{1}$$

коэффициент при x не постоянен: он явно зависит от времени. Колебания в такой системе существенно отличаются как от собственных колебаний в системе, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами, так и от вынужденных колебаний под действием внешней силы, зависящей только от времени.

В случае периодического изменения параметра k, когда $k(t + T) = k(t)$, где T — период, дифференциальное уравнение (1) называется *уравнением Хилла*. Колебания в системе, описываемой уравнением Хилла, называются параметрически возбуждаемыми или просто *параметрическими*. Когда колебательный процесс, вызываемый периодической модуляцией какого-либо параметра, принимает нарастающий характер, говорят о *параметрическом резонансе*. В случае параметрического резонанса состояние равновесия системы становится неустойчивым и уход из него имеет характер колебаний с прогрессивно растущей амплитудой.

Широко известный пример параметрического резонанса — раскачивание на качелях, когда размах колебаний нарастает при периодических приседаниях и выпрямлениях ног качающегося. Здесь по сути дела происходит периодическое изменение момента инерции (а тем самым и приведенной длины) физического маятника, каковым являются качели вместе с находящимся на них человеком.

Параметрическое возбуждение возможно в любых колебательных системах. Например, в колебательном LCR-контуре из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора можно возбудить колебания, изменяя емкость конденсатора периодическим сближением и разведением его пластин, либо изменяя индуктивность катушки периодическим вдвиганием и выдвиганием сердечника. Наиболее интенсивные колебания возбуждаются в том случае, когда цикл таких изменений повторяется два раза за один период собственных колебаний в контуре, т. е. когда частота модуляции параметра вдвое превышает собственную частоту системы.

Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров системы (емкости C или индуктивности L в случае колебательного контура, жесткости пружины или инертности ротора в случае механического осциллятора). Модуляция сопротивления R или коэффициента затухания может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может привести к их нарастанию.

Особенности параметрического резонанса

По ряду признаков параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса, вызываемого прямым силовым воздействием на колебательную систему. Параметрический резонанс наступает при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра и собственной частотой возбуждаемой системы, отличных от характерного для обычного резонанса соотношения между частотой внешнего воздействия и собственной частотой системы. Параметрический резонанс, в отличие от обычного резонанса, представляет собой *пороговый эффект*, так как при наличии трения он возможен лишь при достаточно большой амплитуде изменения параметра, превосходящей некоторое пороговое значение.

Далее параметрическое возбуждение рассматривается на примере крутильных колебаний механического торсионного пружинного осциллятора. Возбуждение колебаний обеспечивается периодическими изменениями (модуляцией) момента инерции ротора (маховика) пружинного осциллятора. Схематическое изображение торсионного осциллятора показано на рис. 1. Ротор осциллятора представляет собой стержень с двумя одинаковыми грузами, который может поворачиваться вокруг оси, проходящей через его середину. При повороте ротора прикрепленная к нему спиральная пружина создает восстанавливающий момент, пропорциональный углу закручивания. Второй конец пружины закреплен неподвижно. В положении равновесия стержень ротора одним из своих концов указывает на нулевое деление шкалы.

Грузы ротора можно одновременно сдвигать вдоль стержня в противоположных направлениях так, что центр масс системы остается на оси вращения. При таком смещении грузов изменяется момент инерции ротора: момент инерции возрастает при раздвигании грузов (при удалении от оси вращения) и убывает при их приближении к оси. Изменение момента инерции ротора приводит к изменению частоты собственных крутильных колебаний осциллятора. Принудительными периодическими перемещениями грузов вдоль стержня туда и обратно создается модуляция момента инерции, необходимая для параметрического возбуждения крутильных колебаний осциллятора. В данной модели предполагается модуляция момента инерции по прямоугольному кусочно-постоянному закону, когда перемещения грузов вдоль стержня происходят скачкообразно. Вызванные смещениями грузов резкие, почти мгновенные увеличения и уменьшения момента инерции происходят

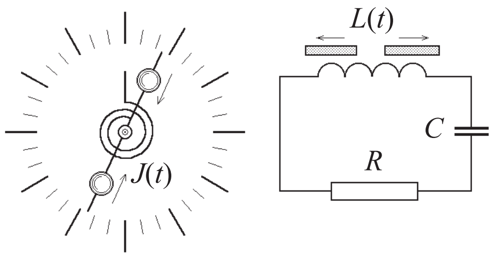


Рис. 1: Схематическое изображение торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью.

поочередно через равные промежутки времени. Обозначим эти промежутки через $T/2$, так что T — это полный период изменений момента инерции (*период модуляции*).

Такие принудительные изменения параметра, описываемые прямоугольной зависимостью от времени, могут вызвать заметное раскачивание ротора при условии, что период модуляции выбран должным образом. Предположим, например, что грузы приближаются к оси ротора в момент, когда ротор проходит через положение равновесия и имеет почти максимальную угловую скорость. При скачкообразном радиальном смещении грузов момент импульса ротора остается прежним. Поэтому результирующее уменьшение момента инерции сопровождается увеличением угловой скорости ротора, и ротор получает дополнительную энергию. Чем больше была угловая скорость ротора, тем значительнее возрастание его кинетической энергии. Эта дополнительная энергия поставляется источником, вызывающим модуляцию параметра, т. е. принудительные радиальные перемещения грузов вдоль стержня.

С другой стороны, когда грузы мгновенно раздвигаются в стороны от оси вращающегося ротора, угловая скорость вращения ротора и его кинетическая энергия уменьшаются. При этом энергия передается назад от ротора источнику модуляции. Чтобы приращения энергии происходили регулярно и в целом превышали энергию, возвращаемую источнику, систематически «подпитывая» ротор энергией, период и фаза модуляции момента инерции должны удовлетворять определенным условиям.

Пусть, например, грузы сдвигаются к оси вращения и затем раздвигаются в прежние положения дважды на протяжении одного среднего периода собственных колебаний. Пусть также грузы придвигаются к оси вращения в моменты, когда угловая скорость ротора максимальна. Тогда их возвращение в прежние положения придется на момент почти максимального отклонения от равновесия, когда угловая скорость ротора близка к нулю. Такие фазовые соотношения выполняются для колебаний, графики которых показаны на рис. 2.

Напомним, что угловая скорость ротора возрастает при сближении грузов и убывает при их раздвижении, и эти изменения скорости пропорциональны самой скорости. Но поскольку в момент раздвижения грузов угловая скорость ротора близка к нулю, такое раздвижение не вызывает практически никакого изменения угловой скорости и кинетической энергии ротора. Таким образом, модуляция момента инерции с периодом, вдвое меньшим собственного среднего периода осциллятора, приводит к максимально возможному росту амплитуды при условии, что фаза модуляции выбрана так, как описано выше.

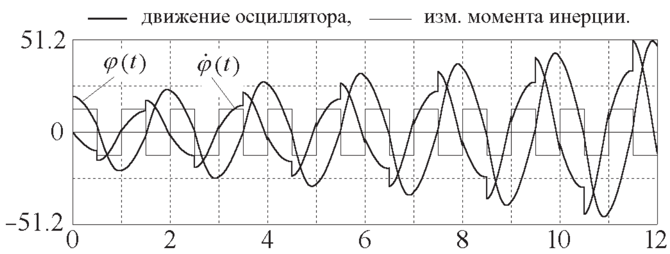


Рис. 2: Графики угла отклонения и угловой скорости при параметрическом возбуждении колебаний модуляцией момента инерции по кусочно-постоянному закону.

Очевидно, что эффективный рост энергии осциллятора возможен не только тогда, когда два полных цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний, но также когда два цикла модуляции происходят на протяжении трех, пяти или другого нечетного числа периодов собственных колебаний.

