Комментарии к лекциям по физике

Тема: Момент импульса и секториальная скорость

Скорость изменения момента импульса частицы со временем $d\mathbf{L}/dt$ равна моменту действующей на нее силы $\mathbf{F}$ относительно начала координат:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{1}$$

При движении частицы в центральном поле сила направлена вдоль радиуса, и ее момент относительно силового центра равен нулю: $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$. Таким образом, как видно из (1), в любом центральном поле момент импульса частицы относительно силового центра остается неизменным (сохраняется).

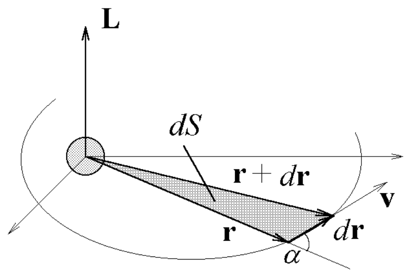

Рис. 1: Геометрический смысл момента импульса частицы.

Рассмотрим геометрический смысл момента импульса частицы, совершающей орбитальное движение (рис. 1). Представим скорость $\mathbf{v}$ в выражении для момента импульса как отношение вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ к соответствующему промежутку времени dt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt. \tag{2}$$

Векторное произведение $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ в правой части (2) представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат сомножители $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$ (т. е. $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$). Его модуль

$$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = r dr \sin\alpha = 2dS \tag{3}$$

представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника, заштрихованного на рис. 1. В самом деле, произведение dr на синус угла α между векторами $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$ равно высоте этого треугольника, опущенной на сторону $\mathbf{r}$. Отношение dS/dt элементарной площади dS к промежутку времени dt, в течение которого радиус-вектор $\mathbf{r}$ «заметает» эту площадь, называется *секториальной скоростью*. Таким образом, из (3) следует, что модуль момента импульса пропорционален секториальной скорости:

$$L = 2m\frac{dS}{dt}. \tag{4}$$

Сохранение *направления* вектора момента импульса в центральном поле означает, что траектория представляет собой *плоскую* кривую. Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору $\mathbf{L}$. Эта плоскость задается радиусом-вектором начального положения $\mathbf{r}_0$ и вектором начальной скорости $\mathbf{v}_0$. Сохранение *модуля* момента импульса означает неизменность *секториальной скорости*. Применительно к движению планеты сохранение секториальной скорости (4) известно как второй закон Кеплера. Таким образом, второй закон Кеплера есть следствие сохранения момента импульса частицы при движении в центральном силовом поле. Секториальная скорость постоянна для любых кеплеровых орбит, в том числе и для разомкнутых параболических и гиперболических траекторий. Подчеркнем, что это свойство имеет место для *любого* центрального поля, а не только для ньютонова поля тяготения. Напротив, утверждения, выражаемые первым и третьим законами Кеплера, справедливы только для движения в *кулоновом* центральном поле, где сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра.