

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет

Бутиков Е.И.

# **Движения космических тел в компьютерных моделях**

I.    Задача Кеплера

II.   Задача многих тел



Санкт-Петербург

2007

## **Оглавление**

### Движения космических тел в компьютерных моделях. I. Задача Кеплера

Введение. Немного истории .....	2
Задача Кеплера и компьютерное моделирование.....	5
Первый закон Кеплера .....	7
Второй и третий законы Кеплера.....	9
Годограф скорости при кеплеровом движении .....	12
Семейства орбит спутников и траекторий баллистических снарядов .....	15
Семейство спутников с равными периодами обращения.....	17
Относительное движение орбитальных тел.....	19
Космический зонд.....	22

### Движения космических тел в компьютерных моделях. II. Задача многих тел

Введение. Аналитические и численные решения.....	24
Прецессия экваториальной орбиты спутника планеты.....	25
Спутник планеты, обращающейся вокруг звезды .....	28
Двойная звезда – задача двух тел.....	30
Планета в системе двойной звезды.....	33
Коллинеарная симметричная система трех тел .....	35
Хоровод одинаковых «планет» .....	36
Космические катастрофы.....	41
Великолепная «восьмерка».....	42

## **Движения космических тел в компьютерных моделях. I. Задача Кеплера**

### ***Введение. Немного истории***

Во все времена, с глубокой древности и до наших дней, вид звездного неба будоражил воображение людей своей красотой и величием. Астрономия, древнейшая и в то же время вечно молодая наука, открывает перед человеком этот чарующий и прекрасный мир галактик и квазаров, звезд и туманностей, комет и астероидов, планет, окруженных спутниками и загадочными кольцами.

Исторически одна из первых задач астрономии заключалась в разумном объяснении странного наблюдаемого движения планет – своего рода «небесных скитальцев», светил, казалось бы бессистемно блуждающих по небу, случайным образом изменяющих свое положение относительно небесных соседей – неподвижных звезд. Над поиском истинных закономерностей планетных движений астрономы безуспешно бились на протяжении почти двух тысячелетий вплоть до Кеплера, открытия которого сыграли неопределимую роль в истории науки.

Датский астроном Тихо Браге, родившийся в 1546 г., в течение почти всей сознательной жизни занимался тщательными измерениями видимых положений планет относительно звезд. Его многолетние записи небесных координат планет послужили тем сырым материалом, при помощи которого немецкому астроному Иоганну Кеплеру (1571 – 1630) удалось установить форму кривых, изображающих орбиты планет. Кеплер посвятил большую часть жизни анализу составленных Браге таблиц положений планет с тем, чтобы найти математическую схему, которая описывала бы движения планет.



Тихо Браге



Иоганн Кеплер

Кеплер начал свой многотрудный анализ астрономических таблиц с попыток установить, по какой траектории перемещался Марс за время двадцатилетних наблюдений Браге. Кеплер перепробовал множество вариантов, причем каждая попытка требовала длительных и изнурительных вычислений. Все измерения Браге были сделаны с Земли. Кеплер разделял точку зрения Коперника о том, что Земля вращается вокруг собственной оси, двигаясь одновременно по орбите вокруг Солнца. Поэтому при поиске истинной траектории планеты ему приходилось переводить измеренные Браге углы между видимыми с Земли положениями планеты и неподвижными звездами в координаты планеты в гелиоцентрической системе, где Солнце неподвижно, а Земля обращается вокруг него. Задача была особенно трудной потому, что в те времена было невозможно непосредственно измерять расстояния от Земли до Солнца (т.е. определять орбиту Земли). Почти двадцать лет понадобилось Кеплеру для того, чтобы из длинных столбцов цифр раскрыть одну из глубочайших тайн мироздания – установить законы обращения планет вокруг Солнца.

После многочисленных неудачных попыток, каждый раз начиная свои поиски заново, Кеплер предположил однажды, что скорость движения планеты вокруг Солнца переменна, отвергнув древнюю и привычную догму о том, что всякое идеальное движение должно быть равномерным. В расчетах Кеплер пользовался воображаемой «спицей», соединяющей Солнце с планетой (теперь такой математический объект мы называем радиусом-вектором). Он обнаружил, что эта «спица» движется таким образом, что за равные промежутки времени «заметает» равные площади. Сейчас этот вывод известен как *второй закон Кеплера*.

Еще через несколько лет неутомимого добросовестного труда и безмерного терпения, в результате длительных вычислений, Кеплеру удалось найти простые траектории, которые согласовывались с наблюдаемыми движениями всех известных в то время планет. Он получил свой наиболее важный результат, известный теперь как *первый закон Кеплера* – установил, что планеты движутся по эллиптическим ор-

битам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Эти два закона были опубликованы Кеплером в книге «Новая астрономия», изданной в Праге в 1609 году. «Не переставая ощупывать все места окружающего мрака, я вышел, наконец, на яркий свет истины» – так пишет Кеплер о своих открытиях.

Затем Кеплер попытался найти связь между размерами орбит разных планет и периодами их обращения вокруг Солнца. Еще десятилетие упорных трудов и множество попыток привели его наконец к открытию, которое теперь мы называем *третьим законом Кеплера*: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца (больших полуосей их эллиптических орбит). Обнаружив эту закономерность, Кеплер был поражен той точностью, с которой она выполнялась для всех известных в то время планет Солнечной системы. Третий закон был опубликован Кеплером в 1619 году в книге «Гармония мира».

Открытые Кеплером законы планетных движений были выдающимся научным достижением. Результаты многолетних наблюдений и многие тысячи измерений оказались сконцентрированными в четкой системе простых правил. Завершился период изучения движений планет, который можно определить как геометрический или кинематический. Но теперь после старого вопроса о том, *как* движутся планеты, во весь рост вставал новый вопрос о том, *почему* они движутся именно так. Какими причинами объясняется описываемое законами Кеплера движение планет вокруг Солнца, движение спутников Юпитера вокруг планеты-хозяина, движение Луны вокруг Земли? Необходимость поиска физических причин наблюдаемых планетных движений ясно сознавал и Кеплер. Он писал по этому поводу: «Если Солнце есть источник света, то оно также есть источник движения, который тем сильнее движет планеты, чем ближе они находятся». Сознывая важность солнечного тяготения, Кеплер понимал его роль искаженно, считая, что вращающееся вокруг оси Солнце подобно магниту увлекает за собой планеты.

Установленная в астрономии простота в движении планет насущно требовала научного объяснения на основе фундаментальных законов природы. Попытки объяснения этой простоты, в конце концов увенчавшиеся успехом, занимают особое место в истории науки. В сущности, динамическое объяснение движений планет можно рассматривать как начало современной физики. Закон инерции, впервые четко осознанный великим итальянцем Галилеем, открывал путь к основным законам динамики. Но этот безусловно выдающийся шаг был сделан Галилеем лишь наполовину: он считал равномерное прямолинейное движение материальных тел их естественным состоянием лишь в земных условиях, полагая, что для планет естественным движением, т.е. движением «по инерции», которое не требует специальных «причин», является равномерное круговое движение. Тем не менее, открытие Галилея позволило другим ученым по иному взглянуть на причины планетных движений. Если Кеплеру для объяснения движения планет было необходимо представление о «подталкивающей» силе и он придумывал невидимые спицы, которые соединяли Солнце с планетами и влекли их по орбитам, то теперь, после открытий Галилея, требовалось объяснить не само движение, а описываемый законами Кеплера характер изменения этого движения. Именно в таком направлении и удалось найти правильную связь между тяготением и движением планет.

Окончательно эта связь между тяготением и движением была установлена великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643 – 1727), изложившим итоги всех сделанных к тому времени открытий в области изучения движения земных и небесных тел в своем знаменитом труде «Математические основы естествознания», опубликованном в 1687 году. В России эта книга более известна как «Математиче-

ские начала натуральной философии». Такое название она получила в первом (и по сей день единственном) переводе с языка оригинала (латыни) на русский язык, сделанном замечательным русским математиком, механиком и кораблестроителем академиком А.Н. Крыловым в 1915 году.

Во времена Ньютона постепенно сформировался новый взгляд на проблему движения тел – большая часть усилий ученых была направлена теперь на отыскание закона сил, действующих между Солнцем и планетами, из которого получались бы найденные Кеплером орбиты планет. Ньютон установил количественную форму *закона всемирного тяготения* – сила тяготения убывает обратно пропорционально *квадрату расстояния* между телами. Он также показал, что кеплеровы движения планет и спутников можно получить математически как следствие основных законов динамики (теперь мы называем их *законами Ньютона*) для движения под действием центральной силы всемирного тяготения. Более того, он нашел, что в центральном поле тяготения тела могут двигаться как по эллипсам (в частном случае по окружностям), так и по другим коническим сечениям – параболам и гиперболам. В частности, по таким открытым орбитам движутся кометы, прилетающие в окрестность Солнца из-за пределов Солнечной системы.



Исаак Ньютон

Ньютон продемонстрировал, что теория тяготения успешно объясняет как законы Кеплера, так и многие более сложные явления, вплоть до взаимных возмущений планетных орбит, наблюдаемых неравномерностей в движении Луны, и даже океанских приливов. Он показал, что силы тяготения, действующие между небесными телами, объясняют также хорошо знакомое всем падение тел на землю (вспомните знаменитую легенду о яблоке), т.е. связал всемирное тяготение с явлением земной тяжести. Изучая движение Луны, он доказал, что притяжение Луны к Земле, управляющее движением Луны, есть не что иное как знакомая нам сила тяжести на Земле, которая простирается и до Луны, убывая обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. С тех пор с именем Ньютона связана целостная картина мироздания, в которой окружающий нас мир рассматривается как механическая система, подчиняющаяся строгим законам, на основании которых ее поведение можно проследить и предсказать на будущее.

### ***Задача Кеплера и компьютерное моделирование***

Законы Кеплера математически выражают поразительную простоту планетных движений, наблюдаемых в гелиоцентрической (связанной с Солнцем) системе отсчета. Динамическое объяснение Ньютоном этой замечательной простоты можно без преувеличения считать началом современной физической науки. Это был поистине

фантастический прорыв в понимании Природы. Но и поныне движения небесных тел – малых и больших планет Солнечной системы, их спутников, комет, астероидов, а в наше время – также рукотворных космических кораблей и искусственных спутников – дают наиболее впечатляющие опытные подтверждения законов классической ньютоновской механики. В этой замечательной космической лаборатории все движения наблюдаются в наиболее «чистом» виде, не осложненные побочными факторами вроде трения, сопротивления воздуха и т.п., неизбежными в условиях земной лаборатории.

Теоретический фундамент, на котором построена небесная механика и ее современная ветвь – механика космического полета – это *закон всемирного тяготения* и *законы Ньютона*, составляющие основу классической динамики. Второй закон Ньютона дает дифференциальные уравнения, математически описывающие движения тел. Замечательно, что для движения тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра (так называемая *задача Кеплера*), возможно получение решения уравнений движения в аналитическом виде.

Расчет движения двух небесных тел, находящихся под действием сил взаимного тяготения, математически сводится к задаче о движении одного тела в центральном ньютоновском поле тяготения. Поэтому так называемая *задача двух тел*, связанных гравитационным взаимодействием, также имеет аналитическое решение, в отличие от задачи трех (и многих) тел, для которой аналитическое решение в общем случае не существует.

Любое движение в ньютоновском поле тяготения происходит по одному из так называемых *конических сечений* – кривых, которые получаются при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса получаются окружность, эллипс, парабола и гипербола. Периодическим движениям планет и спутников соответствуют замкнутые *эллиптические* (в частном случае *круговые*) орбиты. Предельному случаю сильно вытянутых эллиптических орбит со все более и более далеким вторым фокусом соответствует разомкнутая *параболическая* траектория (второй фокус эллипса при таком предельном переходе постепенно удаляется в бесконечность). Если же тело приближается к силовому центру из бесконечности, его движение происходит по одной из ветвей *гиперболы*. В этом случае, изменив направление движения под действием силы тяготения, тело снова уходит в бесконечность. Движение по уходящей в бесконечность ветви гиперболы можно также получить, сообщив находящемуся на конечном расстоянии телу достаточно большую скорость, превосходящую так называемую *скорость освобождения*.

Аналитическое решение задачи Кеплера о движении тела (планеты, спутника) под действием силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра, сегодня можно найти почти в любом учебнике по общей физике или теоретической механике (см., например, т. 1 «Курса общей физики» Д.В. Сивухина). Это одна из немногих практически важных задач, допускающих точное аналитическое решение. Но для изучения в общем курсе физики это решение оказывается слишком сложным. Поэтому очень полезной при изучении классической динамики представляется возможность наглядной демонстрации закономерностей движения планет и спутников на компьютере путем численного моделирования, основанного на простом для понимания алгоритме решения уравнений движения в центральном поле тяготения.

Более того, чтобы увидеть реальные кеплеровы движения, нужно, подобно знаменитому Тихо Браге, месяцами и даже годами и десятилетиями вести астрономические наблюдения. Затем придется пересчитать результаты выполненных на

Земле наблюдений в подходящую систему отсчета, нанести точки на бумагу и соединить их, чтобы получить истинную траекторию. Ясно, что это удел избранных – такое доступно лишь немногим астрономам-профессионалам. Замечательно, что компьютерное моделирование движений небесных тел изящно решает эту проблему: экран компьютера позволяет своими глазами увидеть то, что, казалось бы, нам никогда не дано созерцать воочию. Такую возможность Вы получите, работая с пакетом компьютерных программ «Движение космических тел». Моделирующие программы пакета дают наглядные живые динамические иллюстрации всех рассматриваемых в данной статье явлений.

Разумеется, компьютер может показать нам на экране движение не реальной системы, а лишь ее математической модели. И все-таки такие моделирующие компьютерные программы можно рассматривать как еще одно экспериментальное подтверждение классической динамики (правда не в реальном, а в вычислительном эксперименте). В самом деле, программа рассчитывает, скажем, движение планеты вокруг Солнца, «ничего не зная» о законах Кеплера – они в программе не используются. Все, на чем основано численное моделирование планетных движений – это законы динамики и закон всемирного тяготения. И если мы видим, что моделируемое на экране движение происходит по одному из конических сечений в соответствии с законами Кеплера, то это означает, что данный вычислительный эксперимент подтверждает справедливость заложенных в модель законов физики, а тем самым и правильность наших представлений о моделируемом природном явлении.

## ***Первый закон Кеплера***

В моделирующей компьютерной программе пакета «Движение космических тел», иллюстрирующей первый закон Кеплера, с помощью вычислительного эксперимента доказывается, что траектория планеты – это именно эллипс, а не овал или какая-либо иная замкнутая кривая.

Доказательство основано на известном геометрическом свойстве эллипса, согласно которому для любой точки эллипса сумма расстояний до двух заданных точек (фокусов) имеет одно и то же значение (это утверждение можно рассматривать как *определение* эллипса).

В левой части экрана (см. рис. 1) путем численного интегрирования уравнений движения строится траектория планеты. Через равные промежутки времени к центру планеты проводятся отрезки из силового центра (центра Солнца), где согласно первому закону Кеплера должен находиться один из фокусов эллиптической орбиты. На приводимом рисунке эти радиусы-векторы планеты показаны стрелками. Одновременно проводятся отрезки, соединяющие центр планеты со вторым фокусом орбиты. Эти отрезки на рисунке показаны штриховыми линиями.

В правой части экрана эти же отрезки от данной точки орбиты до фокусов отложены вдоль одной прямой друг за другом, чтобы было легко определить на глаз сумму длин этих отрезков. Мы видим, что в процессе работы программы эта сумма оказывается одинаковой для всех точек орбиты. Отсюда следует, что траектория, получающаяся в результате численного интегрирования уравнения второго закона Ньютона для движения под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, действительно представляет собой эллипс, один из фокусов которого находится в силовом центре. Сумма длин отрезков от любой точки траектории до фокусов равна большой оси этого эллипса.

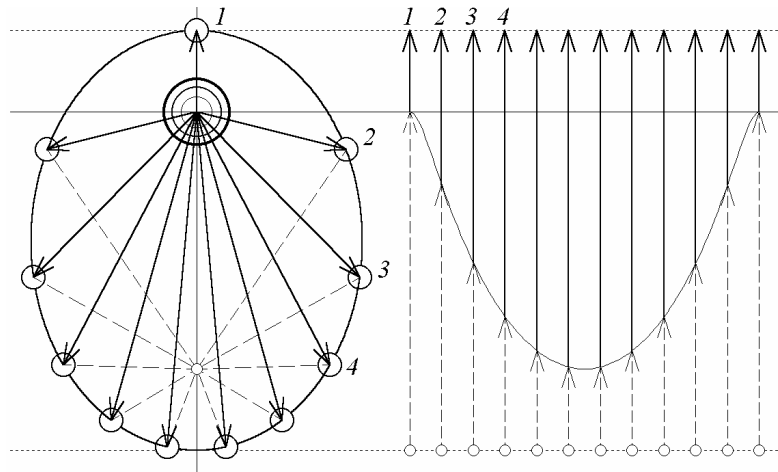


Рис. 1. Кеплерова орбита планеты (слева) и геометрическое сложение отрезков от фокусов до планеты. Совпадающие цифры в левой и правой частях соответствуют одним и тем же моментам времени.