Ниже будет показано, что возрастание энергии осциллятора, хотя и менее значительное, может происходить и тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на протяжении четного числа периодов собственных колебаний.

Если принудительные изменения параметра совершаются с указанной выше периодичностью, но не скачкообразно, их влияние на осциллятор качественно оказывается аналогичным, хотя эффективность вложения энергии (при той же амплитуде модуляции параметра) максимальна при модуляции по прямоугольному закону, потому что именно такой закон модуляции может обеспечить наиболее оптимальные условия передачи энергии осциллятору. Случай плавной (синусоидальной) модуляции параметра важен для практических приложений.

Ниже мы рассмотрим более строгий математический подход к описанию параметрического резонанса, вызываемого кусочно-постоянной модуляцией параметра по прямоугольному закону.

Порог параметрического возбуждения

Для оценки глубины модуляции, соответствующей порогу параметрического возбуждения, можно воспользоваться соображениями, основанными на законе сохранения энергии. Прежде всего рассчитаем приращение кинетической энергии ротора, происходящее при скачкообразном смещении грузов в направлении оси вращения, когда момент инерции ротора уменьшается от значения $J_1 = J_0(1+m)$ до $J_2 = J_0(1-m)$. Ограничимся случаем малых значений глубины модуляции m ($m \ll 1$). При радиальном смещении грузов момент импульса ротора $L = J\omega = J\dot\varphi$ остается неизменным: $J_1\dot\varphi_1 = J_2\dot\varphi_2$, откуда для отношения угловых скоростей до и после изменения момента инерции получаем $\dot\varphi_2/\dot\varphi_1 = J_1/J_2 = (1+m)/(1-m)$. Для происходящего при этом приращения ΔE кинетической энергии ротора $E_{\rm kin} = J\dot\varphi^2/2 = L^2/2J$ можно написать:

$$\Delta E = \frac{L^2}{2J_0}\left(\frac{1}{1-m} - \frac{1}{1+m}\right) \approx 2mE_{\text{kin}} \quad (\text{для } m \ll 1). \tag{2}$$

Когда такое событие происходит вблизи положения равновесия ротора, т. е. в момент, когда полная энергия осциллятора E практически совпадает с кинетической энергией ротора E_{kin}, из выражения (2) следует, что относительное приращение полной энергии $\Delta E/E$ при однократном сближении грузов примерно равно удвоенному значению глубины модуляции m: $\Delta E/E \approx 2m$.

Если период и фаза модуляции имеют те значения, что наиболее благоприятны для эффективной передачи энергии осциллятору, скачкообразное смещение грузов назад к концам стержня происходит в тот момент, когда ротор находится в положении наибольшего отклонения (точнее, очень близок к этому положению). В этот момент угловая скорость и кинетическая энергия ротора имеют почти нулевые значения, и поэтому обратное радиальное смещение грузов в прежние положения к концам стержня почти не приводит к уменьшению энергии осциллятора.

В случае основного параметрического резонанса (резонанса 1-го порядка $n = 1$) вложение энергии происходит дважды на протяжении одного периода T_0 собственных колебаний. Таким образом, относительное приращение энергии $\Delta E/E$ за один период колебаний составляет приблизительно $4m$. Процесс, в котором приращение энергии ΔE за период пропорционально запасенной энергии E ($\Delta E \approx 4mE$), характеризуется экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t). \tag{3}$$

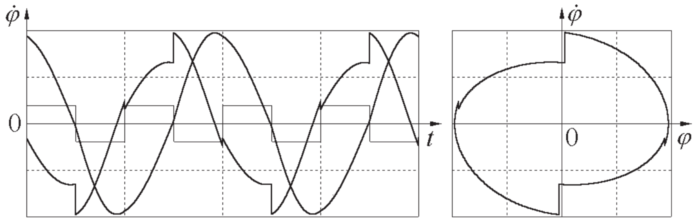
В данном случае показатель роста α пропорционален глубине модуляции m момента инерции: $\alpha = 4m/T_0$. В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс ($T = T_0/2$) уменьшение энергии осциллятора происходит главным образом из-за трения. Рассеяние энергии при линейном (пропорциональном скорости) трении дается следующим выражением (см. комментарии к теме «Собственные колебания линейного осциллятора»):

