Комментарии к лекциям по физике

Тема: Движение в полях тяготения. Космическая динамика

Содержание лекции

Законы движения планет и искусственных спутников. Законы Кеплера. Круговая скорость. Скорость освобождения. Применение законов сохранения энергии и момента импульса к исследованию движения в центральном поле тяготения. Свойства замкнутых и открытых кеплеровых орбит. Годограф вектора скорости.

Введение

На протяжении почти двух тысячелетий астрономы безуспешно бились над поиском истинных закономерностей движений планет – светил, казалось бы бессистемно блуждающих по небу. Датский астроном Тихо Браге в течение почти всей жизни занимался тщательными измерениями видимых положений планет относительно звезд. Его многолетние записи небесных координат планет послужили тем сырым материалом, при помощи которого немецкому астроному Иоганну Кеплеру (1571 - 1630) удалось установить форму кривых, изображающих орбиты планет. Открытые Кеплером законы планетных движений были выдающимся научным достижением. Результаты многолетних наблюдений и многие тысячи измерений оказались сконцентрированными в четкой системе простых правил. Динамическое объяснение Ньютоном этой замечательной простоты можно без преувеличения считать началом современной физической науки. Это был поистине фантастический прорыв в понимании Природы. Но и поныне движения небесных тел — малых и больших планет Солнечной системы, их спутников, комет, астероидов, а в наше время также рукотворных космических кораблей и искусственных спутников, дают наиболее впечатляющие опытные подтверждения законов классической ньютоновской механики. В этой замечательной космической лаборатории все явления наблюдаются в наиболее «чистом» виде, не осложненные побочными факторами вроде трения, сопротивления воздуха и т.п., неизбежными в условиях земной лаборатории.

Теоретический фундамент, на котором построена небесная механика и ее современная ветвь — механика космического полета — это *закон всемирного тяготения* и *законы Ньютона*, составляющие основу классической динамики. Замечательно, что для движения тела под действием центральной силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра (так называемая *задача Кеплера*), возможно получение решения уравнений движения в аналитическом виде.

Любое движение в ньютоновском поле тяготения происходит по одному из так называемых *конических сечений* — кривых, которые получаются при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса получаются окружность, эллипс, парабола или гипербола. Периодическим движениям планет и спутников соответствуют замкнутые эллиптические (в частном случае круговые) орбиты. Предельному случаю сильно вытянутых эллиптических орбит со все более и более далеким вторым фокусом соответствует разомкнутая параболическая траектория (второй фокус эллипса при таком предельном переходе постепенно удаляется в бесконечность). Если же тело приближается к силовому центру из бесконечности, его движение происходит по одной из ветвей гиперболы. В этом случае, изменив направление движения под действием силы тяготения, тело снова уходит в бесконечность. Движение по уходящей в бесконечность ветви гиперболы можно также получить, сообщив находящемуся на конечном расстоянии телу достаточно большую скорость, превосходящую так называемую *скорость освобождения*.

Круговая скорость и скорость освобождения

Круговую скорость $v_{\rm circ}$ для орбиты, проходящей на расстоянии r от центра планеты, можно найти, приравнивая центростремительное ускорение $v_{\rm circ}^2/r$ ускорению GM/r^2, которое сообщает сила тяготения спутнику, находящемуся на расстоянии r от силового центра:

$$v_{\rm circ} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}. \tag{1}$$

Значение круговой скорости обратно пропорционально корню квадратному из радиуса орбиты и не зависит от массы спутника. Период обращения по круговой орбите можно найти, разделив длину орбиты $2\pi r$ (длину окружности радиуса r) на постоянную скорость $v_{\rm circ}$ движения по этой орбите:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\rm circ}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}. \tag{2}$$

Как видно из (2), квадрат периода обращения пропорционален кубу радиуса орбиты (это частный случай третьего закона Кеплера). Период обращения спутника обратно пропорционален квадратному корню из массы планеты. Зависимость периода обращения от массы планеты дает простой и наиболее точный способ «взвешивания» планеты (т. е. определения ее массы) по измерениям периодов обращения ее спутников.

Значение круговой скорости $v_{\rm circ}$ для гипотетической предельно низкой орбиты, стелющейся над самой поверхностью Земли, иногда называют *первой космической* скоростью $v_{\rm I} = \sqrt{gR} \approx 7.9$ км/с. Движение спутника по такой орбите было бы возможно только в идеализированном случае полного отсутствия атмосферы.

Скорость освобождения $v_{\rm esc}$ на заданном расстоянии r от центра планеты (т. е. минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно удалилось в бесконечность) может быть рассчитана с помощью закона сохранения энергии. Минимальная скорость тела в точке r, необходимая для преодоления сил тяготения и удаления в бесконечность, отвечает нулевой скорости на бесконечности (и нулевому значению кинетической энергии). Потенциальная энергия на бесконечности тоже принята равной нулю. Поэтому тело, которому сообщена скорость, равная скорости освобождения, имеет нулевую полную энергию:

$$\frac{mv_{\rm esc}^2}{2} - G\frac{mM}{r} = 0,$$

откуда

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}}. \tag{3}$$

Сравнивая это выражение с формулой (1), видим, что скорость освобождения (3) на любом расстоянии r от силового центра в $\sqrt{2} \approx 1.41$ раз превышает круговую скорость. Ее значение не зависит от массы тела. В закон сохранения энергии, из которого получено значение v_{esc}, входит только величина скорости освобождения, но не ее направление. Поэтому тело удаляется в бесконечность при произвольном направлении сообщаемой ему скорости, если только ее величина v_0 равна скорости освобождения v_{esc}. Удаление тела в бесконечность происходит по некоторой параболической траектории, конкретный вид которой зависит от направления начальной скорости, либо по прямой, если эта скорость направлена по радиусу (вертикально вверх).

Если начальная скорость v_0 превышает скорость освобождения, тело удаляется в бесконечность по гиперболической траектории. На бесконечно большом расстоянии его движение будет равномерным и прямолинейным. Постоянная скорость v_∞ этого движения направлена по асимптоте гиперболы. Ее значение можно определить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{r}} = \sqrt{v_0^2 - v_{\text{esc}}^2}. \tag{4}$$

Скорость тела на бесконечно большом расстоянии v_∞ (4) называют *остаточной скоростью* либо *гиперболическим избытком* скорости.

Значение скорости освобождения v_{esc} для точки на поверхности Земли (т. е. при $r = R$) обычно называют *второй космической скоростью*. Её значение в $\sqrt{2} \approx 1.41$ раз превышает первую космическую скорость: $v_{\text{II}} = \sqrt{2gR} \approx 11.2$ км/с.

Свойства кеплеровых орбит

В общем случае движение тела под действием ньютоновской силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра, происходит по одному из *конических сечений* — окружности или эллипсу, параболе, гиперболе. Уравнение траектории кеплерова движения можно записать в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \tag{5}$$

Здесь r — расстояние от силового центра (длина радиуса-вектора), φ — угол, образуемый радиусом-вектором с осью симметрии траектории (с направлением из центра на ближайшую точку). Величина p в формуле (5) имеет размерность длины. Она называется *фокальным параметром* орбиты. Безразмерная величина e называется *эксцентриситетом* орбиты. При $e = 0$ из (5) получаем $r = p$ — расстояние до орбиты не зависит от φ, т. е. орбита в данном случае представляет собой окружность. Во всех остальных случаях параметр p равен расстоянию до орбиты при $\varphi = \pm\pi/2$, когда $\cos\varphi = 0$ (в этом заключается геометрический смысл фокального параметра). При $e < 1$ уравнение (5) соответствует эллипсу (рис. 1), при $e = 1$ — параболе, при $e > 1$ — гиперболе. (Аналитический вывод уравнения траектории (5) приведен в Дополнении к данному комментарию, см. ниже.)

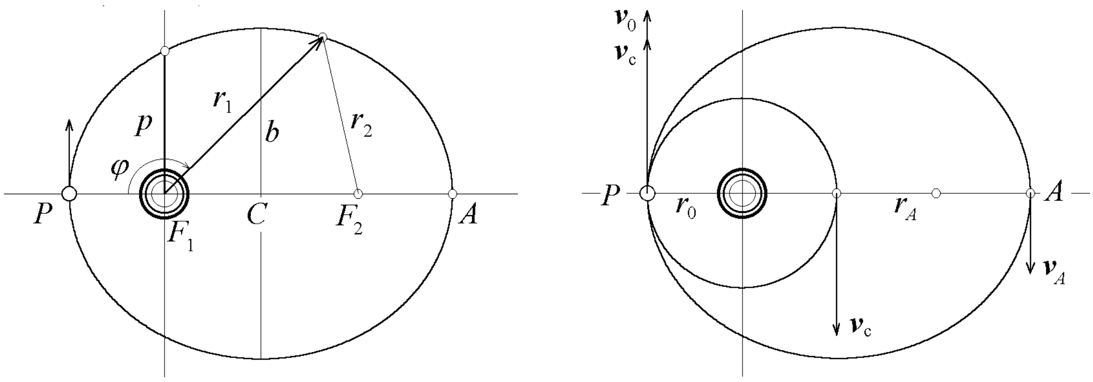

Рис. 1: Элементы эллиптической орбиты кеплерова движения.

Эллиптическую орбиту можно характеризовать, наряду с параметрами p и e, также расстоянием r_P до ближайшей к силовому центру точки P, называемой *перигелием* для планетных орбит и *перигеем* для орбит спутников Земли, и расстоянием r_A до наиболее удаленной точки A орбиты, называемой соответственно *афелием* или *апогеем* (рис. 1). Точке P соответствует значение $\varphi = 0$, точке A — значение $\varphi = \pi$. Подставляя эти значения в (5), получаем

$$r_P = \frac{p}{1+e}, \qquad r_A = \frac{p}{1-e}. \tag{6}$$

Эксцентриситет e орбиты выражается через r_P и r_A следующим образом:

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}.$$

Сумма $r_A + r_P$ дает большую ось эллипса $2a$:

$$2a = r_A + r_P = \frac{2p}{1-e^2}.$$

Такое же значение имеет сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса: $r_1 + r_2 = 2a$. Расстояния от центра эллипса до фокусов (CF_1 и CF_2 на рис. 1) равны произведению большой полуоси на эксцентриситет:

$$CF_1 = a - r_P = ae.$$

Малая полуось эллипса b выражается через большую полуось a и эксцентриситет e соотношением:

$$b = a\sqrt{1-e^2}.$$

Определим параметры орбиты спутника, которому на расстоянии r_0 от силового центра (центра планеты) сообщается горизонтальная скорость v_0. Если начальная скорость равна найденной выше круговой скорости v_{circ} (1), орбита представляет собой окружность (см. правую часть рис. 1). Когда начальная скорость

v_0 превышает круговую, перигей эллиптической орбиты расположен в начальной точке P (рис. 1), апогей — на противоположном конце A прямой, проходящей через начальную точку и центр планеты. Для нахождения расстояния r_A до апогея воспользуемся законом сохранения энергии и законом сохранения момента импульса, который справедлив при движении тела в любом центральном силовом поле. Напомним, что сохранение момента импульса приводит к закону площадей (второму закону Кеплера). Приравнивая значения момента импульса в начальной точке P и в апогее A орбиты, получаем

$$v_0 r_0 = v_A r_A, \tag{7}$$

где v_A — скорость спутника в апогее. Приравнивая значения энергии в начальной точке и в апогее, получаем второе уравнение:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = \frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{r_A}.$$

Выразим скорость в апогее v_A через v_0 с помощью (7) и подставим в уравнение закона сохранения энергии. Собирая члены с v_0 в левой его части, а остальные члены — в правой части, получим

$$v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_A^2}\right) = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_A}\right).$$

Из этого квадратного уравнения можно найти неизвестное расстояние r_A до апогея. Один из его корней $r_A = r_0$ соответствует начальной точке (перигею). Для нахождения второго корня, соответствующего апогею, представим разность квадратов в левой части уравнения как произведение суммы на разность, и сократим обе части на $(1 - r_0/r_A)$. Учитывая, что $GM/r_0 = v_{\text{circ}}^2$, расстояние до перигея орбиты можно выразить следующим соотношением:

$$r_A = \frac{r_0}{2(v_{\text{circ}}/v_0)^2 - 1} = \frac{r_0}{(v_{\text{esc}}/v_0)^2 - 1}. \tag{8}$$

При $v_0 = v_{\text{circ}}$ из (8) имеем $r_A = r_0$ — спутник движется по круговой орбите. По мере увеличения начальной скорости расстояние до апогея становится все больше. При приближении значения начальной скорости к скорости освобождения $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} v_{\text{circ}}$ эллиптическая орбита неограниченно вытягивается, и ее апогей уходит в бесконечность. При еще больших значениях начальной скорости движение спутника будет происходить по гиперболической траектории. Формула (8) в этом случае неприменима. Если же начальная скорость меньше круговой скорости v_{circ}, из формулы (8) получаем $r_A < r_0$ — начальная точка будет апогеем орбиты, а значение r_A из (8) соответствует расстоянию до перигея, который в этом случае лежит на противоположном по отношению к начальной точке конце большой оси эллипса. Большая полуось орбиты дается следующим выражением:

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_A) = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - v_0^2/(2v_{\text{circ}}^2)} = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - v_0^2/v_{\text{esc}}^2}. \tag{9}$$

При $v_0 = v_{\text{circ}}$ из (9) получаем, естественно, $a = r_0$ — эллипс превращается в окружность, и большая полуось совпадает с радиусом. Когда $v_0 \to \sqrt{2} v_{\text{circ}}$, т. е.

начальная скорость приближается к скорости освобождения v_{esc}, согласно уравнению (9), большая полуось орбиты $a \to \infty$ — эллипс растягивается до бесконечности. При $v_0 \to 0$ формула (9) дает $a \to r_0/2$ — по мере уменьшения начальной скорости эллиптическая орбита сжимается и вырождается в отрезок прямой от начальной точки до силового центра. Фокусы такого предельно сплющенного эллипса совпадают с концами отрезка.

Момент импульса и секториальная скорость

Скорость изменения момента импульса частицы со временем $d\mathbf{L}/dt$ равна моменту действующей на нее силы $\mathbf{F}$ относительно начала координат:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{10}$$

При движении частицы в центральном поле сила направлена вдоль радиуса, и ее момент относительно силового центра равен нулю: $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$. Таким образом, как видно из (10), в любом центральном поле момент импульса частицы относительно силового центра остается неизменным (сохраняется).

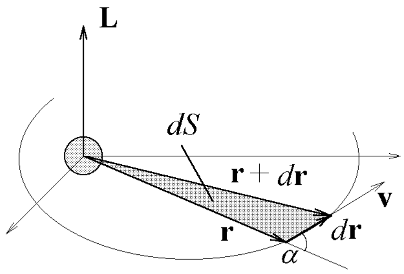

Рис. 2: Геометрический смысл момента импульса частицы.

Рассмотрим геометрический смысл момента импульса частицы, совершающей орбитальное движение (рис. 2). Представим скорость $\mathbf{v}$ в выражении для момента импульса как отношение вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ к соответствующему промежутку времени dt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt. \tag{11}$$

Векторное произведение $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ в правой части (11) представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат сомножители $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$ (т. е. $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$). Его модуль

$$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = r dr \sin\alpha = 2dS \tag{12}$$

представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника, заштрихованного на рис. 2. В самом деле, произведение dr на синус угла α между векторами $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$ равно высоте этого треугольника, опущенной на сторону $\mathbf{r}$. Отношение dS/dt элементарной площади dS к промежутку времени dt, в течение которого радиус-вектор $\mathbf{r}$ «заметает» эту площадь, называется *секториальной скоростью*. Таким образом, из (12) следует, что модуль момента импульса пропорционален секториальной скорости:

$$L = 2m\frac{dS}{dt}. \qquad (13)$$

Сохранение *направления* вектора момента импульса в центральном поле означает, что траектория представляет собой *плоскую* кривую. Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору $\mathbf{L}$. Эта плоскость задается радиусом-вектором начального положения $\mathbf{r}_0$ и вектором начальной скорости $\mathbf{v}_0$. Сохранение *модуля* момента импульса означает неизменность *секториальной скорости*. Применительно к движению планеты сохранение секториальной скорости (13) известно как второй закон Кеплера. Таким образом, второй закон Кеплера есть следствие сохранения момента импульса частицы при движении в центральном силовом поле. Секториальная скорость постоянна для любых кеплеровых орбит, в том числе и для разомкнутых параболических и гиперболических траекторий. Подчеркнем, что это свойство имеет место для *любого* центрального поля, а не только для ньютонова поля тяготения. Напротив, утверждения, выражаемые первым и третьим законами Кеплера, справедливы только для движения в *кулоновом* центральном поле, где сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра.

Годограф вектора скорости при кеплеровом движении

Вектор скорости движущегося тела в любой момент направлен по касательной к пространственной траектории, и поэтому при криволинейном движении его направление все время изменяется. Чтобы получить траекторию в пространстве скоростей, нужно начертить линию, описываемую концом изменяющегося вектора скорости при условии, что его начало зафиксировано в определенной точке — начале координат пространства скоростей. Повсеместно принятое теперь название такой кривой — годограф скорости — было дано ей Гамильтоном в 1846 году.

При движении тела (планеты, спутника) по круговой орбите модуль скорости остается неизменным, так что все изменение вектора скорости сводится к равномерному вращению вокруг начала координат пространства скоростей. Это значит, что годограф скорости для происходящего по окружности кеплерова движения также будет окружностью. Радиус этой окружности равен неизменному значению модуля скорости (круговой скорости v_{circ}).