Движение планеты отображается при моделировании в определенном масштабе времени. Поэтому при наблюдении ясно видно, как изменяется гелиоцентрическая скорость планеты при движении по орбите. Отрезки от фокусов до планеты проводятся через равные промежутки времени. Поэтому об изменениях скорости можно судить даже по статической картинке, остающейся на экране по окончании моделирования. Кривую в правой части рис. 1, разделяющую сплошные и штриховые отрезки, можно рассматривать как график временной зависимости расстояния планеты от Солнца при движении по орбите (если считать, что ось ординат на нем направлена вниз).

Чтобы при моделировании движения проводить отрезки к планете из второго фокуса (штриховые линии на рис. 1), нужно знать, где находится этот фокус. Положение второго фокуса (для заданного значения начальной скорости) программа рассчитывает заранее на основании законов сохранения. В таком теоретическом расчете уже использовано предположение о том, что траектория представляет собой эллипс. Поэтому может возникнуть сомнение, нет ли здесь порочного круга: можно ли считать, что дальнейший численный расчет движения в моделирующей программе действительно дает доказательство того, что траектория – это эллипс? Чтобы отвергнуть такие сомнения, достаточно осознать, что для справедливости нашего геометрического доказательства эллиптичности орбиты важно лишь то, что такая точка (второй фокус) существует. Каким образом найдено положение этой точки, совершенно не существенно.

Еще одно подтверждение тому, что наблюдаемое при моделировании движение происходит именно по эллипсу, можно получить, если перед моделированием выбрать в меню опцию предварительного построения на экране теоретически рассчитанной траектории, т.е. траектории, полученной путем аналитического решения задачи Кеплера. В процессе моделирования мы видим, что численно рассчитываемая траектория действительно совпадает с эллипсом, построенным предварительно с помощью аналитического решения.

Важно, что закон обратной пропорциональности силы тяготения квадрату расстояния справедлив не только для материальных точек, т.е. тел, находящихся на расстояниях, значительно превосходящих их размеры, но и для любых тел со сферически симметричным распределением масс. При расчете гравитационного взаимодействия таких сферических тел можно считать, что их массы сосредоточены в центрах тел. Поэтому решение задачи Кеплера (как аналитическое, так и численное, иллюст-



рируемое моделирующей программой) применимо не только к движению планет вокруг Солнца, где расстояния между тяготеющими телами велики по сравнению с их размерами, но и к движению спутников планет по низким орбитам, так как распределение плотности вещества внутри планет с хорошей точностью можно считать сферически симметричным. При этом, разумеется, нет необходимости, чтобы сам спутник (или космический корабль) был сферически симметричным, так как в любом случае его размеры малы по сравнению с расстоянием до центра планеты, и его можно рассматривать как материальную точку. Другими словами, поле тяготения планеты на протяжении размеров корабля можно полагать однородным, а силу тяготения считать приложенной в центре масс корабля.

В моделирующей программе, иллюстрирующей первый закон Кеплера, начальная скорость тела (планеты или спутника) направлена трансверсально, т.е. перпендикулярно радиусу-вектору начального положения тела. При таком направлении начальной скорости начальная точка (точка *1* на рис. 1) находится на одном из концов большой оси эллипса.

Величину начальной скорости  $v_0$  можно задавать произвольно по своему усмотрению. Вводимое значение начальной скорости нужно выражать в единицах круговой скорости  $v_{кр}$  (для данной высоты начальной точки). Если выбрать значение, большее единицы (т.е.  $v_0 > v_{кр}$ ), то начальная точка будет ближайшей к силовому центру точкой эллипса. Это *перигелий* для планетной орбиты, или *перигей* для орбиты спутника Земли. Другой конец большой оси будет в этом случае *афелием* (или *апогеем* в случае спутника Земли), т.е. наиболее удаленной от силового центра точкой орбиты. Если задать начальную скорость, меньшую круговой ( $v_0 < v_{кр}$ ), то эти точки поменяются местами, т.е. начальная точка будет наиболее удаленной от силового центра точкой орбиты, а противоположный конец большой оси эллипса будет ближайшей к центру точкой орбиты.

Когда начальная скорость тела превосходит *скорость освобождения* ( $v_0 > v_{осв} = 1.41 v_{кр}$ ), тело удаляется в бесконечность по гиперболической траектории. Моделирующая программа позволяет убедиться в том, что это действительно гипербола, на основании известного геометрического свойства, которое можно рассматривать как определение гиперболы: для любой точки такой кривой *разность* расстояний от двух заданных точек (фокусов) одинакова. Отрезки в правой части экрана в этом случае расположены так, что на глаз легко видеть неизменное значение их разности.

Для случая  $v_0 = v_{осв}$  траектория представляет собой параболу. Доказательство основано на геометрическом свойстве, согласно которому для любой точки параболы расстояние от фокуса (от силового центра) равно расстоянию до некоторой прямой (директрисы). Выполняемое в правой части экрана геометрическое построение наглядно показывает, что при  $v_0 = v_{осв}$  это действительно так.

## **Второй и третий законы Кеплера**

Изменение скорости планеты или спутника при движении по эллиптической орбите количественно характеризуется вторым законом Кеплера, иначе называемым *законом площадей*, согласно которому радиус-вектор, проведенный к телу из силового центра, за равные промежутки времени «заметает» равные площади.

Для иллюстрации этого закона в соответствующей моделирующей программе пакета «Движение космических тел» путем численного интегрирования уравнений движения строится орбита планеты (или спутника планеты), и одновременно в каждый момент вычерчивается радиус-вектор из силового центра. Через определенные равные промежутки времени изменяется цвет выводимого на экран радиуса-вектора. В результате на получаемом изображении соседние секторы, «заметаемые» радиу-

сом-вектором за равные промежутки времени, окрашиваются в разный цвет. В соответствии со вторым законом Кеплера площади всех секторов должны быть одинаковы.

В случае круговой орбиты движение равномерное, и неизменный по модулю радиус-вектор также равномерно вращается, «заметая», очевидно, конгруэнтные (равные) секторы за равные промежутки времени. В случае эллиптической орбиты судить на глаз о равенстве площадей секторов, сильно различающихся по форме (см. рис. 2), затруднительно. Поэтому для количественной проверки равенства площадей программа выполняет, наряду с расчетом орбиты, суммирование площадей узких элементарных секторов, соответствующих отдельным шагам интегрирования. Такие элементарные секторы с хорошей точностью можно считать треугольниками. В процессе моделирования текущее значение площади сектора выводится на экран.

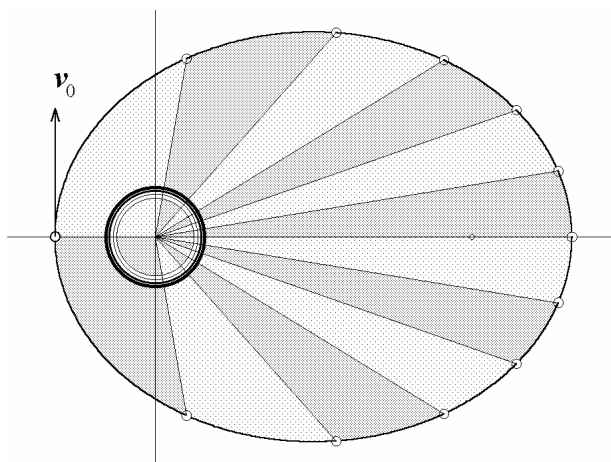


Рис. 2. Иллюстрация второго закона Кеплера. «Заметаемые» радиусом-вектором секторы соответствуют равным промежуткам времени.

Третий закон, утверждающий пропорциональность квадратов периодов обращения кубам больших полуосей эллиптических орбит, как уже отмечалось, был найден Кеплером для планет Солнечной системы путем тщательного анализа многолетних астрономических наблюдений Тихо Браге. Динамическое объяснение этой закономерности на основе законов динамики и закона всемирного тяготения было дано Ньютоном спустя почти столетие. Третий закон справедлив не только для планет, обращающихся вокруг Солнца или некоторой звезды, но и для любой совокупности спутников, обращающихся вокруг общего центрального тела, в частности, для спутников планет.

Моделирующая программа пакета «Движение космических тел» для иллюстрации третьего закона Кеплера одновременно строит движение нескольких тел в одном и том же центральном поле тяготения. При этом предполагается, что массы тел (спутников) настолько малы по сравнению с массой центрального тела, что их гравитационным взаимодействием можно пренебречь и считать, что каждый из них движется независимо от других, испытывая притяжение только со стороны центрального тела.

Для моделирования можно выбирать разные совокупности орбит. В простейшем варианте можно запустить, скажем, только два спутника, выбрав для одного начальную скорость, равную круговой, а для второго задать начальную скорость так, чтобы получилась эллиптическая орбита с большой полуосью, в четыре раза превосходящей радиус круговой орбиты первого спутника (орбита 4 на рис. 3). Тогда пери-

од обращения второго спутника должен быть, согласно третьему закону Кеплера, в восемь раз больше периода обращения первого спутника: второй спутник должен совершить один полный оборот по эллиптической орбите ровно за восемь оборотов спутника на круговой орбите.

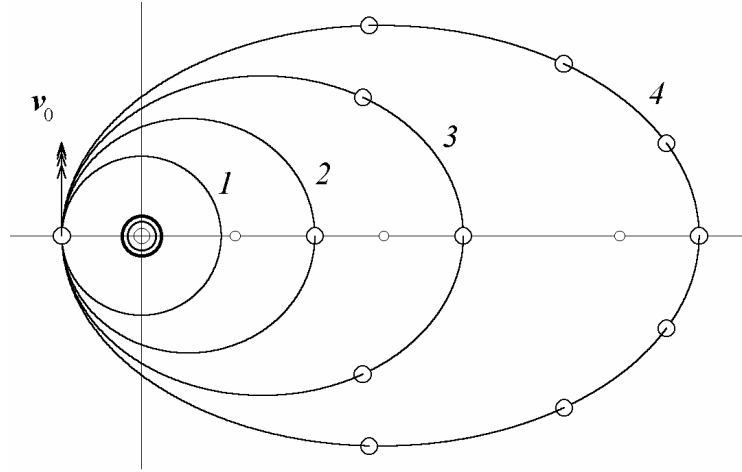


Рис. 3. Эллиптические орбиты спутников, одновременно запускаемых из общей начальной точки в горизонтальном направлении с разными начальными скоростями.

Спутник, равномерно обращающийся по круговой орбите, выполняет здесь роль «часов» для измерения периодов обращения других спутников. Положения других спутников отмечают программой на экране каждый раз в те моменты, когда первый возвращается в исходную точку. Например, на рис. 3 показан результат моделирования движения четырех спутников, запускаемых одновременно из одной точки с разными значениями начальных скоростей. Для удобства наблюдения начальные скорости выбраны так, чтобы получались эллиптические орбиты с периодами обращения, кратными периоду обращения по круговой орбите 1: для орбиты 2 период вдвое больше периода на круговой орбите, а для орбиты 3 – в четыре раза больше. Поэтому ровно через восемь таких оборотов все спутники одновременно оказываются в начальной точке.

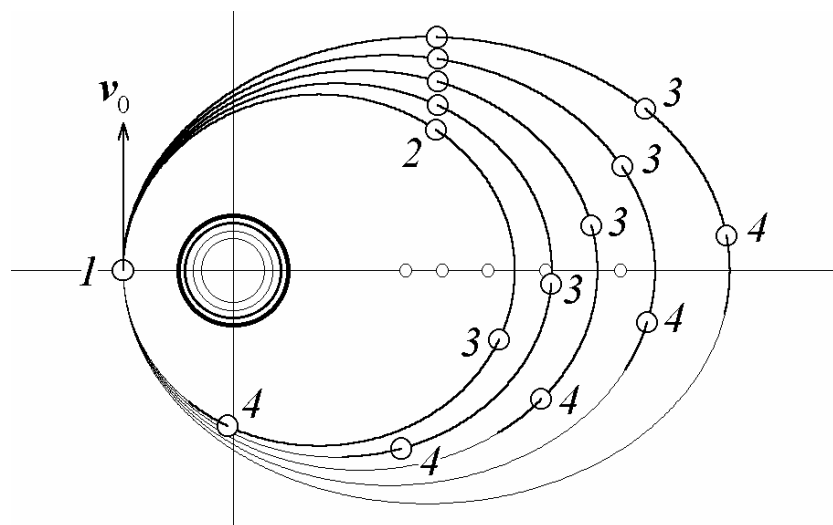


Рис. 4. Эволюция пространственной конфигурации спутников, одновременно запущенных из одной точки с немного различающимися начальными скоростями.

Рис. 4 иллюстрирует эволюцию пространственной конфигурации нескольких спутников, одновременно запущенных из одной точки со слегка различными начальными скоростями. Одинаковыми цифрами здесь обозначены положения разных спутников в одни и те же моменты времени. На первой стадии движения спутники движутся тесной группой, но с течением времени эта группа растягивается все сильнее. По мере увеличения начальной скорости эллиптическая орбита спутника становится все более вытянутой. При приближении начальной скорости к скорости освобождения даже очень небольшое увеличение начальной скорости приводит к разительному увеличению большой оси эллипса и, следовательно, периода обращения.

## Годограф скорости при кеплеровом движении

Одно из интереснейших свойств кеплеровых движений связано с формой траектории в *пространстве скоростей*. Вектор скорости тела (планеты, спутника) в каждый момент времени направлен по касательной к пространственной траектории тела. При криволинейном движении направление вектора скорости непрерывно изменяется. Для получения траектории в пространстве скоростей нужно эти векторы скоростей для каждого момента времени начертить так, чтобы все они начинались в общей точке – начале координат пространства скоростей. Конец этого изменяющегося вектора скорости вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называемую *годографом* вектора скорости. Это ныне общепринятое название для траектории в пространстве скоростей было предложено Гамильтоном в 1846 году.

Замечательно, что при кеплеровом движении по любой эллиптической орбите годограф скорости представляет собой *окружность*. Для круговой орбиты это очевидно: при равномерном движении тела по окружности вектор скорости просто равномерно поворачивается, оставаясь неизменным по модулю. Ясно, что в пространстве скоростей конец такого вектора вычерчивает окружность. Центр этой окружности совпадает с общим началом всех векторов скоростей, т.е. расположен в начале координат пространства скоростей. Радиус окружности равен постоянной скорости движения по круговой орбите.

Для эллиптической орбиты поворот вектора скорости происходит неравномерно, и его модуль при этом все время изменяется. Но оказывается, что и в этом случае конец вектора в пространстве скоростей вычерчивает окружность (см. рис. 5). Центр этой окружности смещен из общего начала и расположен на векторе скорости спутника в перигее орбиты.

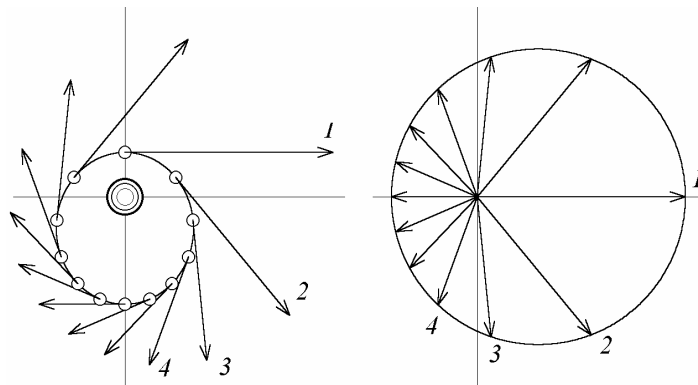


Рис. 5. Кеплерова орбита спутника и векторы скоростей в разных ее точках (слева), и годограф вектора скорости в пространстве скоростей (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

Нижняя половина кругового годографа, начинающаяся в точке *1* на рис. 5, соответствует первой (правой) половине эллиптической орбиты от перигея до апогея, которую спутник проходит (по часовой стрелке) с постепенно уменьшающейся скоростью. Вторая (верхняя на рис. 5) половина годографа скорости соответствует второй (левой) половине орбиты от апогея до перигея, при прохождении вдоль которой скорость постепенно увеличивается.

В случае эллиптической орбиты диаметр кругового годографа скорости равен сумме модулей скоростей в перигее и апогее (в этих точках эллиптической орбиты векторы скоростей направлены в противоположные стороны). Центр кругового годографа смещен из начала координат пространства скоростей в направлении вектора скорости в перигее на расстояние, равное половине разности модулей скорости в перигее и апогее.

Векторы скоростей на рис. 5 проведены через равные промежутки времени, что позволяет судить о том, как изменяется угловая скорость поворота вектора скорости не только во время моделирования, но и по статической картине, остающейся на экране после завершения моделирования. Если задать начальную скорость спутника, меньшую круговой, начальная точка будет апогеем эллиптической орбиты спутника. В таком случае центр кругового годографа будет смещен влево из начала координат пространства скоростей. На начальном этапе движения вектор скорости мал и его поворот происходит медленно. По мере приближения к перигею орбиты скорость быстро нарастает, и поворот вектора скорости происходит все быстрее. Когда вектор скорости вычерчивает вторую (верхнюю) половину кругового годографа, такие же изменения происходят в обратной последовательности.