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \tag{4}$$

Для относительного уменьшения $\Delta E/E$ механической энергии из-за трения за промежуток времени, равный целому числу периодов колебаний, выражение (4) дает $\Delta E/E \approx -2\gamma t$. Приравнивая найденное выше относительное увеличение энергии $4m$ за период, вызванное прямоугольной модуляцией момента инерции, относительному уменьшению энергии из-за трения $2\gamma T_0$, получаем следующее пороговое (минимальное) значение $m_{\min}$ глубины модуляции, соответствующее основному ($n = 1$) параметрическому резонансу:

$$m_{\min} = \gamma T_0/2 = \pi/(2Q). \tag{5}$$

График угловой скорости и фазовая траектория колебаний, происходящих в условиях порога параметрического возбуждения, приведены на рис. (3). Такой режим стационарных колебаний, амплитуда которых остается неизменной несмотря на диссипацию энергии, называется *параметрической регенерацией*. Стационарный характер колебаний оказывается возможным благодаря тому, что потери



(период модуляции 0.5, глубина модуляции 20.0%, добротность 8.29,
нач. отклонение 20.0 град., нач. угловая скорость −0.07)

Рис. 3: Графики и фазовая траектория стационарных колебаний в условиях порога $m = \pi/2Q$ при $T \approx T_0/2$.

энергии из-за трения в среднем компенсируются поступлением энергии от источника, который приводит в движение грузы вдоль стержня, обеспечивая периодическую модуляцию момента инерции ротора.

Для резонанса третьего порядка, когда $T = 3T_0/2$, пороговое значение глубины модуляции в три раза больше, чем для основного резонанса: $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$. В этом случае два цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех полных периодов собственных колебаний. Радиальные перемещения грузов вдоль стержня ротора здесь также происходят в моменты, наиболее благоприятные для передачи энергии осциллятору, поэтому то же самое вложение энергии происходит в течение втрое большего интервала времени, чем в случае основного резонанса.

Если глубина модуляции превосходит пороговое значение, энергия осциллятора растет со временем экспоненциально. Рост энергии и здесь описывается уравнением (3). Однако теперь показатель скорости роста энергии α определяется превышением энергии, сообщаемой осциллятору благодаря модуляции параметра, над потерями энергии из-за трения за то же время: $\alpha = 4m/T_0 - 2\gamma$. Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний тоже экспоненциально растет со временем: $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$. Показатель β скорости роста амплитуды равен половине показателя скорости роста энергии. В условиях основного резонанса, когда вложения энергии происходят дважды на протяжении периода собственных колебаний, для показателя скорости роста амплитуды получаем $\beta = 2m/T_0 - \gamma = m\omega_0/\pi - \gamma$.

Графики экспоненциального роста колебаний в условиях основного резонанса показаны на рис. 2 на стр. 4, а также на рис. 4 вместе с фазовой траекторией. Затухающим собственным колебаниям на интервалах постоянства момента инерции соответствуют участки фазовой траектории в виде отрезков спиралей, скручивающихся к фокусу. Вертикальные сегменты соответствуют скачкообразным изменениям угловой скорости в моменты радиальных смещений грузов ротора. В совокупности образуется раскручивающаяся фазовая траектория, соответствующая нарастающим колебаниям.