Когда планета (или спутник) движется вдоль замкнутой эллиптической орбиты или открытой параболической или гиперболической траектории, поворот вектора скорости происходит неравномерно. Изменяется при этом не только направление, но и модуль вектора скорости. Однако эти изменения происходят таким образом, что конец вектора скорости также описывает окружность (либо часть окружности в случае гиперболических движений). Центр такой окружности не находится в начале координат. Другими словами, для произвольного кеплерова движения годограф скорости имеет форму окружности. Это замечательное свойство орбитальных движений почему-то не нашло отражения в существующих учебниках по механике и общей физике. Доказательство (геометрическиое и аналитическое) круговой формы годографа скорости можно найти в [4], стр. 18–25.

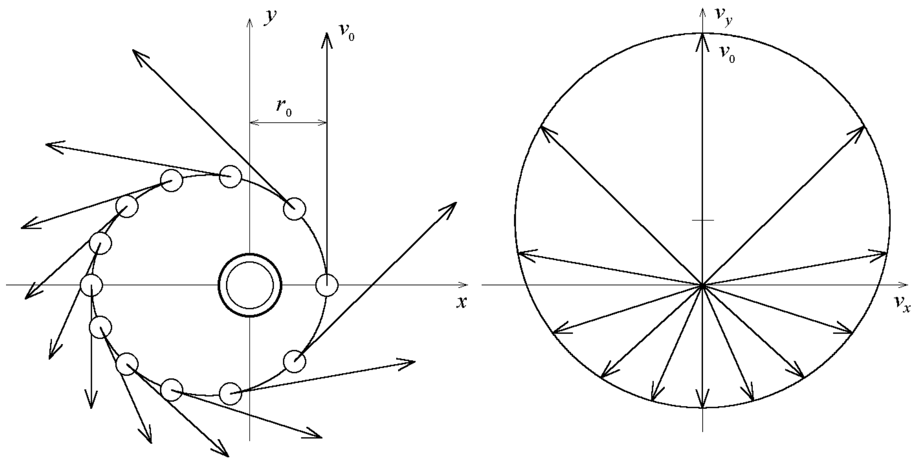

Рис. 3: Эллиптическая орбита с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

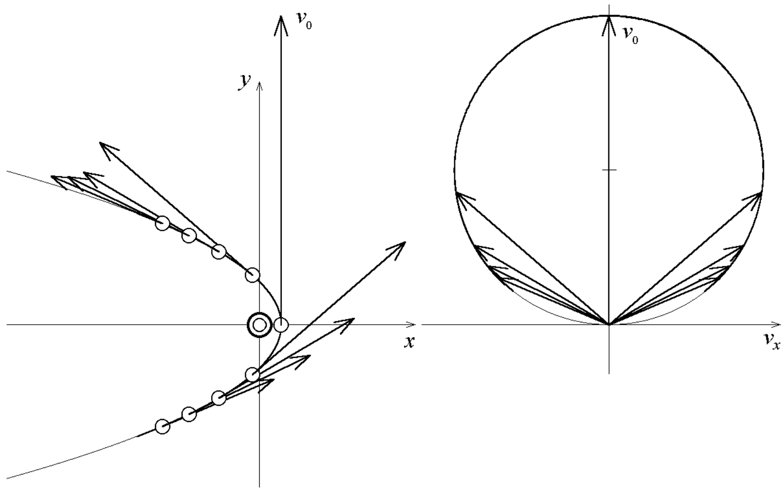

Рис. 4: Параболическая траектория с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

На приводимых здесь рисунках 3, 4 и 5 показаны траектории (слева) и годографы скорости (справа) для замкнутых и открытых орбит. Если начальная скорость больше скорости освобождения, то диаметр годографа меньше начальной скорости, т. е. начало координат пространства скоростей находится вне окружности годографа (рис. 5).

На концах малой оси эллиптической орбиты вектор скорости $\mathbf{v}$ параллелен большой оси эллипса. Поэтому для этих точек вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен диаметру кругового годографа скорости. Основание этого перпендикуляра делит диаметр на части, равные скоростям спутника в перигее и апогее орбиты ($\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_A$ соответственно). Поэтому длина перпендикуляра, т. е. скорость на конце малой оси, равна среднему геометрическому скоростей $\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_A$: $v = \sqrt{v_P v_A}$.