Кеплерово движение по открытой параболической траектории можно рассматривать как предельный случай движения по сильно вытянутому эллипсу, апогей которого стремится в бесконечность (см. левую часть рис. 6). При таком предельном переходе скорость спутника в апогее стремится к нулю. Годограф вектора скорости для этого предельного случая, соответствующего параболическому движению, приведен в правой части рис. 6. Траектория в пространстве скоростей и в этом случае представляет собой замкнутую окружность. Ее диаметр совпадает с вектором скорости тела в вершине параболы, т.е. в ближайшей к силовому центру точке траектории. Эта окружность (годограф скорости параболического движения) проходит через начало координат пространства скоростей. Точка годографа, находящаяся в начале координат, в пространстве соответствует бесконечно удаленной точке параболической траектории тела, при движении к которой скорость тела стремится к нулю.

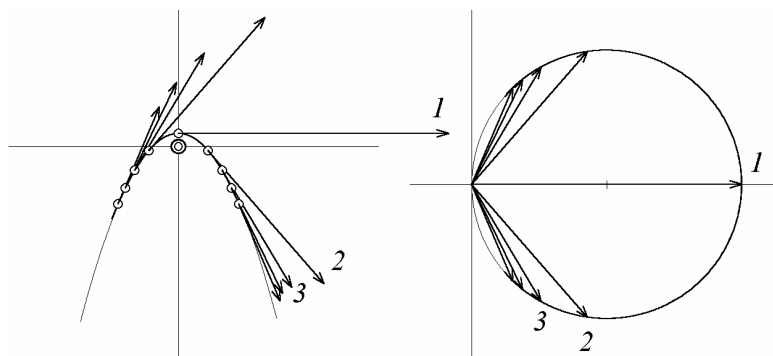


Рис. 6. Векторы скоростей в разных точках параболической траектории тела в центральном поле тяготения (слева) и соответствующий этому движению годограф вектора скорости (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

В моделирующей программе пакета «Движение космических тел», иллюстрирующей траекторию в пространстве скоростей, начальная скорость сообщается телу в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору. Если эта скорость равна скорости освобождения для начальной точки, то при движении тела в бесконечность вектор скорости вычерчивает половину окружности в пространстве скоростей (нижнюю в правой части рис. 6). Вектор начальной скорости  $v_0 = v_{\text{осв}}$  проходит по диаметру этой окружности. При дальнейшем движении тела скорость уменьшается, и конец постепенно сокращающегося вектора скорости движется по нижней части окружности. В конце концов, за бесконечно большое время вектор скорости сжимается в точку, по мере того как тело удаляется в бесконечность.

Чтобы в моделирующем эксперименте получить и вторую (левую на рис. 6) половину параболической пространственной траектории вместе с соответствующей ей верхней полуокружностью годографа скорости, программа рассчитывает также движение тела из бесконечности к вершине параболической траектории. Делается это следующим образом. Когда тело удаляется на достаточно большое расстояние от начальной точки (за пределы области, отображаемой на экране), программа обращает знак одной из координат (а именно, знак координаты, измеряемой от начального положения в направлении, перпендикулярном начальному радиусу-вектору), и одновременно обращает знак другой компоненты скорости тела. Поэтому дальнейшее моделируемое движение происходит в направлении начальной точки (в сторону силового центра) по левой на рис. 6 половине той же самой параболы.

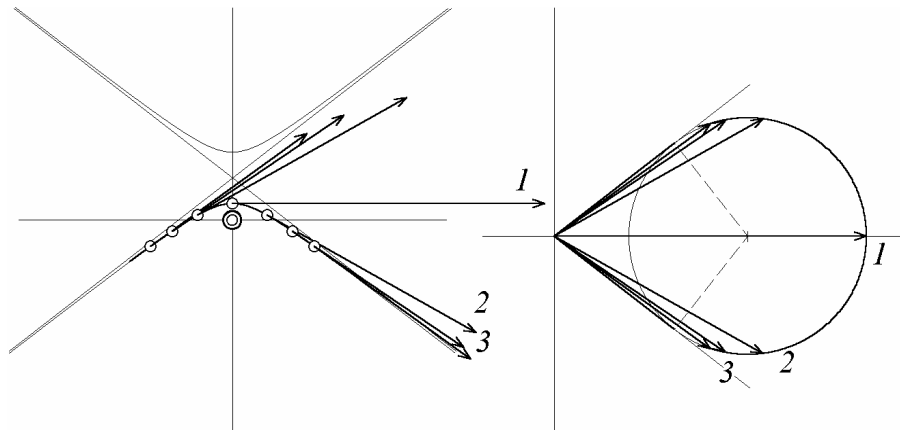


Рис. 7. Векторы скоростей в разных точках гиперболической траектории тела в центральном поле тяготения (слева) и соответствующий этому движению годограф вектора скорости (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

Замечательно, что и для гиперболического движения тела в центральном поле тяготения траектория в пространстве скоростей имеет форму (части) окружности (см. рис. 7). В этом случае диаметр кругового годографа скорости меньше, чем максимальная скорость тела, которую оно имеет в ближайшей к силовому центру точке траектории. Начало координат пространства скоростей лежит вне кругового годографа скорости.

В случае гиперболического движения тело приближается к силовому центру из бесконечности, где его скорость отлична от нуля и направлена вдоль одной из асимптот гиперболы. В пространстве скоростей (правая часть рис. 7) эта скорость (скорость на бесконечности) проходит из начала координат по верхней касательной к годографу скорости. Начиная от точки касания, по мере приближения тела к сило-

вому центру, скорость постепенно увеличивается и достигает максимума, когда тело проходит через вершину гиперболы. Вектор скорости при этом вычерчивает часть окружности от точки касания до наиболее удаленной от начала координат точки  $I$  годографа скорости. Затем вектор скорости постепенно сокращается, а его конец движется по нижней половине кругового годографа. В конце концов, через бесконечно большое время, конец вектора скорости достигает нижней точки касания. Этому соответствует удаление тела в бесконечность вдоль второй асимптоты гиперболической траектории. Постоянная скорость такого движения изображается в пространстве скоростей второй (нижней на рис. 7) касательной, проведенной из начала координат к круговому годографу скорости.

В моделирующей программе телу сообщается некоторая начальная скорость в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору начального положения. Когда величина начальной скорости превосходит скорость освобождения, начальная точка будет вершиной гиперболической траектории тела. В пространстве скоростей начальному состоянию соответствует горизонтальный вектор  $I$  (см. рис. 7), проходящий из начала координат по диаметру в дальнюю точку окружности. При дальнейшем движении, когда тело удаляется в бесконечность, траектория постепенно прижимается к асимптоте гиперболы, а конец вектора скорости вычерчивает нижнюю часть годографа до точки касания. Чтобы показать и вторую половину годографа, программа моделирует также и движение из бесконечности по другой половине гиперболы в сторону силового центра. Делается это таким же способом, как и при моделировании движения по параболе. Чем больше начальная скорость, тем меньше угол между асимптотами гиперболы.

## **Семейства орбит спутников и траекторий баллистических снарядов**

Рассмотрим свойства кеплеровых орбит, по которым движутся спутники, запускаемые из одной и той же точки над поверхностью Земли в одном и том же направлении, но с различными по величине начальными скоростями. Если начальная скорость направлена горизонтально (т.е. перпендикулярно радиусу-вектору в начальной точке, как, например, на рис. 3), то начальная точка находится на одном из концов большой оси эллиптической орбиты: эта точка – перигей орбиты при начальной скорости, превышающей круговую скорость, и апогей – в противном случае. Большие оси всех орбит направлены вдоль вертикали, проходящей через начальную точку. Если же направленная горизонтально начальная скорость равна круговой скорости ( $v_0 = v_{кр}$ ), спутник будет двигаться по круговой орбите. При любом другом направлении начальной скорости получить движение по круговой орбите невозможно, какой бы ни была величина начальной скорости.

На рис. 8 показано несколько орбит спутников, которым разные по модулю начальные скорости сообщаются под одним и тем же острым углом с вертикалью. Точка старта  $S$  – это единственная общая точка всех орбит. В этой точке все орбиты имеют общую касательную, так как векторы скоростей для всех орбит в этой точке направлены одинаково.

Интересное свойство семейства таких эллиптических орбит связано с положениями их фокусов. Один из фокусов – общий для всех орбит. Он расположен в силовом центре, т.е. в центре Земли. Что касается вторых фокусов всех орбит, то, как видно из рис. 8, все они расположены на одной и той же прямой, проходящей через общую для всех орбит начальную точку  $S$ . Эта прямая образует угол с вертикалью (проходящей через точку  $S$  вверх), который вдвое больше угла, образуемого началь-

ной скоростью с вертикалью. Заметим кстати, что в случае горизонтального направления начальных скоростей, когда  $v_0$  образует угол  $90^\circ$  с вертикалью, для прямой вторых фокусов этот угол равен  $180^\circ$ , т.е. вторые фокусы всех эллипсов лежат на прямой, проходящей вертикально вниз через начальную точку. Это уже отмечалось выше.

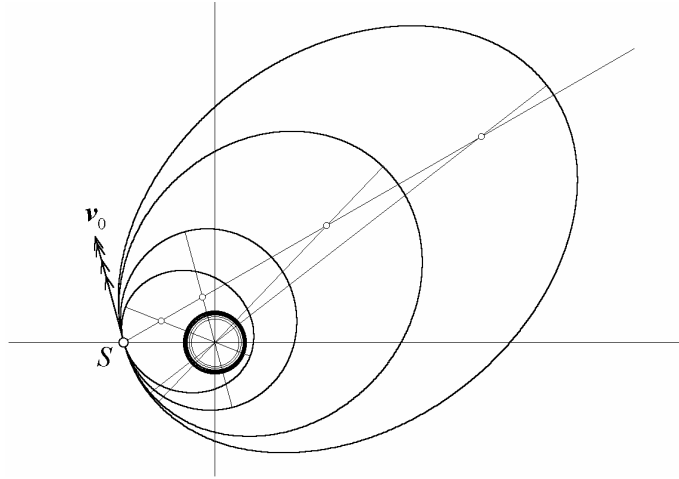


Рис. 8. Эллиптические орбиты спутников, запущенных из одной точки в одном направлении с разными по модулю начальными скоростями.

Указанное выше свойство рассматриваемого семейства эллиптических орбит легко объяснить, если вспомнить хорошо известное «оптическое» свойство эллипса: все лучи, выходящие из одного фокуса эллиптического зеркала, после отражения проходят через второй его фокус, т.е. отражаются эллиптическим зеркалом в направлении второго фокуса зеркала. Воображаемый луч света, выходящий из центра Земли (общего фокуса всех эллипсов), отразился бы в точке  $S$  от всех эллипсов в одном и том же направлении. Так как он непременно должен пройти через второй фокус, то вторые фокусы всех рассматриваемых эллипсов лежат на этом отраженном луче. Учитывая, что угол отражения равен углу падения, получаем отмеченное выше соотношение между направлением этого луча и направлением начальных скоростей.

Сообщая телу некоторую начальную скорость, мы получим спутник Земли лишь тогда, когда расстояние от центра Земли до перигея его эллиптической орбиты больше, чем радиус Земли. В противном случае тело будет двигаться по эллипсу лишь до того места, где этот эллипс пересекает поверхность Земли (точнее, верхние слои атмосферы). Такие траектории обычно называют *баллистическими*. В частности, невозможно запустить спутник выстрелом из пушки, сообщая снаряду скорость для дальнейшего пассивного движения непосредственно у поверхности Земли. Это было бы невозможно даже в отсутствие атмосферы, так как получилась бы баллистическая траектория, непременно пересекающая Землю при любой величине начальной скорости (если, конечно, начальная скорость не превосходит скорости освобождения). Лишь при горизонтальном направлении начальной скорости, превосходящей круговую скорость, эллиптическая траектория будет касаться поверхности Земли (как раз в начальной точке), а не пересекать ее. Для планеты с атмосферой спутник с такой орбитой тоже невозможен.

На рис. 9 показано семейство траекторий баллистических снарядов, запускаемых с различными начальными скоростями из одной точки на поверхности Земли под углом  $45^\circ$  с вертикалью. В отсутствие сопротивления воздуха траектории таких снарядов были бы отрезками эллипсов с общим фокусом в центре Земли. Если на-



чальная скорость много меньше круговой скорости, кусочек такого эллипса, лежащий над земной поверхностью, можно с хорошей точностью аппроксимировать некоторой параболой. Это будет именно та параболическая траектория, которую мы обычно приписываем снаряду в отсутствие сопротивления воздуха в «приближении плоской Земли», т.е. когда поле тяготения Земли на протяжении этого участка траектории (при малой по сравнению с радиусом Земли дальности полета снаряда) можно приближенно считать однородным. Однако полезно иметь в виду, что в действительности такая траектория представляет собой отрезок эллипса, дальний фокус которого находится в центре Земли.

Все эллиптические траектории рассматриваемого семейства имеют общую касательную в начальной точке. Ориентации больших осей эллипсов зависят от величины начальной скорости. Вторые фокусы всех эллипсов, как и в предыдущем примере (см. рис. 8), лежат на одной прямой. В данном случае (начальная скорость направлена под углом  $45^\circ$ ) это горизонтальная прямая, проходящая через начальную точку. Баллистическая траектория снаряда, начальная скорость которого по модулю равна круговой скорости, пересекает поверхность Земли на угловом расстоянии  $90^\circ$  от начальной точки, т.е. на удалении четверти окружности Земли.

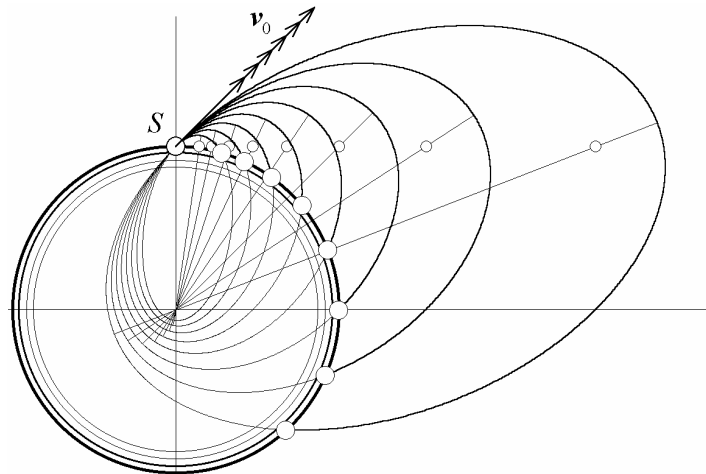


Рис. 9. Семейство баллистических траекторий снарядов, запущенных с поверхности Земли под углом  $45^\circ$  с различными по модулю скоростями.

### ***Семейство спутников с равными периодами обращения***

Представьте себе ракету, которая поднимается с Земли вертикально вверх, и в высшей точке своего подъема разрывается на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с одинаковыми по модулю начальными скоростями. Дальнейшее движение осколков происходит только под действием силы земного тяготения. Если высота начальной точки велика по сравнению с радиусом Земли, а начальная скорость осколков не слишком мала (не очень сильно отличается от круговой скорости для начальной высоты), то осколки становятся спутниками Земли и в дальнейшем обращаются по различным эллиптическим орбитам (рис. 10).

Семейство эллиптических орбит таких спутников также отличается рядом интересных свойств. Всем орбитам рассматриваемого семейства соответствуют равные значения полной энергии (в расчете на единицу массы), так как в начальной точке

потенциальные энергии всех осколков равны, а при одинаковых начальных скоростях будут равны и кинетические энергии.

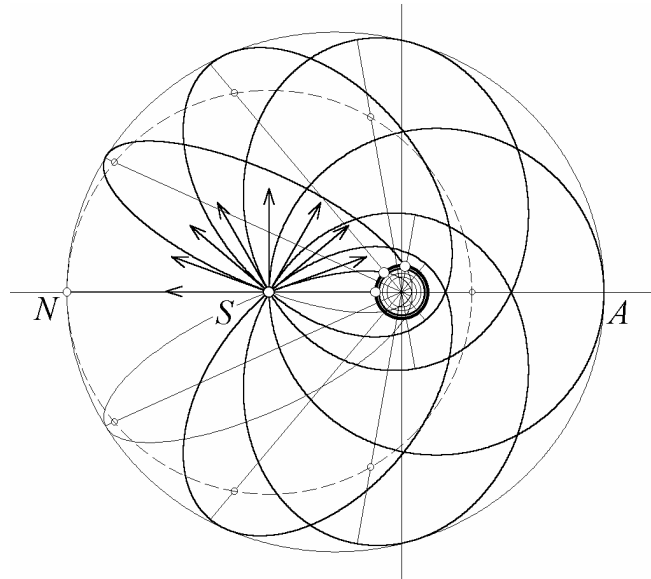


Рис. 10. Семейство эллиптических орбит спутников, вылетающих из одной точки  $S$  во всевозможных направлениях с равными по модулю скоростями. Начальная скорость спутников немного превышает круговую скорость ( $v_0 > v_{кр}$ ).