Дифференциальное уравнение параметрических колебаний

Допустим, что периодические изменения момента инерции ротора J происходят по прямоугольному кусочно-постоянному закону. Пусть максимальное и мини-

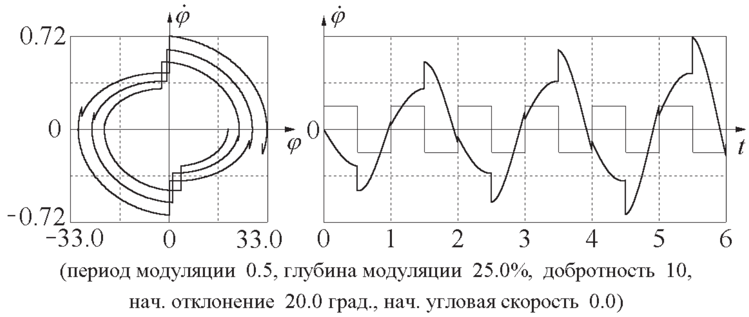


Рис. 4: Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в условиях основного параметрического резонанса ($n = 1$).

мальное значения момента инерции равны соответственно $J_1 = J_0(1+m)$ и $J_1 = J_0(1-m)$, где J_0 — значение момента инерции при некотором среднем положении грузов на стержне, а m — глубина модуляции. На протяжении интервалов времени $(0,\ T/2)$ и $(T/2,\ T)$ значение момента инерции постоянно, и движение ротора может рассматриваться как свободное колебание, описываемое линейным дифференциальным уравнением. Однако коэффициенты в этом уравнении различны для соседних интервалов времени $(0,\ T/2)$ и $(T/2,\ T)$:

$$\ddot\varphi = -\frac{1}{1+m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot\varphi) \qquad \text{для} \quad 0 < t < T/2, \tag{6}$$

$$\ddot\varphi = -\frac{1}{1-m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot\varphi) \qquad \text{для} \quad T/2 < t < T. \tag{7}$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{D/J_0}$ — собственная частота осциллятора, а γ — постоянная затухания, характеризующая интенсивность вязкого трения в системе. Обе эти величины относятся к среднему значению момента инерции $J_0 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)$. Для малых и умеренных значений m момент инерции равен J_0, когда грузы находятся приблизительно на полпути между их крайними положениями на стержне ротора. При больших m это не так, потому что момент инерции определяется квадратом расстояния грузов от оси вращения ротора.

Для интервалов постоянства момента инерции дифференциальные уравнения (6) — (7) линейны и имеют точные аналитические решения. Развиваемый ниже теоретический подход опирается на «сшивание» этих решений в моменты скачкообразных изменений параметра, когда мы должны совершить переход от одного из этих линейных уравнений к другому. Уравнения (6) — (7) сменяют друг друга в моменты времени $t = nT/2$, где $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Начальные условия для каждого промежутка выбираются в соответствии с принятой физической моделью следующим образом. Каждое начальное значение угла отклонения φ берется равным углу $\varphi(t)$, достигнутому ротором к концу предшествующего промежутка времени. Начальная угловая скорость $\dot\varphi$ связана с угловой скоростью в конце предыдущего интервала времени законом сохранения момента импульса:

$$(1+m)\dot\varphi_1 = (1-m)\dot\varphi_2. \tag{8}$$

В уравнении (8) $\dot{\varphi}_1$ — угловая скорость в конце предшествующего интервала времени, на протяжении которого момент инерции ротора был равен $J_1 = J_0(1 + m)$, а $\dot{\varphi}_2$ — начальное значение для следующего интервала, на протяжении которого момент инерции равен $J_2 = J_0(1 - m)$. Изменение угловой скорости при следующем скачкообразном изменении момента инерции от значения J_2 до J_1 можно рассчитать точно так же.

Применение закона сохранения момента импульса для нахождения выражаемой формулой (8) связи угловой скорости до и после изменения момента инерции здесь допустимо, несмотря на то, что вращение маховика, строго говоря, не является свободным: на него действует момент силы упругости пружины. Действительно, влиянием пружины можно пренебречь, если перемещение грузов вдоль стержня ротора происходит за время, значительно меньшее периода собственных колебаний. В принятой модели физической системы предполагается, что это перемещение грузов происходит мгновенно.