Подчеркнем, что круговая форма годографа скорости получена для движения

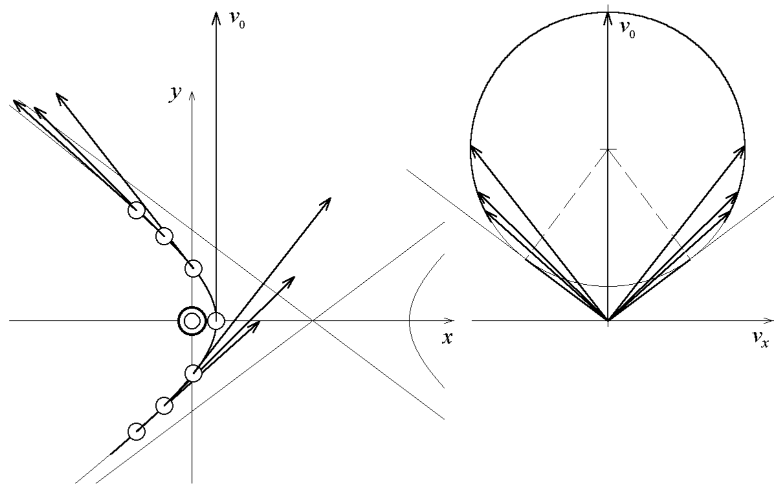

Рис. 5: Гиперболическая траектория с векторами скоростей в разных ее точках (слева) и годограф в пространстве скоростей (справа).

в кулоновом (ньютоновском) центральном поле, где сила квадратично убывает с расстоянием.

Дополнение: Аналитический вывод 1-го закона Кеплера

Ниже приводится динамическое доказательство того, что траектории в ньютоновском центральном поле тяготения представляют собой конические сечения. Для вывода формы траектории на основе законов динамики удобнее использовать вместо дифференциальных уравнений движения их первые интегралы, а именно законы сохранения момента импульса и энергии.

Траектория движения тела в центральном поле представляет собой плоскую кривую. Для задания положения тела в этой плоскости будем использовать полярные координаты r и φ. Начало координат выберем в силовом центре. Уравнение траектории в полярных координатах имеет вид $r = r(\varphi)$, т. е. оно выражает расстояние r от силового центра как функцию угла φ между текущим радиусом-вектором и некоторым фиксированным направлением в этой плоскости (полярной осью).

Выразим величину момента импульса частицы L в полярных координатах:

$$L = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mrv_\perp = mr^2\dot{\varphi}. \tag{14}$$

Здесь $v_\perp = r\dot{\varphi}$ представляет собой поперечную (азимутальную) проекцию скорости частицы (проекцию на направление, перпендикулярное к радиусу-вектору). Поскольку при движении момент импульса L остается неизменным, для любой точки траектории угловую скорость $\dot{\varphi}$ можно с помощью уравнения (14) выразить через расстояние r от начала координат (от силового центра) и постоянное значение L момента импульса:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \tag{15}$$

Далее мы используем закон сохранения энергии. В выражении $mv^2/2$ для кинетической энергии квадрат скорости частицы представим как сумму квадратов ее радиальной ($\dot{r}$) и поперечной ($r\dot{\varphi}$) проекций: $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Подставляя $\dot{\varphi}$ из уравнения (15) во второе слагаемое, получаем следующее выражение для полной энергии частицы $E_{\text{kin}} + U$ в полярных координатах:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E. \tag{16}$$

Постоянные значения полной энергии E и момента импульса L в уравнении (16) определяются начальными условиями. Уравнение (16) не содержит угловой переменной φ. Поэтому его можно трактовать как закон сохранения энергии для одномерного (радиального) движения частицы массы m в некоторой эффективной потенциальной яме, где зависимость потенциальной энергии от r дается выражением $U_{\text{eff}}(r) = -GmM/r + L^2/(2mr^2)$. Графики эффективной потенциальной энергии $U_{\text{eff}}(r)$ и каждого из ее слагаемых показаны на рис. 6.

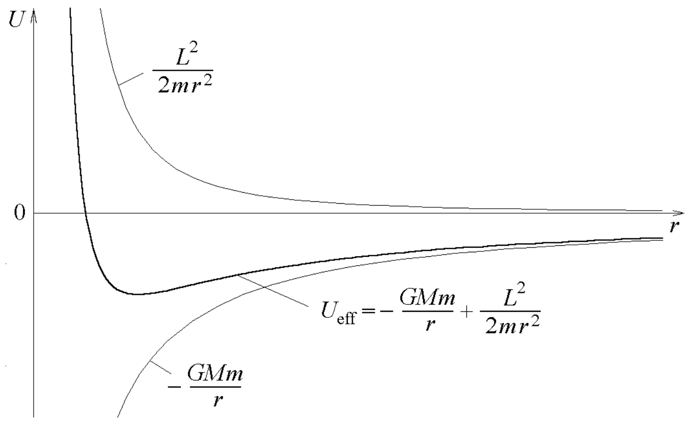

Рис. 6: График эффективной потенциальной энергии $U_{\text{eff}}(r)$ для радиальной составляющей движения тела в центральном поле тяготения.