Большая ось кеплеровой орбиты однозначно связана с энергией. Поэтому большие оси всех эллипсов равны. В соответствии с третьим законом Кеплера у всех спутников такого семейства будут одинаковы и периоды обращения. Это значит, что все они одновременно возвратятся в начальную точку  $S$ . Исключение составляют лишь те осколки, траектории которых пересекают поверхность Земли – им не суждено осуществить и одного полного оборота по орбите.

Один из фокусов рассматриваемого семейства будет общим для всех эллипсов. Он расположен в центре Земли. Докажем, что вторые фокусы всех орбит лежат на окружности (в пространстве – на сфере), центр которой находится в начальной точке  $S$ , а радиус равен расстоянию  $SN$  от этой точки до точки  $N$  наибольшего удаления от центра Земли (точки  $N$  достигает осколок, начальная скорость которого в точке  $S$  направлена вертикально вверх). Эта окружность показана штриховой линией на рис. 10. В самом деле, для любой эллиптической орбиты данного семейства сумма расстояний от каждой ее точки до фокусов имеет одно и то же значение, равное длине большой оси орбиты. Большие оси, как уже отмечалось выше, одинаковы у всех орбит и равны расстоянию от центра Земли до точки  $N$ , так как этот отрезок можно рассматривать как большую ось предельно сплюсненного (вырожденного) эллипса, соответствующего орбите осколка, вылетевшего из  $S$  вертикально вверх в направлении точки  $N$ . Все орбиты семейства проходят через точку  $S$ , и расстояние от нее до центра Земли, т.е. до одного из фокусов, для всех орбит одинаково. Поэтому расстояние от  $S$  до второго фокуса тоже одинаково для всех орбит семейства, что и означает, что вторые фокусы всех орбит семейства лежат на указанной выше окружности.

Движение всех осколков происходит в ограниченной области пространства. Граница этой области обладает осевой симметрией, т.е. представляет собой поверхность вращения некоторой кривой вокруг оси, проходящей через центр Земли и начальную точку. Эта кривая, ограничивающая область движения осколков, показана тонкой линией на рис. 10. В каждой своей точке она касается одной из возможных

траекторий, т.е. является огибающей для рассматриваемого семейства эллипсов. Можно доказать (мы предоставляем это сделать читателю в качестве самостоятельного упражнения), что огибающая семейства эллиптических орбит представляет собой эллипс, один из фокусов которого находится в центре Земли, а второй – в общей для всех орбит начальной точке  $S$ .

Большая ось этого эллипса простирается от точки  $N$  (наиболее удаленной от центра Земли точки области, в которой движутся осколки, см. рис. 10) до точки  $A$  – точки области движения осколков, наиболее удаленной от начальной точки  $S$ . Точки  $A$  достигает тот осколок, который вылетел из начальной точки  $S$  в горизонтальном направлении (перпендикулярно радиусу-вектору). Его эллиптическая орбита в своем апогее  $A$  касается границы рассматриваемой области.

### **Относительное движение орбитальных тел**

Допустим, что два спутника обращаются вокруг Земли. Мы знаем, что их пассивное движение по орбитам происходит в соответствии с законами Кеплера. Но как один из них движется относительно другого? Именно относительное движение существенно, скажем, при причаливании и стыковке космических кораблей. Если два спутника находятся поблизости, и одному из них сообщают небольшую дополнительную скорость, дальнейшее относительное движение спутников не будет прямолинейным. Интуиция здесь подводит нас. Навигация в необычных условиях космического полета происходит совсем иначе, чем в привычных для нас земных условиях. При изучении относительного движения космических аппаратов обнаруживаются многие удивительные особенности, на первый взгляд противоречащие здравому смыслу и нашему повседневному опыту.

Ниже мы рассмотрим пассивное относительное движение орбитальных тел на примере движения небольшого предмета, брошенного космонавтом в свободный полет с борта орбитальной станции. Каким увидят движение предмета космонавты орбитальной станции, если он был брошен, скажем, в сторону Земли – вертикально вниз?

В рассуждениях на эту тему можно выделить несколько этапов. Сначала, без долгих размышлений и полагаясь на наш земной повседневный опыт, вряд ли бы мы удивились, если брошенный вниз предмет стал бы быстро падать на Землю. Но затем мы неизбежно вспоминаем о том, что орбитальная станция с космонавтами движется над Землей с огромной скоростью – более 7 километров в секунду! Какова начальная скорость брошенного со станции предмета? Броском руки можно сообщить небольшому предмету скорость около 10 – 20 м/с. Рассматривая движение предмета относительно Земли, мы должны сложить векторно эту скорость с орбитальной скоростью станции. Результирующая скорость будет лишь чуть-чуть отличаться по модулю и направлению от скорости орбитальной станции. Это значит, что брошенный космонавтом предмет просто перейдет на другую орбиту, которая почти не отличается от исходной орбиты станции. Как согласовать это заключение с нашим первым предположением, что предмет будет быстро падать на Землю?

Теперь пора перейти в наших рассуждениях к следующему, исследовательскому этапу. Мы резонно вспоминаем, что поставленный вопрос относится не к движению брошенного тела относительно Земли, а в первую очередь к тому, каким увидят это движение космонавты на станции. Иначе говоря, движение предмета следует рассматривать в системе отсчета, связанной с орбитальной станцией. Одна из программ пакета «Движение космических тел» позволяет наблюдать такое движение относительно Земли и относительно орбитальной станции на экране компьютера (см. рис. 11).

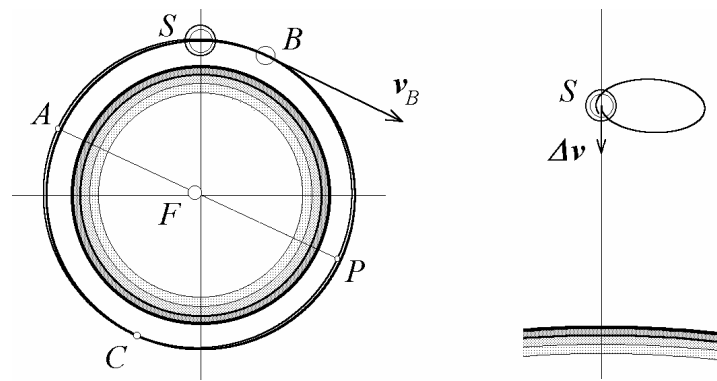


Рис. 11. Движение тела, брошенного в точке  $B$  вертикально вниз с орбитальной станции, как его видно с Земли (слева) и с орбитальной станции (справа).

Как видно из рис. 11, относительно станции брошенное тело сначала действительно движется вниз, в направлении дополнительной начальной скорости  $\Delta v$ . Однако вскоре траектория начинает отклоняться вперед, затем вверх и назад, и наконец, сколь бы странным это ни показалось, тело возвращается к станции с противоположной стороны (сверху), описав почти замкнутую траекторию! Чтобы выяснить физические причины столь странного движения тела относительно станции, следует сначала рассмотреть движение станции и тела относительно Земли. Эти движения показаны в левой части рис. 11.

Благодаря небольшой дополнительной начальной скорости, которую брошенное в точке  $B$  тело получило в направлении центра Земли, его дальнейшее геоцентрическое движение происходит по эллиптической орбите с очень малым эксцентриситетом. Один фокус эллипса расположен в центре Земли, а второй – в точке  $F$ , расположенной очень близко к центру. Этот эллипс на рисунке почти сливается с круговой орбитой станции. Лишь вблизи перигея  $P$  эллипс оказывается слегка внутри, а вблизи апогея  $A$  – слегка снаружи круговой орбиты. С хорошей точностью можно рассматривать этот эллипс как окружность того же радиуса, но с центром, смещенным из центра Земли в сторону  $F$  на половину расстояния до точки  $F$ . Большая ось этого эллипса почти равна диаметру исходной круговой орбиты. Поэтому, в соответствии с третьим законом Кеплера, периоды обращения тела и орбитальной станции почти совпадают.

Траектории тела и станции пересекаются в двух точках – начальной точке  $B$  и противоположной точке  $C$ . В точке  $C$  тело опять оказывается на одной высоте со станцией. Станция приходит в точку  $C$  ровно через половину периода своего равномерного обращения вокруг Земли. Но движение тела по своей эллиптической орбите слегка неравномерное, и тело приходит в точку  $C$  чуть раньше станции, потому что на этой половине оборота тело проходит через перигей своей орбиты, где, в соответствии со вторым законом Кеплера, его скорость больше скорости станции. В результате через пол-оборота, когда станция приходит в общую точку  $C$  двух орбит, тело оказывается впереди станции. В этот момент тело находится на максимальном удалении от станции. На второй половине оборота тело проходит через апогей  $A$  своей орбиты, где его скорость несколько меньше скорости станции. В результате тело приходит в общую начальную точку  $B$  почти одновременно со станцией, приближаясь к ней сверху. Таким образом, движение тела относительно станции происходит почти по замкнутой траектории. Один цикл этого движения совершается за время, равное периоду обращения станции по орбите.

Могут ли космонавты на самом деле наблюдать такое периодическое движение тела? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимы количественные оценки размеров почти замкнутой петли, описываемой телом относительно станции (см. правую часть рис. 11). В нижней и верхней точках относительной траектории тело находится в моменты прохождения соответственно через перигей  $P$  и апогей  $A$  своей геоцентрической эллиптической орбиты (см. левую часть рис. 11). Поэтому вертикальный полуразмер относительной траектории равен смещению перигея (или апогея) эллиптической орбиты относительно круговой орбиты станции. Это смещение равно произведению радиуса орбиты  $r_0$  на малый угол  $\Delta\alpha = \Delta v/v_c$  между направлениями векторов скоростей тела и станции в начальной точке  $C$ . Пусть, например, высота круговой орбиты станции равна десятой доле радиуса Земли  $R_3$ :  $h = 0.1 R_3 \approx 640$  км, так что радиус орбиты  $r_0$  составляет 7 000 км, а период обращения 98 минут. Допустим, что космонавт бросает тело со скоростью  $\Delta v = 15$  м/с, что составляет 0.2% орбитальной скорости  $v_c = 7.5$  км/с. Таким образом, для поперечного (вертикального) размера траектории относительного движения мы получаем оценку 28 км.

Маловероятно, чтобы космонавты могли видеть небольшой предмет на удалении более километра. Поэтому они могут проследить за движением брошенного предмета только на протяжении небольшого начального участка почти замкнутой траектории относительного движения. Скорее всего, они потеряют предмет из виду задолго до того, как станет заметным отклонение его траектории от прямой линии. Поэтому движение предмета будет представляться космонавтам как простое падение вниз, в направлении сообщенной ему начальной скорости!

Можно показать, что когда начальная относительная скорость, малая по сравнению с орбитальной скоростью, направлена точно перпендикулярно скорости станции, траектория относительного движения (см. рис. 11) представляет собой эллипс, большая ось которого вдвое больше малой (56 км в нашем численном примере). Тело будет периодически возвращаться к станции, когда дополнительная скорость направлена вертикально вниз (как в рассмотренном примере) или вверх, а также и тогда, когда у скорости есть составляющая, направленная «вбок», т.е. перпендикулярно плоскости орбиты. В последнем случае почти замкнутая траектория относительного движения будет уже пространственной (а не плоской) кривой. Но если у начальной скорости есть хотя бы небольшая составляющая *вдоль* орбитальной скорости станции, траектория относительного движения уже не будет замкнутой, т.е. брошенный предмет не будет возвращаться к станции. В относительном движении предмета, кроме периодических составляющих, будет присутствовать также и «вековой» член, вызывающий систематический «уход» тела от станции. Пример такого движения показан на рис. 12.

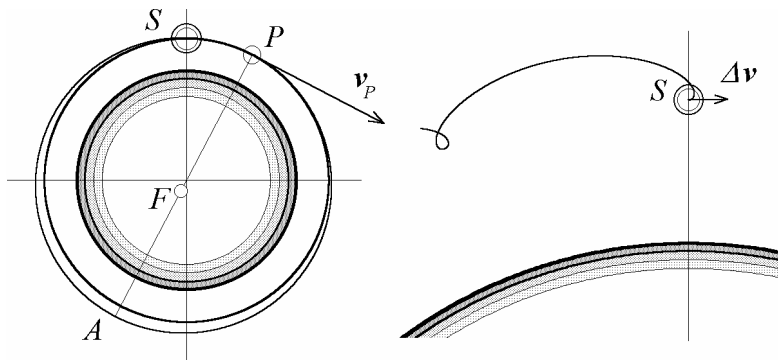


Рис. 12. Траектория предмета, брошенного со станции вперед в направлении орбитального движения.

Сначала тело действительно движется вперед, в направлении сообщенной ему дополнительной скорости, но вскоре отклоняется вверх и назад, постепенно отставая от станции. Тело периодически возвращается на высоту орбиты станции, но каждый раз все больше и больше отстает от станции. Чтобы понять такое поведение, можно обратиться к геоцентрическим траекториям, показанным в левой части рис. 12. Новая орбита тела представляет собой эллипс, касающийся круговой орбиты станции только в начальной точке  $P$  – перигее эллиптической орбиты. Апогей  $A$  этой орбиты расположен выше орбиты станции. Пройдя через апогей и приближаясь к перигею, тело опускается на прежнюю высоту. Но период обращения по эллипсу, в соответствии с третьим законом Кеплера, больше периода обращения станции. Поэтому через оборот по орбите тело приходит в общую точку  $P$  двух орбит позже, чем станция, и это отставание увеличивается с каждым оборотом.

### **Космический зонд**

Выше мы видели, что брошенный с орбитальной станции предмет возвращается к станции, если ему сообщить небольшую дополнительную скорость перпендикулярно орбитальной скорости станции. А можно ли получить замкнутую траекторию движения предмета относительно станции при сообщении ему произвольной (не малой) дополнительной скорости? Этот вопрос актуален, если нужно запустить «космический зонд» со станции, совершающей облет некоторой планеты. Такая автоматическая или обитаемая научная лаборатория должна, скажем, приблизиться к планете, произвести фотографирование ее поверхности и выполнить ряд измерений, а затем доставить накопленную информацию обратно на орбитальную станцию.

Возможный пример замкнутой траектории относительного движения показан на рис. 13. После отстыковки от станции реактивный двигатель сообщает зонду дополнительную скорость  $\Delta v$ , в результате чего зонд переходит на новую эллиптическую орбиту. Если новая геоцентрическая скорость зонда равна по модулю круговой скорости станции (т.е. если кратковременный реактивный импульс изменяет только направление скорости зонда), то период обращения зонда по эллиптической орбите будет равен периоду обращения станции, и через один оборот вокруг планеты произойдет их встреча в начальной точке. Неизменность модуля геоцентрической начальной скорости зонда всегда (в том числе и при большой дополнительной скорости) можно обеспечить должным выбором направления сообщаемой зонду дополнительной скорости  $\Delta v$ . Для этого у  $\Delta v$ , кроме радиальной (вертикальной) составляющей, должна быть составляющая, направленная назад по касательной к исходной круговой орбите. Замкнутая траектория относительного движения зонда показана в правой части рис. 13. Таким будет представляться движение зонда космонавтам на орбитальной станции.

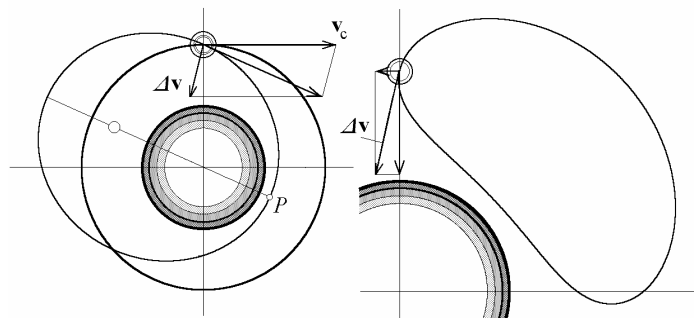


Рис. 13. Космический зонд с периодом обращения, равным периоду станции: геоцентрическая эллиптическая орбита (слева) и замкнутая траектория движения зонда относительно станции.

Чтобы обеспечить приближение зонда к поверхности планеты на заданную малую высоту, перигей  $P$  его геоцентрической орбиты (рис. 13) должен быть достаточно низким. Перевод зонда на такую орбиту может потребовать немалых затрат ракетного топлива. Наиболее экономичный способ получения орбиты с малой высотой перигея соответствует сообщению зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальной скорости станции. Пример такого зонда показан на рис. 14.