На протяжении каждой половины периода модуляции $T/2$ вращение ротора осциллятора описывается линейным дифференциальным уравнением (6) или (7). Таким образом, это движение представляет собой отрезок некоторого гармонического или затухающего колебания. График такого движения на отдельном интервале постоянства момента инерции — это отрезок синусоиды (или затухающей синусоиды). Аналитическое исследование параметрического возбуждения колебаний при кусочно-постоянной модуляции параметра можно выполнять «сшиванием» («припасовкой» по выражению академика Л. И. Мандельштама) известных решений линейных уравнений для последовательных интервалов времени.

Частотные интервалы параметрической неустойчивости

Обычно аналитическое исследование проблемы параметрического резонанса ограничивается определением интервалов частоты модуляции ω при заданной глубине модуляции m, в пределах которых состояние покоя в положении равновесия становится неустойчивым. В таких *интервалах неустойчивости* сколь угодно малого отклонения от состояния покоя уже достаточно для того, чтобы колебания нарастали прогрессивно со временем. Задача состоит в том, чтобы для любого заданного значения глубины модуляции m определить те интервалы частоты модуляции ω в окрестности значений $\omega_n = 2\omega_0/n$, в пределах которых возможен параметрический резонанс, т. е. колебания с нарастающей амплитудой. Границы этих интервалов можно находить как те частоты модуляции, при которых существуют стационарные решения уравнений (6) — (7), описывающие колебания неизменной амплитуды.

Интервалы неустойчивости для первых пяти параметрических резонансов показаны на диаграмме рис. 5 для разных значений глубины модуляции m. Диаграмма получена численным решением обсуждавшихся выше уравнений. Отметим, насколько узки интервалы для резонансов четных порядков ($n =$2, 4) при малых значениях m. С ростом m эти интервалы расширяются и становятся сравнимыми с интервалами нечетных порядков.

Из диаграммы на рис. 5 видно, что для некоторых значений глубины модуляции m обе границы интервалов с $n > 2$ совпадают (можно считать, что при таких m они *пересекаются*). Это значит, что при таких значениях глубины модуляции соответ-

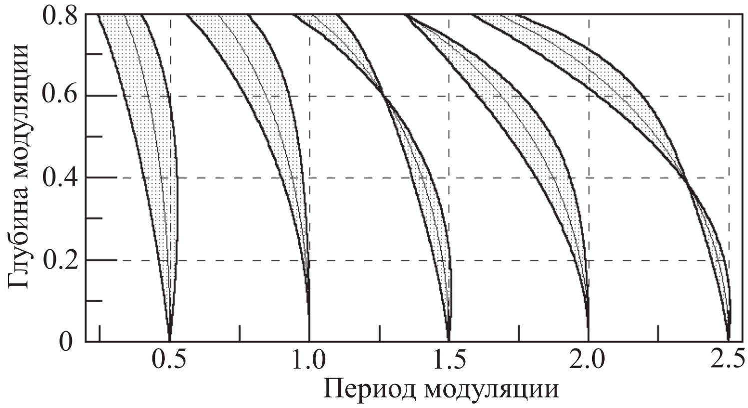


Рис. 5: Интервалы параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции момента инерции в отсутствие трения.

ствующие интервалы параметрического возбуждения исчезают. Этому исчезновению интервалов параметрического возбуждения можно дать простое физическое объяснение, если обратить внимание на соотношение периодов собственных колебаний T_1 и T_2 (при раздвинутых и сдвинутых грузах) для соответствующих значений m. Оказывается, что T_1 и T_2 относятся как 2:1, 3:1, и 3:2. В случае первого пересечения (с отношением собственных периодов 2:1) за первую половину цикла модуляции происходит ровно половина собственного колебания ротора с периодом T_1, а за вторую – целое колебание с периодом T_2 (три полных собственных колебания за один цикл модуляции). Ясно, что в таких условиях модуляции процесс колебаний будет периодическим всегда, при любых начальных условиях. Следовательно, для соответствующих значений глубины модуляции m и периода модуляции T не будет ни роста, ни убывания амплитуды: при любых начальных условиях происходят стационарные колебания.

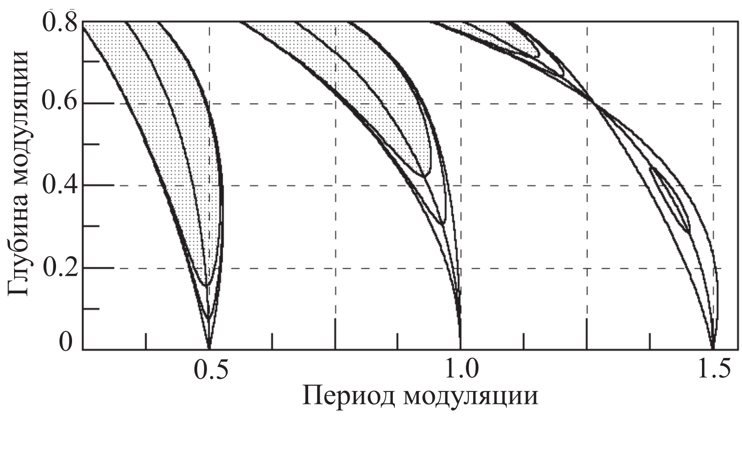


Рис. 6: Интервалы параметрического возбуждения для первых трех резонансов при модуляции момента инерции (в отсутствие трения, для Q =20 и для Q =10).

При наличии трения в системе интервалы параметрического резонанса становятся у́же и при достаточно сильном трении исчезают совсем. Когда глубина модуляции m равна пороговому значению $m_{\min}$, соответствующий интервал параметрического возбуждения исчезает.

Диаграмма на рис. 6 показывает границы первых трех интервалов параметрического резонанса в отсутствие трения, для $Q = 20$, и для $Q = 10$. Обратите внимание на «островок» параметрического резонанса для $n = 3$ и $Q = 20$. Этот резонанс пропадает, когда глубина модуляции достигает значения 45% и появляется снова, когда m превышает примерно 66%.

Для каждого данного значения глубины модуляции m могут существовать лишь несколько первых интервалов параметрического возбуждения, для которых m превышает пороговое значение.

Подчеркнем еще раз, что даже в том случае, когда положение равновесия системы неустойчиво вследствие периодической модуляции параметра (т. е. когда выполняются необходимые условия для возбуждения параметрического резонанса), осциллятор будет оставаться в покое в положении равновесия, если заданы нулевые начальные условия, т. е. $\varphi(0)$ и $\dot{\varphi}(0)$ в точности равны нулю. В этом заключается одно из отличий параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях, для которого амплитуда растет даже при нулевых начальных условиях. Для возбуждения параметрического резонанса, кроме выполнения условия превышения порога, в системе должны обязательно существовать хотя бы слабые собственные колебания. В реальных системах такие колебания всегда существуют из-за флуктуаций.

В линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний неограниченно растет со временем по экспоненциальному закону. В противоположность случаю вынужденных колебаний, вязкое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе. В реальных системах рост амплитуды ограничивается нелинейными явлениями, приводящими к зависимости периода собственных колебаний от амплитуды. По мере роста амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний изменяется собственный период колебаний и поэтому нарушаются условия резонанса. Рост амплитуды сменяется ее уменьшением. При малых амплитудах условия резонанса восстанавливаются, и амплитуда снова начинает расти. При наличии трения такие переходные биения в нелинейной системе постепенно затухают, и устанавливается стационарный режим колебаний с конечной амплитудой.