Левый берег потенциальной ямы очень крутой и бесконечно высокий: $U_{\text{eff}}(r) \to \infty$ при $r \to 0$ благодаря второму слагаемому $L^2/(2mr^2)$. Пологий правый берег обусловлен членом $-GmM/r$ в $U_{\text{eff}}(r)$ и поднимается лишь до нулевой отметки потенциальной энергии: $U_{\text{eff}}(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому при положительных значениях полной энергии приходящая из бесконечности частица приближается к силовому центру до некоторого минимального расстояния $r_{\min}$, где полная энергия сравнивается с $U_{\text{eff}}(r)$, и затем снова удаляется в бесконечность.

При отрицательных значениях полной энергии частица «заперта» в потенциальной яме и совершает периодическое движение между ее берегами. При этом расстояние r до силового центра изменяется в некоторых конечных пределах от $r_{\min}$ до $r_{\max}$. Таким случаям соответствуют орбиты конечных размеров, при движении по которым угловая переменная φ совершает «обход» по полному кругу в пределах от 0 до 2π с определенным периодом. Центральное кулоново поле, в котором сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, замечательно тем, что в нем периоды радиального и углового движений совпадают при любых начальных условиях, соответствующих отрицательным значениям полной энергии. Поэтому орбита оказывается замкнутой.

При любом искажении (возмущении) кулонова поля (например, при отклонении формы планеты от идеальной сферической симметрии) периоды радиального и углового движений уже не совпадают, и «чудо» замкнутых кеплеровых орбит бесследно исчезает. Отмеченное выше совпадение периодов радиального и углового движений (такого рода совпадения называют «вырождением») связано с определенной («скрытой») симметрией кулонова поля и существованием обусловленного этой симметрией инварианта (сохраняющейся при движении величины). Соответствующий инвариант (так называемый вектор Рунге — Ленца или вектор Лапласа) можно назвать *динамическим*, поскольку его существование связано с определенным законом силы (обратная пропорциональность квадрату расстояния), тогда как такие инварианты как момент импульса и полная энергия могут быть отнесены к *геометрическим*, поскольку их существование обусловлено общими свойствами симметрии пространства и времени (изотропностью пространства и однородностью времени соответственно).

Чтобы найти форму траектории $r = r(\varphi)$, исключим время из уравнения (16). Рассматривая r как функцию φ, а не как явную функцию времени t, имеем:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{mr^2}. \tag{17}$$

Здесь мы выразили угловую скорость $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ через момент импульса L с помощью уравнения (15). Подставляя это выражение для $\dot{r}$ в уравнение (16), получаем дифференциальное уравнение для функции $r(\varphi)$, которая определяет искомую траекторию частицы. Это уравнение можно упростить, если вместо $r(\varphi)$ ввести новую неизвестную функцию $\rho = \rho(\varphi)$ с помощью соотношения $\rho = 1/r$. Поскольку

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -r^2\frac{d\rho}{d\varphi},$$

из уравнения (17) находим, что

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d\rho}{d\varphi}, \quad \dot{r}^2 = \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2. \tag{18}$$

Подставляя это выражение для $\dot{r}^2$ в уравнение (16), получаем следующее дифференциальное уравнение для $\rho(\varphi)$:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 - \frac{2Gm^2M}{L^2}\rho = \mathrm{const}. \tag{19}$$

В этом уравнении первого порядка переменные ρ и φ разделяются, и потому его решение может быть найдено стандартными методами.

Однако можно добиться еще большего упрощения, если продифференцировать это уравнение по φ, заменяя его следующим уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C, \tag{20}$$

где введено обозначение $C = Gm^2M/L^2$.

Это уравнение с постоянными коэффициентами часто встречается в различных задачах. В частности, аналогичным уравнением описываются собственные колебания гармонического осциллятора. Решение этого уравнения хорошо известно:

$$\rho(\varphi) = C + A\cos(\varphi - \varphi_0), \tag{21}$$

где произвольные постоянные A и φ_0 определяются из начальных условий. Возвращаясь теперь к исходной искомой функции $r = 1/\rho$, получаем:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{22}$$

где использованы следующие обозначения:

$$p = \frac{1}{C} = \frac{L^2}{Gm^2M}, \qquad e = \frac{A}{C}. \tag{23}$$

Уравнение (22) выражает искомую форму траектории тела, движущегося в ньютоновском центральном поле тяготения, сила которого спадает обратно пропорционально квадрату расстояния. Из аналитической геометрии известно, что (22) есть уравнение конического сечения, т. е. кривой, которая образуется при пересечении кругового конуса плоскостью. В зависимости от наклона секущей плоскости к оси конуса, в сечении получаются окружность, эллипс, парабола или гипербола. В уравнении (22) $\varphi - \varphi_0$ есть угол между радиусом-вектором и осью симметрии траектории. Эта ось направлена из силового центра в ближайшую к нему точку траектории. Если полярную ось системы координат выбрать вдоль этой оси симметрии, то константа φ_0 в уравнении (22) обращается в нуль.