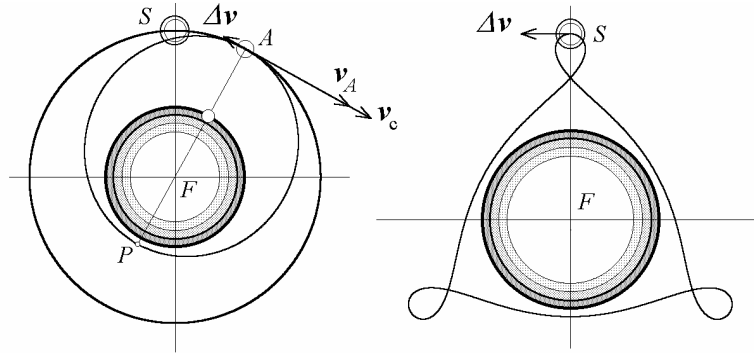


Рис. 14. Космический зонд с периодом обращения, равным  $2/3$  периода станции: геоцентрическая эллиптическая орбита (слева) и замкнутая траектория движения зонда относительно станции.

В результате маневра зонд переходит на эллиптическую орбиту, которая изнутри касается круговой орбиты станции в начальной точке  $A$ . Эта единственная общая точка двух орбит будет апогеем орбиты зонда. Поскольку большая полуось орбиты меньше радиуса орбиты станции  $r_0$ , зонд возвратится в  $A$  раньше, чем туда придет станция. Но его встреча со станцией может произойти на одном из следующих витков. Чтобы такие встречи время от времени происходили, периоды обращения зонда и станции должны относиться как (небольшие) целые числа. Желаемое соотношение периодов можно обеспечить должным выбором величины дополнительной скорости  $\Delta v$ . В примере на рис. 14 период зонда составляет  $2/3$  периода станции, для чего требуется характеристическая скорость  $\Delta v$ , составляющая около 17% круговой скорости (орбитальной скорости станции). В этом случае расстояние до перигея от центра планеты составляет  $0.53 r_0$ , т.е. такая орбита зонда оптимальна в случае, если радиус орбиты станции примерно вдвое больше радиуса планеты. Встреча зонда со станцией происходит после двух оборотов станции. За это время зонд совершает ровно три оборота по эллиптической орбите, трижды приближаясь к поверхности планеты. Правая часть рис. 14 показывает, сколь необычной представляется траектория такого зонда космонавтам орбитальной станции.

Во второй части данного пособия («Движения космических тел в компьютерных моделях. II. Задача многих тел») рассматриваются интересные (и необычные) примеры задачи трех и многих тел, связанных гравитационным взаимодействием.

## **Движения космических тел в компьютерных моделях. II. Задача многих тел**

### ***Введение. Аналитические и численные решения***

Точные аналитические решения дифференциальных уравнений движения замечательны тем, что описываемые такими решениями движения оказываются весьма простыми. В частности, классическая *задача Кеплера* о движении тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния, имеет аналитическое решение, которое описывает сравнительно простые возможные движения по коническим сечениям. К сожалению, точные решения редко встречаются в физике. При наличии возмущающих воздействий (тяготение других планет, отличие силы тяготения небесного тела от строгой сферической симметрии, и т.п.) уравнения движения становятся неинтегрируемыми. Присущее кеплеровым движениям «чудо» замкнутых орбит, равно как и замечательная их простота, бесследно исчезают. Математическое исследование возмущенных движений неизмеримо усложняется.

Когда возмущающие воздействия малы по сравнению с основной силой тяготения, можно использовать приближенные аналитические методы. В некоторых случаях допустимо принять кеплерово движение в качестве нулевого приближения, считая, что возмущения вызывают сравнительно медленные изменения параметров кеплеровой орбиты, и попытаться найти аналитические выражения для этих медленных изменений. В задачах о межпланетных перелетах можно применять приближенный аналитический метод сопряженных конических сечений (см. ниже). Когда же возмущения нельзя считать малыми, как, например, в общем случае так называемой *задачи трех тел*, даже приближенные решения получить не удастся. Тогда остается полагаться только на численные методы решения уравнений движения.

Поясним идею численных методов расчета движения. Пусть для некоторого начального момента времени заданы положение и скорость рассматриваемого космического тела (планеты, космического аппарата), а также расположение всех небесных тел, сообщающих ему ускорение своими силами тяготения. На основе закона всемирного тяготения можно вычислить гравитационное ускорение, сообщаемое данному телу каждым небесным телом в отдельности, а значит, и полное ускорение как векторную сумму этих ускорений. Зная величину и направление скорости тела, можно, учитывая вычисленное ускорение и считая его постоянным, рассчитать положение и скорость тела через небольшой промежуток времени («шаг» интегрирования). Для найденного нового положения можно снова рассчитать ускорение тела, и затем по той же схеме рассчитать следующее положение тела и его скорость, и так далее. Таким путем можно шаг за шагом проследить все движение рассматриваемого тела.

Единственное приближение, которое при этом приходится допускать, заключается в том, что в течение каждого небольшого промежутка времени (шага расчета) ускорение тела считается постоянным, тогда как на самом деле оно все время изменяется. Но точность расчета можно повысить, уменьшая шаг интегрирования. Конечно, за повышение точности приходится платить увеличением объема вычислений.

Мы описали здесь так называемый алгоритм Эйлера численного интегрирования уравнений движения, известный также как метод ломаных. Этот метод дает сравнительно невысокую точность и приводит к накапливающимся ошибкам. Суще-



ствуется множество улучшенных модификаций алгоритма Эйлера. Например, можно предсказать для очередного шага новые положения тел (а значит и новые ускорения в конце этого шага), а затем повторить этот шаг еще раз, взяв для ускорения каждого из тел среднее между ускорением в начале данного шага и предсказанным ускорением для конца шага. При компьютерном моделировании обычно используют несколько более сложный метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности, лишенный недостатков, присущих простому методу Эйлера. Метод Рунге – Кутты использован и в пакете программ «Движения космических тел», прилагаемом к данной статье. На практике проверить качество используемого численного алгоритма можно, применяя его к задаче Кеплера, и сравнивая результат с известным аналитическим решением.

При добавлении еще одного тела к системе двух взаимодействующих тел задача в общем случае становится аналитически неразрешимой, в то время как при использовании численных методов никаких принципиальных трудностей не возникает, лишь несколько возрастает объем необходимых вычислений.

## ***Прецессия экваториальной орбиты спутника планеты***

Нашу планету можно считать сферически симметричной лишь в первом приближении. Основное отклонение вызвано «сплюснутостью» земного шара, у которого полярный радиус на 21 км короче экваториального. Поэтому гравитационное поле Земли не имеет строгой сферической симметрии. В небесной механике Землю иногда представляют в виде шара с надетым на него по экватору массивным обручем, т.е. вместо полярного сжатия используют эквивалентное представление об экваториальном «вздутии» Земли. В выражении для силы тяготения, действующей на спутник Земли, благодаря экваториальному «обручу» присутствует дополнительный член с осевой симметрией. При учете таких искажений поля тяготения движение спутника происходит уже не по кеплерову эллипсу, а по весьма сложной траектории, в общем случае не замкнутой и не лежащей в одной плоскости. После совершения одного оборота спутник уже не попадает в прежнюю точку.

Для спутника, находящегося на очень большом расстоянии от Земли, фактическое распределение массы Земли несущественно. Другими словами, на очень большом расстоянии поле тяготения Земли можно считать таким, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре: сила тяготения убывает обратно пропорционально *квадрату* расстояния. Искажение центрального поля тяготения планеты, вызванное ее сплюснутостью вдоль оси, описывается малым дополнительным членом, убывающим гораздо быстрее – обратно пропорционально *четвертой* степени расстояния до центра планеты. Дополнительная сила тяготения, действующая на спутник со стороны массивного экваториального «обруча», в общем случае не направлена к центру обруча. Поэтому полная сила тяготения характеризуется только осевой (а не сферической) симметрией.

Когда искажения сферически симметричного поля тяготения невелики, удобно считать, что спутник движется по эллипсу, но сам этот эллипс непрерывно изменяется. Такую кеплерову орбиту с постепенно изменяющимися параметрами Лагранж назвал *оскулирующей*. Из-за отсутствия сферической симметрии плоскость оскулирующей орбиты постепенно поворачивается в пространстве. При этом угол между осью Земли и плоскостью орбиты остается неизменным, т.е. плоскость орбиты медленно *прецессирует* вокруг земной оси.

При движении в экваториальной плоскости планеты задача упрощается, ибо дополнительная сила притяжения спутника «обручем» направлена к центру, т.е. как

и в случае сферически симметричной планеты зависит только от расстояния  $r$  до центра планеты. Но эта зависимость становится более сложной: к главному члену, обратно пропорциональному квадрату расстояния, добавляется небольшой член, обратно пропорциональный четвертой степени расстояния  $r$ :

$$F = -G \frac{mM}{r^2} \left(1 + b \frac{R^2}{r^2}\right).$$

В этой формуле  $G$  – гравитационная постоянная,  $m$  – масса спутника,  $M$  – масса планеты,  $R$  – ее экваториальный радиус. Значение безразмерной константы  $b$  зависит от степени «сплюснутости» планеты: оно равно отношению дополнительного члена силы тяготения к главному (ньютоновскому) члену на расстоянии  $R$  от центра планеты.

В случае осевого сжатия планеты константа  $b$  положительна ( $b > 0$ ). У Земли «сплюснутость» невелика: значение безразмерной постоянной  $b$  составляет всего лишь 0,0016. Для гипотетической планеты, вытянутой вдоль оси (похожей на мяч для регби), константа  $b$  отрицательна ( $b < 0$ ). В последнем случае можно представлять себе планету в виде шара с дополнительными точечными массами на полюсах – своего рода полярными «шапками». В первом случае дополнительный член усиливает притяжение экваториального спутника к планете на малых расстояниях, а во втором – ослабляет (по сравнению со случаем сферически симметричного распределения масс, когда всю массу планеты можно считать сосредоточенной в ее центре).

Наличие дополнительного члена у силы тяготения, быстрее (по сравнению с основным) убывающего с расстоянием, особенно заметно сказывается на сильно вытянутых орбитах спутников, вызывая постепенный поворот большой оси эллипса вокруг фокуса при неизменных максимальном и минимальном расстояниях от центра планеты. Такой непрерывный поворот орбиты обычно называют *прецессией*.

Качественное объяснение прецессии вытянутой орбиты заключается в следующем. На больших расстояниях от планеты поле тяготения почти не отличается от кулоновского, и можно считать, что движение спутника происходит по кеплерову эллипсу. По мере приближения к планете роль дополнительного члена силы тяготения возрастает (он сильнее зависит от расстояния). Вблизи планеты сила тяготения в экваториальной плоскости больше, чем в случае шарообразной планеты такой же массы, и соответственно сообщаемое этой силой спутнику ускорение больше, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу. В результате вблизи планеты траектория искривляется сильнее, что можно трактовать как поворот большой оси эллипса вокруг центра планеты. Такой поворот, как легко видеть, происходит в направлении орбитального движения спутника. У Земли реальная сплюснутость мала, поэтому большая ось эллиптической орбиты за один оборот спутника поворачивается на очень малый угол, однако этот эффект накапливается за большое число оборотов по орбите.

Наблюдаемая в моделирующем эксперименте прецессия экваториальной орбиты в поле тяготения «сплюснутой» планеты иллюстрируется на рис. 15. Чтобы эффект был более заметен, при моделировании можно задавать утрированно большие значения (порядка единицы) безразмерного параметра  $b$ , характеризующего несферичность планеты и входящего в дополнительный член силы притяжения.

Тонкими линиями на рис. 15 показаны оскулирующие эллипсы для трех точек ( $S$ ,  $A$  и  $B$ ) траектории. Если бы дополнительный член в выражении для силы тяготения внезапно исчез, все параметры оскулирующего эллипса в дальнейшем оставались бы неизменными, и движение спутника происходило бы по эллипсу, касающемуся действительной траектории в рассматриваемой точке. Этот эллипс дает пред-

ставление о характере истинной траектории по крайней мере для некоторой окрестности данной точки.

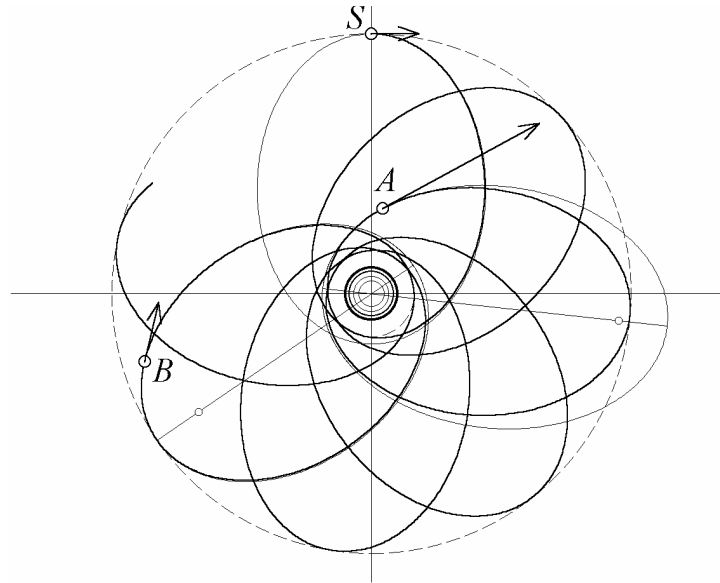


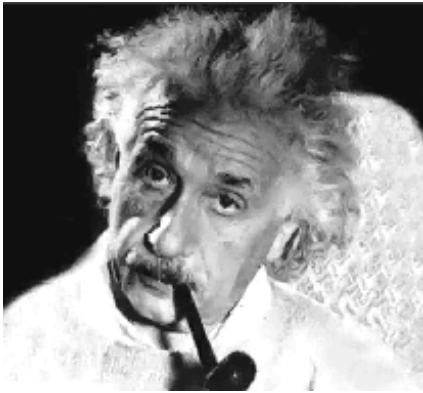
Рис. 15. Прецессия орбиты спутника, который обращается в экваториальной плоскости вокруг планеты, «сплюснутой» вдоль оси.

Действительное движение спутника характеризуется двумя периодами: одним для радиального движения между максимальным и минимальным удалениями от центра (для периодических изменений модуля радиуса-вектора), и другим – для полного оборота радиуса-вектора. В общем случае эти периоды несоизмеримы, и многопетлистая траектория всюду плотно заполняет кольцевую область между окрестностями, показанными штриховыми линиями на рис. 15. «Чудо» замкнутых кеплеровых эллиптических орбит обусловлено точным совпадением этих двух периодов при движении под действием центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния.

В случае осевого «растяжения» планеты (или при наличии массивных полярных «шапок») дополнительный член силы тяготения в экваториальной плоскости отрицателен ( $b < 0$ ), так как на малых расстояниях от планеты сила тяготения меньше, чем при сферически симметричном распределении масс. В самом деле, при приближении к планете расстояние до полярных «шапок» уменьшается медленнее, чем расстояние до ее центра. В этом случае при приближении к планете сила тяготения сообщает спутнику меньшее ускорение, чем необходимо для движения по кеплерову эллипсу, и этот эллипс как бы «распрямляется» вблизи перигея. В результате прецессия орбиты происходит в направлении, противоположном орбитальному движению спутника.

Деформация центрального тела (т.е. отклонение поля тяготения от сферической симметрии) – не единственная причина возможной прецессии орбиты спутника. Прецессия большой оси эллиптической орбиты планеты может быть вызвана гравитационными возмущениями со стороны других планет. В нашей планетной системе этот эффект наиболее значителен для Меркурия – самой близкой к Солнцу планеты. Расчеты показывают, что поля тяготения других планет действительно должны вызывать наблюдаемую астрономами прецессию орбиты Меркурия, но остается крошечное расхождение между расчетами и наблюдениями. Это расхождение составляет всего 43'' (43 угловых секунды!) за столетие, и ему не находится объяснения в

рамках ньютоновской теории тяготения. Исчерпывающее количественное объяснение прецессия перигелия эллиптической орбиты Меркурия получила лишь в созданной Эйнштейном релятивистской теории тяготения.



Альберт Эйнштейн

### ***Спутник планеты, обращающейся вокруг звезды***

Движение планет вокруг Солнца почти целиком определяется силами их притяжения к Солнцу. Из-за того, что массы планет малы по сравнению с массой Солнца, действующие между планетами силы тяготения приводят лишь к сравнительно небольшим отклонениям от законов Кеплера. В случае звезды с единственной планетой движение планеты было бы в точности кеплеровым.

Но что можно сказать о движении спутника планеты? В какой мере это движение можно считать кеплеровым? Ведь помимо силы притяжения к планете на спутник действует сила притяжения к Солнцу. Например, сила притяжения к Солнцу нашего естественного спутника – Луны, как легко подсчитать, превосходит силу притяжения к Земле. В каком же смысле можно говорить об обращении Луны вокруг Земли?

Дело в том, что при описании движения спутника планеты мы рассматриваем его движение *относительно планеты*, а не относительно Солнца. А система отсчета, связанная с планетой, не является инерциальной: она вместе с планетой подвержена ускорению, направленному к Солнцу. Когда спутник находится близко к планете, солнечное притяжение сообщает ему почти такое же ускорение, как и самой планете. Поэтому вмешательство Солнца в движение спутника относительно планеты оказывается незначительным: в главных чертах это движение описывается законами Кеплера. Тяготение к Солнцу проявляется в *возмущающем ускорении*, которое равно не ускорению, сообщаемому спутнику Солнцем, а *разности ускорений*, сообщаемых Солнцем спутнику и планете. Кеплерово движение спутника относительно Земли возмущается не самим по себе солнечным тяготением, а лишь его *неоднородностью*. В земных делах неоднородность поля тяготения Солнца обнаруживает себя (вместе с неоднородностью поля тяготения Луны) в морских приливах.

На протяжении околоземной орбиты спутника неоднородность поля тяготения Солнца незначительна. Поэтому при расчете движения спутника вблизи планеты оказывается возможным в первом приближении учитывать его притяжение только планетой. Для спутника, масса которого много меньше массы планеты, это будет просто кеплерово движение в центральном поле тяготения планеты. Орбита спутника относительно планеты может быть эллипсом или окружностью, а пролетная траектория космического аппарата – параболой или гиперболой. Сложная петлеобраз-

ная или волнообразная траектория спутника в системе отсчета, связанной со звездой, объясняется сложением двух движений: движения по большой окружности (или эллипсу) вместе с планетой вокруг звезды и обращения вокруг звезды по малой окружности (или малому эллипсу).

Будем называть кеплерово движение спутника относительно планеты *невозмущенным* движением. Движение спутников по орбитам, пролегающим сравнительно недалеко от планеты, с хорошей точностью можно считать невозмущенным, но при значительном удалении спутника от планеты возмущающее влияние неоднородности поля солнечного тяготения становится существенным. Для каждой планеты можно указать окружающую ее область невозмущенного движения спутников. В небесной механике и космической динамике такую область называют *сферой действия* планеты относительно Солнца.

При приближенном анализе движения спутника (космического корабля и вообще тела пренебрежимо малой массы) под действием сил тяготения планеты и Солнца (т.е. при приближенном решении *ограниченной* задачи трех тел) можно использовать так называемый *метод сопряженных конических сечений*. Идея его заключается в следующем.

Пока спутник движется в окрестности планеты в пределах сферы ее действия, движение рассматривается как кеплерово *планетоцентрическое* (в частности, геоцентрическое), происходящее по эллипсу, параболе или гиперболе. При переходе через границу сферы действия спутник (космический аппарат) попадает во власть Солнца, и его движение естественнее рассматривать как кеплерово *гелиоцентрическое* с фокусом в центре Солнца. На границе сферы действия планетоцентрическая и гелиоцентрическая траектории сопрягаются («склеиваются», «сшиваются») по определенным правилам (с пересчетом скорости при переходе от одной системы отсчета к другой).

Приближенный метод сопряженных конических сечений широко используется в механике космического полета при предварительном проектировании орбит межпланетных перелетов. В частности, его применяют при отборе возможных траекторий в задаче достижения Луны.

Когда орбита спутника лежит глубоко внутри сферы действия планеты, движение спутника устойчиво, т.е. он обречен вечно обращаться вокруг планеты. В случае орбиты спутника, приближающейся к границе сферы действия планеты, возможны разнообразные варианты неустойчивых движений, оканчивающихся падением спутника на планету или на звезду, либо «выбрасыванием» спутника за пределы системы.

Возможны также очень интересные движения, сопровождающиеся переходом спутника от обращения вокруг планеты к обращению вокруг звезды (когда спутник превращается в самостоятельную планету). Может оказаться, что через некоторое время такой потерянный планетой спутник снова окажется захваченным планетой. Подобная «перепасовка» спутником между планетой и звездой в этом «космическом баскетболе» может повторяться неоднократно. Рис. 16 дает пример такого хаотического движения спутника некоторой планеты, обращающейся вокруг звезды по эллиптической орбите с небольшим эксцентриситетом.

В пакете программ «Движения космических тел» (и в «Коллекции замечательных движений в системах трех тел») можно найти много подобных примеров необычайно сложного поведения систем, подчиняющихся простым и строгим физическим законам.

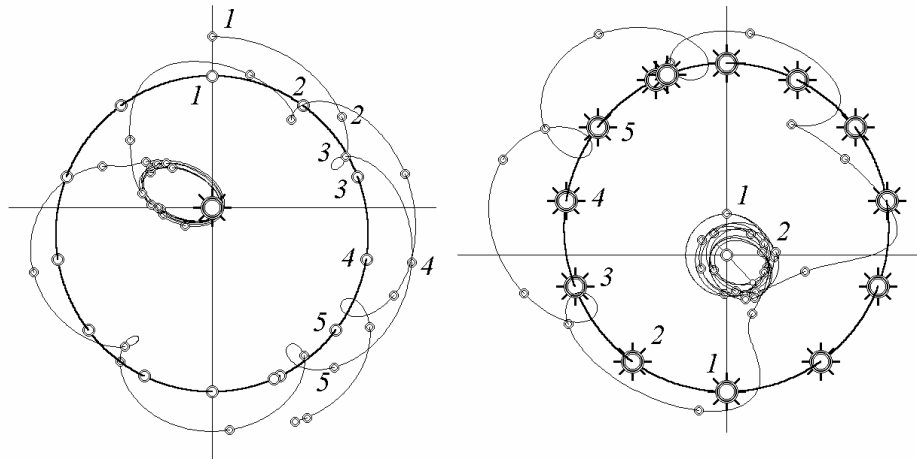


Рис. 16. Траектория спутника, поочередно обращающегося вокруг планеты и вокруг звезды. Слева движение показано в «гелиоцентрической» (связанной со звездой) системе отсчета, справа – в «геоцентрической» (связанной с планетой) системе отсчета. Совпадающие цифры соответствуют одновременным положениям небесных тел.

Для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих хаотическое движение спутника, которое наблюдается в приведенном примере, характерна чрезвычайно сильная чувствительность к начальным условиям: ничтожное изменение начального состояния может привести к радикальным изменениям в долгосрочном поведении системы. Небесная механика дает нам один из многочисленных примеров хаотических движений в физике. Можно думать, что отсутствие аналитических решений в подобных случаях отражает не столько бессилие математики, сколько возможную сложность движений в системах, описываемых нелинейными уравнениями.

## Двойная звезда – задача двух тел

До сих пор мы говорили о движении тела под действием центральной силы тяготения в предположении, что масса центрального тела значительно превосходит массу тела, обращающегося по орбите. В этом случае массивное центральное тело (Солнце в задаче о движении планет или Землю в задаче о движении спутников) можно приближенно считать неподвижным, и задача сводится к нахождению движения легкого тела в заданном стационарном поле тяготения.

В общем случае, когда массы взаимодействующих тел сопоставимы, такое приближение несправедливо, так как ни одно из тел не будет неподвижным в инерциальной системе отсчета. Гравитация – это взаимодействие, и если Земля притягивает Луну, то и Луна в такой же мере притягивает Землю. Поэтому, строго говоря, не следует говорить, что Луна обращается вокруг Земли – на самом деле оба тела движутся, обращаясь вокруг общего центра масс.

Благодаря тому, что силы взаимодействия между телами подчиняются третьему закону Ньютона (т.е. эти силы равны по модулю и противоположно направлены), задачу двух тел можно математически свести к задаче о движении единственного «виртуального» тела с так называемой *приведенной массой*  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , движущегося под действием стационарной силы, равной силе взаимодействия «настоящих» тел. В результате удастся найти движение одного тела относительно другого. Когда тела взаимодействуют с силой тяготения, обратно пропорциональной

квадрату расстояния, это относительное движение происходит по коническим сечениям в соответствии с законами Кеплера.

Зная, как одно из тел движется вокруг другого по эллипсу (скажем, в системе двойной звезды), можно показать, что оба гравитационно связанных тела движутся синхронно по геометрически подобным эллипсам вокруг общего центра масс всей системы. Пример такого движения показан на рис. 17. В каждый момент времени компоненты двойной звезды находятся на противоположных концах отрезка, проходящего через центр масс, и делят этот отрезок в отношении, обратном пропорциональному своим массам.

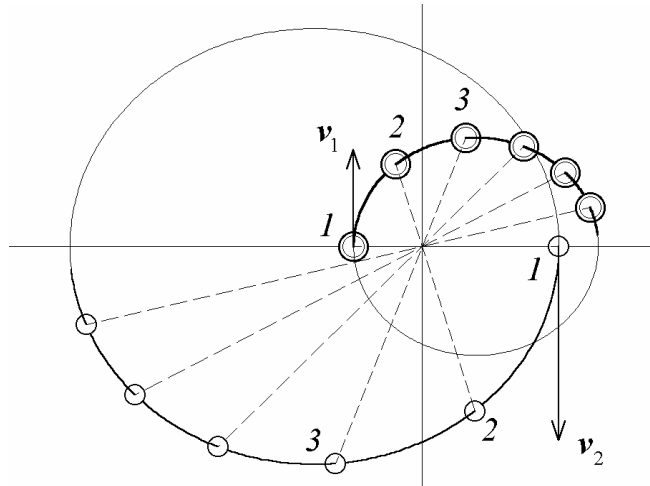


Рис. 17. Траектории компонент двойной звезды в системе отсчета, связанной с центром масс системы. Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами.

Традиционный подход к задаче двух тел, основанный на концепции приведенной массы, будучи вполне корректным и достаточно простым в математическом отношении, может тем не менее вызывать определенные логические трудности у учащихся, так как позволяет рассматривать связанную с одним из тел неинерциальную систему отсчета как инерциальную. Объяснение этого кажущегося несоответствия может оказаться для учащихся слишком тонким моментом при первоначальном изучении предмета. Более того, переход от одной системы отсчета к другой в этой задаче может также показаться непростым делом. Ведь в свое время и Галилей, и Коперник столкнулись с немалыми трудностями в попытках донести такие идеи до человечества. Поэтому здесь мы предложим несколько иной подход к задаче двух тел, свободный от вышеупомянутых трудностей. Аналогичный подход будет использован в этой статье и для объяснения возможных простых движений в системах многих тел.

Будем относить движение каждого из тел (каждой из компонент двойной звезды) к инерциальной системе отсчета, в которой центр масс всей системы покоится. Направление силы тяготения, приложенной к каждому из тел со стороны другого, всегда проходит через неподвижный центр масс системы. Чтобы объяснить, почему движения тел происходят по коническим сечениям и подчиняются законам Кеплера, достаточно показать, что каждое из тел можно рассматривать как движущееся не под действием силы тяготения другого движущегося тела, а под действием центральной силы тяготения, создаваемой некоторым неподвижным источником, расположенным в центре масс системы. Этот воображаемый источник характеризуется определенной эффективной массой  $M_{эфф}$ . Действительно, пусть  $r_1$  и  $r_2$  обозначают расстояния тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно от центра масс системы. Тогда, очевидно,  $m_1 r_1 =$

$m_2 r_2$ , и, следовательно,  $r_1 + r_2 = (1 + m_1/m_2) r_1$ . Последнее соотношение позволяет выразить приложенную к первому телу со стороны второго силу тяготения  $F_1$  только через расстояние  $r_1$  первого тела от центра масс:

$$F_1 = -G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_1^2 (1 + m_1/m_2)^2} = -G \frac{m_1 M_{\text{эфф}}}{r_1^2}, \quad \text{где } M_{\text{эфф}} = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Таким образом, в инерциальной системе отсчета движение первого из тел будет в точности таким, как если бы на него действовала обратно пропорциональная квадрату расстояния  $r_1$  от центра масс сила тяготения  $F_1$ , создаваемая неподвижным источником с массой  $M_{\text{эфф}}$ , а не другим движущимся телом. Как мы знаем, такое движение происходит в соответствии с законами Кеплера. Аналогичные соображения применимы и ко второму телу. Остается лишь показать, что кеплеровы движения обоих тел происходят синхронно по геометрически подобным коническим сечениям, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. Последнее утверждение немедленно следует из соотношения  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$  между радиусами-векторами тел относительно центра масс, которое связывает положения движущихся тел в каждый момент времени.

В какой-либо иной инерциальной системе отсчета, относительно которой центр масс системы находится в движении, тела описывают замысловатые волнообразные или петлеобразные траектории. Пример такого движения показан на рис. 18. Кажущаяся сложность траекторий порождается здесь сложением сравнительно простых периодических кеплеровых движений каждого из тел относительно центра масс с равномерным прямолинейным движением системы как целого.

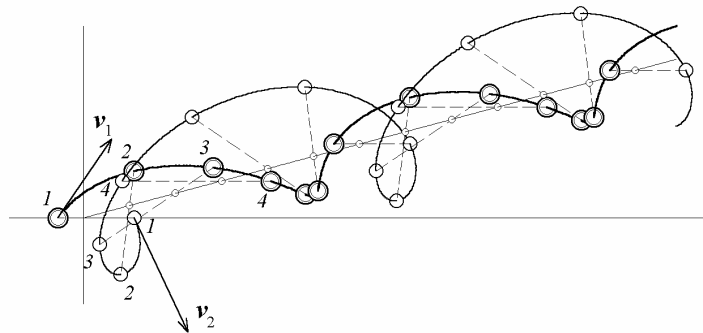


Рис. 18. Траектории компонент двойной звезды в произвольной инерциальной системе отсчета. Одновременные положения тел отмечены одинаковыми цифрами. Тонкой прямой линией показана траектория центра масс.

Двойная звезда называется *визуальной* двойной, если ее компоненты находятся на угловом расстоянии, достаточном для их разрешения (раздельного наблюдения) с помощью оптического телескопа. Измеряя период обращения и размер орбиты относительного движения, можно определить сумму масс компонент. Чтобы определить массы отдельных компонент, нужно измерить орбиты, описываемые ими относительно центра масс. В настоящее время известны тысячи визуальных двойных с периодами обращения от нескольких лет до многих тысяч лет.

Звезду называют *астрометрической* двойной, когда свечение одной из ее компонент слишком слабое для наблюдения в телескоп, а о ее присутствии можно судить по сложному движению видимой компоненты на фоне далеких неподвижных звезд. Таким способом были впервые обнаружены *белые карлики* – компактные звездные объекты, возникающие как конечный продукт эволюции звезд сравнительно



но небольшой массы. В частности, сложная волнообразная траектория Сириуса, измеренная по отношению к другим звездам, свидетельствовала о присутствии невидимого спутника, который впоследствии удалось зарегистрировать и оптическими средствами.

В *спектроскопических* двойных звездах компоненты настолько близки, что обычно не поддаются разделению наблюдению в оптический телескоп, но их относительное движение можно зарегистрировать по периодическим изменениям в спектре излучения. Вариации спектра вызываются доплеровским сдвигом спектральных линий. Этот сдвиг возникает тогда, когда в периодическом относительном движении отличны от нуля проекции скоростей компонент на направление луча, распространяющегося в сторону Земли. В последние годы таким способом удалось обнаружить в нашей Галактике множество звезд с обращающимися вокруг них массивными планетами.

### **Планета в системе двойной звезды**

Наша Земля входит в планетную систему одиночной звезды – Солнца, причем планеты Солнечной системы находятся одна от другой на достаточно больших расстояниях. Массы планет намного меньше массы центрального тела – Солнца. Благодаря этим особенностям строения Солнечной системы движение планет в главных чертах оказывается весьма простым. Основное влияние на движение каждой из планет оказывает сила тяготения Солнца, а влиянием тяготения других планет в первом приближении можно пренебречь. Поэтому с хорошей точностью движение планет описывается законами Кеплера. Как резонно отмечает В. В. Белецкий в книге «Очерки о движении космических тел» (издательство «Наука», Москва, 1977), в этом отношении человечеству повезло: за сравнительно короткий срок ему удалось, во-первых, постичь законы движения планет (Кеплер) и, во-вторых, объяснить их (Ньютон).

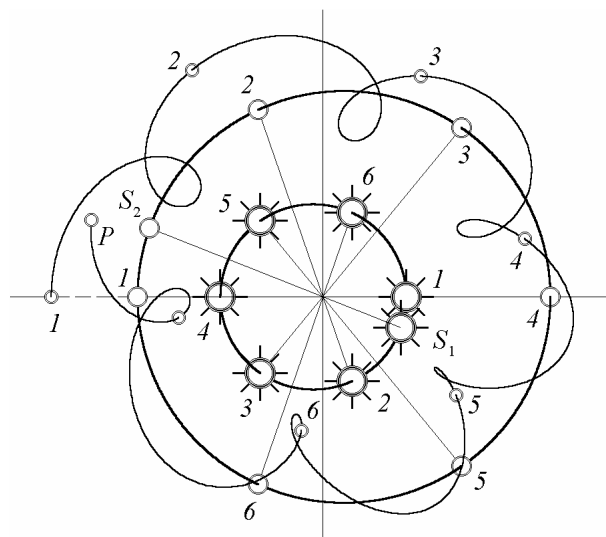


Рис. 19. Траектория планеты  $P$ , обращающейся вокруг одной из компонент ( $S_2$ ) двойной звезды  $S_1 - S_2$ . Совпадающие цифры соответствуют одновременным положениям тел.