Входящая в уравнение (22) величина $p = L^2/(Gm^2M)$ имеет размерность длины. Она называется *фокальным параметром* конического сечения. Безразмерная величина e называется *эксцентриситетом* конического сечения. При $e = 0$ из уравнения (22) следует, что $r = p = \text{const}$, т. е. расстояние до силового центра не зависит от φ и орбита представляет собой окружность. При $e < 1$ уравнению (22) соответствует эллипс (см. рис. 1 на стр. 4), при $e = 1$ — парабола, и при $e > 1$ — гипербола.

Параметры орбиты p и e можно выразить через сохраняющиеся при движении динамические параметры, а именно полную энергию E и момент импульса L, и через физические параметры системы M и m. В соответствии с (23) фокальный параметр p зависит только от момента импульса L: $p = L^2/(GMm^2)$. Ниже мы получим значения большой полуоси a (для замкнутых орбит) и эксцентриситета e.

Пусть r_P — расстояние между силовым центром и ближайшей к нему точкой траектории (перигелием, перигеем или в общем случае перицентром), а v_P — скорость в этой точке. (В этой точке вектор скорости $\mathbf{v}$ перпендикулярен радиусу-вектору $\mathbf{r}$). Тогда полную энергию можно записать следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} = \frac{L^2}{2mr_P^2} - \frac{GMm}{r_P}. \tag{24}$$

Мы выразили в (24) скорость в перигее через момент импульса $L = mr_Pv_P$. Из уравнения (22) следует, что расстояние r_P до перигея для орбиты с заданными параметрами p и e равно $p/(1 + e)$. Подставляя $r_P = p/(1 + e)$ и $L^2 = pGMm^2$ из (23) в уравнение (24), получаем:

$$E = -(1-e^2)\frac{GMm}{2p} = -\frac{GMm}{2a}. \tag{25}$$

В последнем равенстве использовано соотношение $a = p/(1-e^2)$ между большой полуосью a и параметрами эллипса p и e. Для конечных замкнутых орбит $e < 1$ и величина a в (25) положительна. Мы видим, что замкнутым орбитам соответствуют отрицательные значения полной энергии: $E < 0$. Из уравнения (25) следует, что большая полуось a для таких замкнутых эллиптических орбит зависит только от величины полной энергии E: $a = -GMm/(2E)$. Таким образом, большая полуось и, следовательно, период обращения T однозначно определяются полной энергией и не зависят от момента импульса. Период обращения одинаков для всех орбит с данным значением полной энергии (или большой полуоси), независимо от эксцентриситета орбиты. В частном случае круговой орбиты $r = a$, и уравнение (25) совпадает с известным выражением $E = -GMm/(2r)$ для полной энергии спутника на круговой орбите.

При равном нулю значении полной энергии ($E = 0$) уравнение (25) дает $e = 1$. Коническое сечение с $e = 1$ — это парабола. Положительным значениям полной энергии ($E > 0$) соответствуют эксцентриситеты $e > 1$, т. е. гиперболические траектории. Если применить соотношение $a = p/(1-e^2)$ к гиперболе ($e > 1$), для a получается отрицательное значение. В этом случае $|2a|$ имеет геометрический смысл кратчайшего расстояния между двумя ветвями гиперболы (измеряемого вдоль главной оси, проходящей через фокусы).

В общем случае из уравнения (25) можно получить выражения для большой полуоси a и эксцентриситета e орбиты через постоянные значения полной энергии E и момента импульса L. Подставляя $p = L^2/(GMm^2)$ в уравнение (25), получаем:

$$a = -\frac{GMm}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}. \tag{26}$$

Рекомендуемая литература:
[1], стр. 303–313.
[2] ,стр. 311–320.
[3], стр. 122–139, стр. 167–173.
[4], стр. 3–38.

Список литературы

[1] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (берклиевский курс физики, т. 1). М., «Наука», 1971.

[2] Общий курс физики, т. 1 Механика. М., «Наука», 1974.

[3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1 (Современная наука о природе. Законы механики). М., «Мир», 1966.

[4] Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. СПб, 2006.