Большое число звезд в Галактике представляет собой кратные системы – двойные и тройные, в отличие от одиночных звезд, подобных нашему Солнцу. Компоненты двойной звезды под действием сил взаимного тяготения совершают орбитальные движения вокруг центра масс по геометрически подобным эллиптическим

(или круговым) кеплеровым орбитам. В системе кратных звезд также возможно существование планет, в том числе и с устойчивыми орбитами. Траектории таких планет будут очень сложными. Рис. 19 дает пример возможного движения планеты, обращающейся вокруг одной из компонент двойной звезды. По наблюдениям за такими планетами было бы совсем не просто выявить закономерности их движений, и уж совсем трудно было бы понять, что эти закономерности обусловлены простым законом притяжения планеты к каждой из звезд. Можно думать, что развитие цивилизации на планете, входящей в систему двойной звезды, происходило бы медленнее, чем на Земле, так как там ученые находились бы в значительно худших условиях для познания законов Природы. Земному человечеству удалось сравнительно быстро пройти этот тяжкий путь познания.

Более того, можно без большой иронии предположить, что открытие закона всемирного тяготения было бы намного более трудным делом, если бы вскоре после установления Кеплером закономерностей планетных движений появились бы данные более точных астрономических наблюдений по сравнению с наблюдениями Тихо Браге. В самом деле, в более точных наблюдениях с неизбежностью обнаружались бы отклонения от законов Кеплера. Эту страницу в истории науки можно рассматривать как свидетельство в пользу парадоксального утверждения, что увеличение точности экспериментальных данных, достигнутое слишком рано, может стать тормозом прогресса в науке. Гете в своих заметках под названием «Размышления в духе странников» пишет, что запас наблюдений приносит науке сначала пользу, потом вред, так как благодаря множеству наблюдений замечают не только правило, но также исключения, а истину как среднее между ними не выведешь.

Если масса планеты много меньше масс компонент двойной звезды, ее влиянием на движение этих компонент можно пренебречь. В таком случае мы здесь имеем дело с *ограниченной задачей трех тел*, когда компоненты двойной звезды обращаются вокруг центра масс по кеплеровым эллипсам только под действием сил притяжения друг к другу (как в задаче двух тел), в то время как движение планеты определяется силами притяжения обеих звезд. В математическом отношении даже ограниченная задача трех тел чрезвычайно трудна, и в общем случае не имеет аналитического решения. Другими словами, не существует формул, представляющих движение планеты и позволяющих вычислить ее положение в пространстве при произвольных начальных условиях, несмотря на то, что звезды движутся по простым кеплеровым эллипсам. Конечно, дело здесь не только в математической сложности задачи, но и в исключительной сложности самих движений. Между тем, при численном решении такой задачи никаких принципиальных математических затруднений не возникает. Задача трех тел численно решается так же просто, как и задача двух тел; лишь увеличивается объем необходимых вычислений. Однако следует иметь в виду, что численные методы далеко не всемогущи. Для расчета движения и предсказания положения планеты через большой промежуток времени требуется очень точно знать ее начальное состояние. И тем более численные методы не позволяют изучать наиболее общие свойства движений небесных тел.

Задача трех тел во многих курсах механики приводится как пример чрезвычайной сложности возможных движений в механических системах, подчиняющихся простым и точным законам физики. Однако еще со времен Лагранжа хорошо известно, что для неразрешимой в общем случае задачи многих тел существует несколько частных решений, описывающих простые кеплеровы движения тел, входящих в систему. Поразительно, что конечное множество неожиданно простых движений, описываемых лагранжевыми решениями, выпадает из бесконечного разнообразия необычайно сложных движений, характерных для общего случая задачи трех тел. И

эти простые движения несомненно должны допускать в равной мере простое физическое объяснение.

В серьезных курсах небесной механики простые результаты, касающиеся так называемых лагранжевых точек либрации, появляются из нагромождения чудовищно сложных формул, и потому не приносят эстетического удовлетворения: мы вправе ожидать, что простые и красивые результаты заслуживают столь же простых и ясных способов их получения. Ниже мы предлагаем простое физическое объяснение известным точным частным решениям задачи многих тел. Мы утверждаем, что в тех случаях, когда движения отдельных тел, связанных гравитационными взаимодействиями в системе многих тел, происходят вдоль конических сечений, каждое из тел можно рассматривать как движущееся не под действием нескольких сил тяготения, создаваемых другими движущимися телами, а под действием единственной центральной силы тяготения, создаваемой некоторым неподвижным источником, расположенным в центре масс системы. Сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от такого воображаемого точечного источника, характеризуемого эффективной массой  $M_{эфф}$ . При выполнении определенных условий эффективное гравитационное поле, действующее на каждое из тел системы, может быть стационарным, несмотря на то, что создается это поле движущимися телами. Такой подход был проиллюстрирован выше на примере системы двух тел.

Анализ точных частных решений задачи многих тел мы начнем с простейшего примера симметричной системы трех тел в коллинеарной конфигурации.

### **Коллинеарная симметричная система трех тел**

Пусть две планеты  $A$  и  $B$  имеют одинаковые массы, и в начальный момент расположены на одинаковых расстояниях от звезды  $S$  на одной прямой со звездой с противоположных сторон от нее (см. левую часть рис. 20). Если при этом скорости планет равны и направлены в противоположные стороны, то, как легко видеть, симметричное взаимное расположение всех трех тел такой гипотетической планетной системы будет сохраняться и при последующем движении.

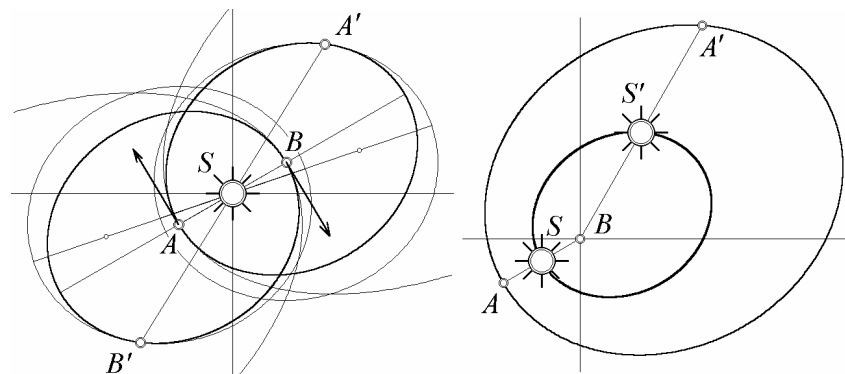


Рис. 20. Кеплеровы движения, описываемые точным частным решением задачи трех тел (симметричное расположение одинаковых массивных планет  $A$  и  $B$  относительно звезды  $S$ ), в системе отсчета центра масс (слева) и системе отсчета, связанной с планетой  $B$  (справа).

Покажем, что движение планет при этом будет кеплеровым. Центр масс системы в начальный момент находится в центре звезды, и при равных и противоположно направленных скоростях планет будет оставаться там и в дальнейшем. Сила, действующая на каждую из планет, складывается из притяжения к звезде и к другой планете. Эта суммарная сила будет центральной (направленной в каждый момент к цен-

тру звезды), а ее величина будет обратно пропорциональна квадрату расстояния до звезды. В самом деле,

$$F = G \frac{mM}{r^2} + G \frac{mm}{(2r)^2} = G \frac{m(M + m/4)}{r^2}.$$

В этой формуле  $M$  – масса звезды,  $m$  – масса каждой из планет,  $r$  – расстояние от любой из планет до звезды. Из такого выражения для силы следует, что движение каждой из планет будет происходить по кеплерову эллипсу так, как если бы планета притягивалась только звездой, имеющей массу  $M_{эфф} = M + m/4$ , и не испытывала бы никакого возмущения со стороны второй планеты. Планеты в такой системе движутся по одинаковым эллипсам с общим фокусом в центре масс системы, находясь в каждый момент на противоположных концах отрезка, проходящего через звезду. Эллиптические орбиты планет показаны жирными линиями в левой части рис. 20. Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым каждая из планет двигалась бы (относительно звезды) только под действием притяжения звезды, т.е. если бы вторая планета внезапно исчезла. Эти оскулирующие эллипсы, касающиеся действительных орбит, показаны для перигелиев  $A$  и  $B$  (только части эллипсов) и для точек  $A'$  и  $B'$ , расположенных ближе к афелиям действительных орбит (целые эллипсы). В правой части рис. 20 показаны траектории звезды  $S$  и планеты  $A$  в системе отсчета, связанной с планетой  $B$ .

Рассматриваемая система иллюстрирует частный случай одного из лагранжевых точных решений задачи трех тел, когда звезда  $S$  находится во внутренней коллинеарной точке либрации двух массивных тел  $A$  и  $B$ .

Симметричная конфигурация системы сохраняется при движении тел лишь при условии, что начальные скорости планет относительно звезды в точности равны по модулю и противоположно направлены. Если же это условие не выполнено, или начальные расстояния планет от звезды не точно равны, или три тела не лежат точно на одной прямой, траектории планет рано или поздно начнут отклоняться от кеплеровых эллипсов, и эти отклонения будут прогрессивно нарастать. Через некоторое время движение системы становится нерегулярным и очень сложным. Это значит, что периодическое движение системы, описываемое рассмотренным частным решением задачи трех тел, неустойчиво. Рис. 21 иллюстрирует эту неустойчивость для случая, когда начальные расстояния планет  $A$  и  $B$  от звезды  $S$  слегка отличаются.

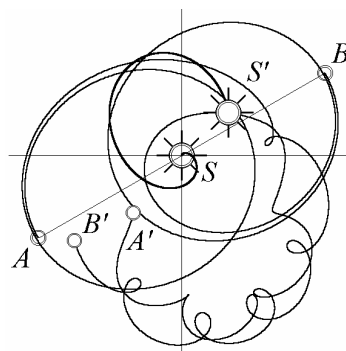


Рис. 21. Неустойчивость движения в симметричной коллинеарной конфигурации, развивающаяся при ничтожном неравенстве начальных расстояний планет  $A$  и  $B$  от звезды  $S$ .

## **Хоровод одинаковых «планет»**

Точные решения задачи многих тел, описывающие периодические движения по кеплеровым орбитам, аналогичные рассмотренному выше примеру, существуют

также для гипотетических систем из нескольких одинаковых тел в равносторонней конфигурации, окружающих центральное тело. Представим себе, что  $n$  «планет» с произвольно большими, но равными массами расположены во всех  $n$  вершинах правильного (равностороннего) многоугольника, и еще одно тело («звезда», масса которой может отличаться от масс «планет») находится в центре этого многоугольника.

Очевидно, что в такой симметричной конфигурации центральное тело находится в равновесии под действием сил тяготения, приложенных к нему со стороны всех окружающих тел. Из симметрии системы ясно, что результирующая сила тяготения, приложенная к любой из «планет» со стороны центрального тела («звезды») и всех остальных «планет», направлена к центру системы. Величина этой силы обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра (или вообще квадрату любого линейного размера многоугольника, например, длины его сторон).

Поэтому в такой системе одинаковые «планеты» могут, сохраняя равностороннюю конфигурацию, синхронно двигаться вдоль равных кеплеровых эллипсов (или даже вдоль открытых параболических или гиперболических траекторий) с общим фокусом в центре «звезды». Для этого необходимо лишь, чтобы начальные скорости всех «планет» были одинаковы и направлены под равными углами к соответствующим радиусам-векторам.

В частности, «планеты» могут равномерно двигаться по одной и той же круговой орбите (в которую вписан образуемый ими многоугольник), находясь на равных расстояниях одна от другой. В этом случае многоугольник с «планетами» в вершинах равномерно вращается вокруг центра. При движении «планет» по эллиптическим траекториям угловая скорость многоугольника максимальна в моменты, когда «планеты» одновременно проходят через перигелии своих орбит. При таком неравномерном вращении многоугольника длины его сторон периодически изменяются.

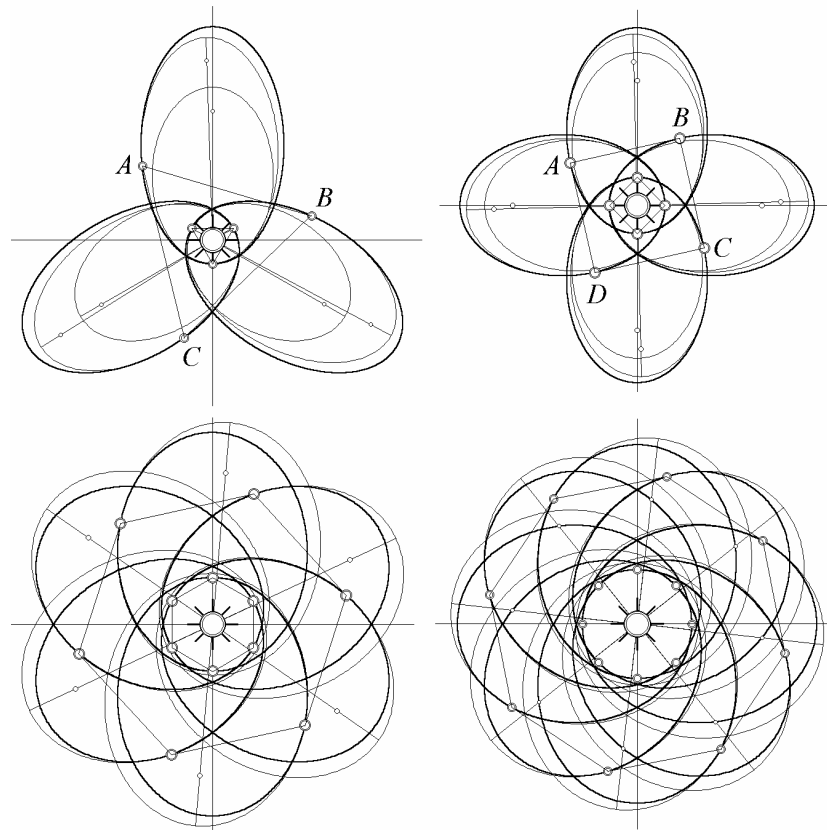


Рис. 22. Периодические кеплеровы движения одинаковых массивных «планет» в равносторонних конфигурациях, описываемые точными частными решениями задачи многих тел.

В верхней части рис. 22 показаны примеры таких точных решений для системы трех (слева) и четырех (справа) «планет». При движении по эллипсам в каждый момент тела находятся в вершинах соответственно правильного треугольника и квадрата. Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым каждая из «планет» двигалась бы под действием силы тяготения одной лишь «звезды», если бы остальные «планеты» внезапно исчезли (относительно центра масс оставшихся двух тел). Эти оскулирующие эллипсы показаны для перигелиев действительных орбит и для точек  $A, B, C$  (и  $D$ ).

Несовпадение истинных траекторий (показанных жирными линиями на рис. 22) с оскулирующими эллипсами явно показывает, что в данной модели массы «планет» сопоставимы с массой «звезды», т.е. здесь мы имеем дело с настоящей задачей многих тел, а не с тривиальным случаем нескольких спутников пренебрежимо малой массы.

В нижней части рис. 22 показаны аналогичные движения в системах из шести (слева) и восьми «планет» (справа) в симметричных равносторонних конфигурациях. Тонкими линиями показаны невозмущенные орбиты, по которым двигались бы вокруг «звезды» отдельные «планеты» в отсутствие других «планет». В отличие от верхней части рис. 22, здесь оскулирующие эллипсы соответствуют системе отсчета, связанной со «звездой», а не с центром масс системы двух тел.

Замечательно, что рассматриваемые здесь точные решения задачи многих тел существуют и тогда, когда масса центрального тела равна нулю. Это значит, что система одинаковых «планет», находящихся в вершинах правильного многоугольника, может совершать такой великолепный хоровод под действием сил взаимного притяжения и в отсутствие «звезды». При этом каждое из тел движется под действием сил тяготения (приложенных к нему со стороны других движущихся тел) так, как если бы на него действовала единственная центральная сила, создаваемая неподвижным точечным источником, расположенным в центре системы.

В частности, три тела равных масс, находящиеся в вершинах правильного треугольника, при одинаковых по модулю и должным образом направленных скоростях могут синхронно описывать конгруэнтные эллипсы, большие оси которых образуют одна с другой углы в  $120^\circ$ .

На рис. 23 слева показаны орбиты тел  $A, B$  и  $S$  одинаковой массы в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс, а справа – в системе отсчета, связанной с одним из тел ( $S$ ).

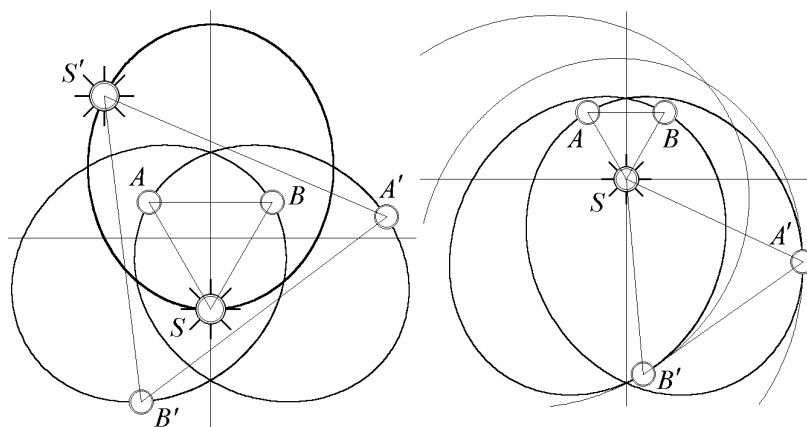


Рис. 23. Кеплеровы движения трех одинаковых тел в равносторонней конфигурации. Траектории тел показаны в системе отсчета, связанной с центром масс (слева), и с одним из тел (справа).

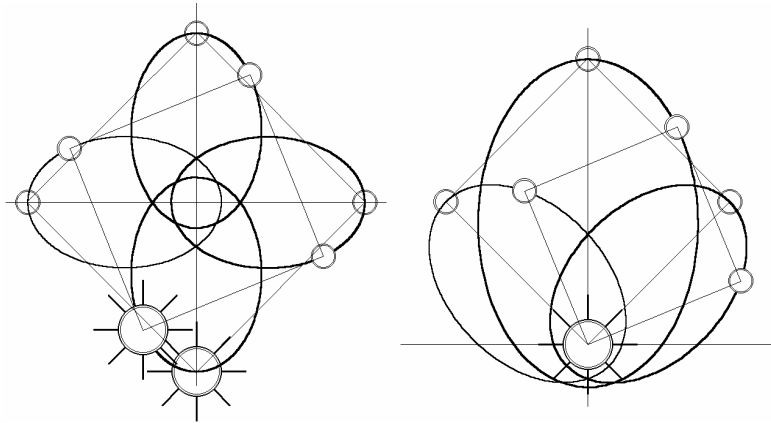


Рис. 24. Кеплеровы движения четырех одинаковых тел в равносторонней конфигурации. Траектории тел показаны в системе отсчета, связанной с центром масс (слева), и с одним из тел (справа).

Система трех тел в равносторонней конфигурации замечательна тем, что в ней периодические кеплеровы движения возможны даже при *различных массах* тел. Простое (но вполне строгое) доказательство можно найти в статье автора *Regular Keplerian motions in classical many-body systems*, European Journal of Physics, vol. **21**, pp. 465 – 482 (2000).

Оказывается, что и в этом случае полная сила тяготения, действующая на каждое из тел со стороны двух других, направлена к центру масс системы и обратно пропорциональна квадрату расстояния от него. Иначе говоря, можно считать, что в равносторонней конфигурации каждое тело находится в центральном поле тяготения, *неподвижный* точечный источник которого расположен в центре масс системы, несмотря на то, что это поле создается *движущимися* телами. При этом приобретаемые телами ускорения пропорциональны расстояниям тел от центра масс. Поэтому тела могут синхронно описывать геометрически подобные эллипсы (с общим фокусом в центре масс) так, чтобы равносторонняя конфигурация трех тел сохранялась во время движения. В частном случае эллипсы могут вырождаться в концентрические окружности. Для реализации кругового движения начальные скорости тел должны быть выбраны определенным образом.

При круговых движениях образуемый телами треугольник вращается равномерно и длины его сторон неизменны. В случае эллиптических движений треугольник вращается неравномерно: угловая скорость максимальна в моменты прохождения тел через перицентры – ближайшие к центру масс точки эллипсов. Вращаясь вокруг центра масс системы, этот треугольник как бы «дышит» – длина его сторон периодически изменяется.

На рис. 25 показан пример такого периодического движения трех тел различных масс ( $m_A = 0.3 m_S$ ,  $m_B = 0.6 m_A$ ). В инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс (левая часть рис. 10), тела описывают геометрически подобные эллипсы, линейные размеры которых обратно пропорциональны массам тел. В системе отсчета, связанной с наиболее массивным телом  $S$  (правая часть рис. 25), тела  $A$  и  $B$  описывают одинаковые эллипсы, показанные жирными линиями. Большие оси этих эллипсов образуют угол  $60^\circ$ . Тонкими линиями показаны (неравные) оскулирующие эллипсы для момента прохождения тел  $A$  и  $B$  через афелии своих орбит. По соответствующему эллипсу двигалось бы дальше в этой системе отсчета каждое из тел  $A$  и  $B$  вокруг  $S$ , если бы второе тело внезапно исчезло (т.е. под действием силы притяжения только к  $S$ ).

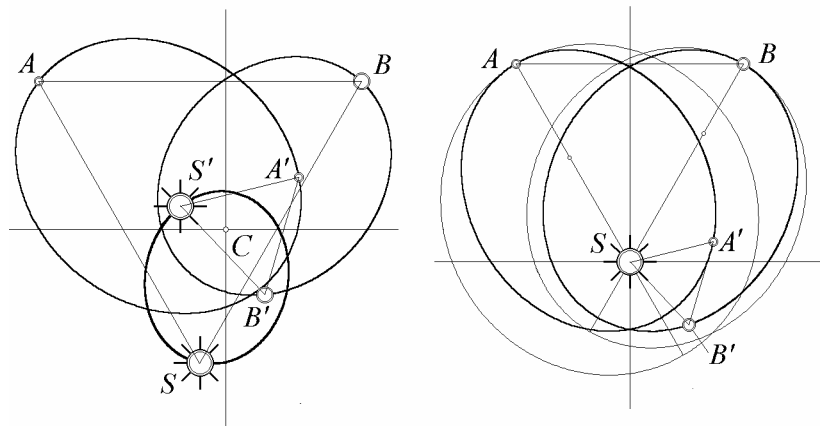


Рис. 25. Кеплеровы движения в равносторонней конфигурации системы трех тел неравных масс.

Такое регулярное периодическое движение трех тел неустойчиво по отношению к (малым) изменениям начальных условий, нарушающим симметрию системы. Неустойчивость движения в равносторонней конфигурации иллюстрируется примером на рис. 26.

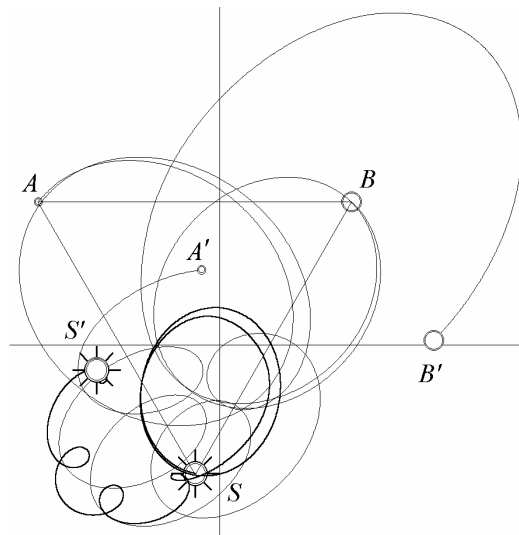


Рис. 26. Переход к нерегулярному движению в системе трех тел, совершавшей сначала движение, очень близкое к кеплеровому, описываемому точным частным решением задачи трех тел.

В частном случае, когда тела совершают круговые движения, и масса одного из тел пренебрежимо мала, последний рассмотренный пример системы трех тел в равносторонней конфигурации приводит нас к вопросу о треугольных точках либрации. Этот вопрос часто затрагивается в продвинутых курсах механики в связи с ограниченной задачей трех тел. Хорошо известно, что когда два массивных тела совершают круговые движения вокруг общего центра масс, существует пять положений (так называемых *точек либрации*), в которых пробное тело пренебрежимо малой массы может находиться в равновесии в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с массивными телами. Другими словами, вся система трех тел может подобно твердому телу (т.е. сохраняя неизменную конфигурацию) равномерно вращаться как целое вокруг центра масс. Три положения относительного равновесия пробного тела лежат на одной прямой с массивными телами (одна внутренняя и две внешних коллинеарных точки либрации). Два других расположены в вершинах равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок, соединяющий массивные тела.



Во вращающейся системе отсчета относительное равновесие пробного тела в лагранжевых точках (точках либрации) обеспечивается совместным действием сил тяготения со стороны массивных тел и центробежной силы инерции.

Замечательно, что относительное равновесие тела в треугольных точках либрации устойчиво, если отношение масс тяжелых тел  $m_1/m_2$  не превышает приблизительно 0.04. Для системы Луна – Земля  $m_1/m_2 = 0.0123$ , так что треугольные точки либрации устойчивы. Поэтому можно говорить даже о практическом значении соответствующего точного решения задачи трех тел для космической динамики благодаря возможности (хотя бы в принципе) запуска стационарного спутника в треугольную точку либрации системы Луна – Земля.

В Солнечной системе устойчивые треугольные точки либрации образованы также совместными гравитационными силами Юпитера – наиболее массивной из планет – и Солнца. Известны две многочисленные группы астероидов (их называют Греками и Троянцами), «захваченных» в этих точках и движущихся вокруг Солнца синхронно с Юпитером.

## ***Космические катастрофы***

Звезды на небе представляются нам неподвижными. Но тщательные измерения показывают, что относительные положения «неподвижных» звезд медленно изменяются. Эти изменения свидетельствуют о движениях звезд в направлениях, перпендикулярных лучу зрения. Такие движения трудно заметить только потому, что расстояния до звезд чудовищно велики. Движение звезды вдоль луча зрения можно обнаружить благодаря эффекту Доплера – смещению линий спектра излучения звезды, пропорциональному лучевой скорости.

Солнце находится на периферии нашей Галактики, где звезды удалены одна от другой на очень большие расстояния. В предсказуемом будущем нам не грозит встреча с другой звездой. Но ближе к центру Галактики концентрация звезд значительно выше, и парные сближения звезд представляются не столь уж редкими событиями. Взаимное притяжение сообщает звездам ускорения, заставляя их отклоняться от прямолинейных траекторий. Относительно центра масс системы встречающиеся звезды очерчивают открытые кеплеровы траектории – гиперболы с общим фокусом. После сближения каждая из звезд удаляется вдоль другой асимптоты той же гиперболы.

Одна из моделирующих программ пакета «Движение космических тел» позволяет воспроизвести подобное «звездное randevu», которое может быть особенно интересным, если встречающиеся звезды обладают планетами. Гравитационные возмущения от проходящей поблизости звезды могут произвести катастрофические изменения в планетной системе.

На рис. 27 показан возможный сценарий встречи двух планетных систем, разграниченный на экране компьютера с помощью моделирующей программы. Масса звезды  $S$ , вокруг которой первоначально обращаются две планеты  $A$  и  $B$ , вдвое больше, чем масса звезды-«пришельца»  $Z$  с единственной планетой  $P$ . В левой части рисунка движения показаны в (неинерциальной) системе отсчета, где звезда  $S$  неподвижна.

В результате встречи структура планетных систем радикально изменилась. Обращавшаяся вокруг звезды  $S$  по почти круговой орбите внутренняя планета  $A$  оказалась захваченной звездой-пришельцем  $Z$ , и когда звезды расходятся, вокруг  $Z$  обращаются уже две планеты,  $A$  и  $P$ . Судьба встречающихся планетных систем чрезвычайно чувствительна к начальным условиям. Достаточно лишь чуть-чуть изменить параметры при моделировании, чтобы получить совсем иной результат.

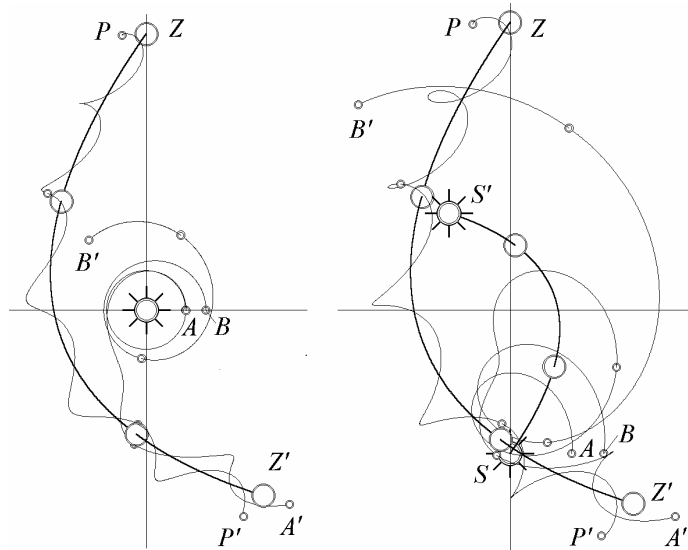


Рис. 27. Встреча двух планетных систем. Траектории тел в системе отсчета одной из звезд (слева), и в системе отсчета, где центр масс неподвижен (справа).

Например, возможен сценарий, приводящий к полному обмену планетами между встречающимися звездами. В пакете моделирующих программ «Движение космических тел» можно найти множество захватывающих примеров возможных небесных катастроф.

### **Великолепная «восьмерка»**

В заключение нашего обсуждения поистине неисчерпаемой темы движений космических тел и, в частности, задачи многих тел обратимся к совсем свежему и неожиданному (скорее даже сенсационному) открытию в теоретической небесной механике.

Оказывается, что три тела одинаковой массы, связанные гравитационным взаимодействием, могут совершать удивительно простое плоское периодическое движение, гоняясь друг за другом по высоко симметричной замкнутой траектории, имеющей вид цифры 8 (рис. 28). На возможность такого движения по-видимому впервые было указано в статье С. Moore *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675 – 3679, 1993, и совсем недавно это движение было математически изучено детально в статье А. Chenciner and R. Montgomery *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses* («Замечательное периодическое решение задачи трех тел в случае равных масс»). Препринт статьи можно найти в сети по адресу <http://orca.ucsc.edu/~rmont/annals.pdf>.

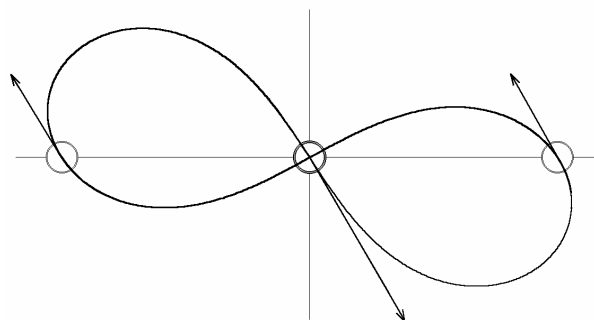


Рис. 28. Периодическое движение трех тел, связанных гравитационным взаимодействием.

Для данного движения характерны нулевое значение полного момента импульса, и чрезвычайно богатый набор элементов симметрии. В некоторый момент тела находятся в коллинеарной конфигурации на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 28). Скорости крайних тел в этот момент одинаковы по величине и направлению, скорость среднего вдвое больше и направлена противоположно. Тела возвращаются в исходную конфигурацию через некоторый интервал времени  $T$ , на протяжении которого каждое тело описывает целиком одну и ту же замкнутую восьмерку. Через интервал  $T/3$  (треть полного периода) тела опять оказываются на той же прямой, что и в исходной коллинеарной конфигурации, но располагаются на этой прямой в ином порядке (происходят циклические перестановки).

Еще одна прямая линия, на которой все три тела оказываются одновременно через интервал времени  $T/6$  после прохождения через исходную коллинеарную конфигурацию, расположена симметрично исходной относительно продольной оси восьмерки. В промежутке между этими коллинеарными конфигурациями (через интервал  $T/12$ ) тела образуют равнобедренный треугольник.

Наиболее удивительная и неожиданная черта такого движения по восьмерке заключается в его *устойчивости*. Если слегка изменить начальные условия (при сохранении нулевого значения полного момента импульса), движение утрачивает периодичность, но общий его характер (восьмеркообразная траектория) сохраняется. На рис. 29 показаны траектории тел (на протяжении одного почти полного цикла) в движении, которое происходит при слегка измененных направлениях начальных скоростей. Движение продолжается неограниченно долго без столкновений. Это значит, что движение по восьмерке устойчиво по отношению к малым изменениям начальных скоростей и положений тел.

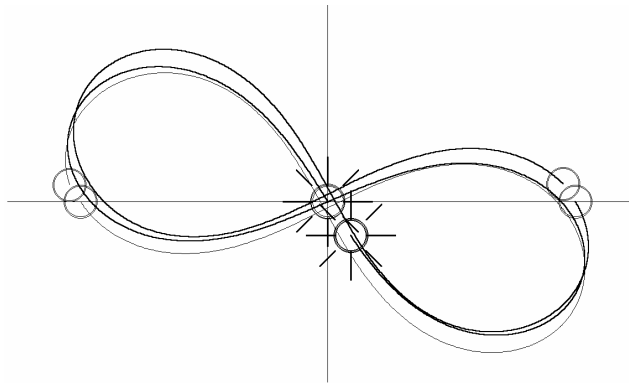


Рис. 29. Иллюстрация устойчивости движения по «восьмерке» трех тел одинаковой массы. Показаны траектории всех тел на протяжении почти полного цикла.