Собственные колебания линейного осциллятора

Задачи для самостоятельного решения

Бутиков Е. И.

Аннотация. В данном пособии приведены контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы к лабораторной работе «Собственные колебания линейного осциллятора», а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

Содержание

1 Колебания в отсутствие трения

1.1 **Начальные условия и форма графиков.** В отсутствие трения линейный осциллятор совершает незатухающее гармоническое колебание, характеризуемое чисто синусоидальной зависимостью обобщенной координаты (угла отклонения) и обобщенной скорости (угловой скорости) от времени.

(а) Какой тип начальных условий приводит к чисто косинусоидальной зависимости угла отклонения от времени (т. е. к зависимости, выражаемой функцией $\varphi_0 \cos \omega_0 t$)?

(б) Допустим, что нужно получить колебания с угловой амплитудой 90°. Каким должно быть начальное отклонение $\varphi(0) = \varphi_0$ при нулевой начальной скорости ротора $\dot{\varphi}(0) = 0$? Какую начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ нужно сообщить ротору в положении равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90°? Напоминаем, что начальную угловую скорость Ω при вводе нужно выражать в единицах собственной частоты ω_0. Проверьте Ваш расчет с помощью моделирующего эксперимента на компьютере.

(в) Какую начальную угловую скорость $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ нужно сообщить ротору, отклоненному на угол 45° из положения равновесия, чтобы получить колебания той же амплитуды 90°?

1.2 **Максимальное отклонение и сохранение энергии.** Предположим, что осциллятор возбуждается из положения равновесия начальным толчком, который сообщает ротору угловую скорость $\Omega = 2\omega_0$. С помощью закона сохранения энергии рассчитайте максимальный угол, на который отклонится ротор из положения равновесия. Результат расчета проверьте в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание на то, что компьютерная программа выполняет численное интегрирование дифференциального уравнения движения, «ничего не зная» о законе сохранения энергии.

1.3 **Фазовая траектория и начальные условия.** Сопоставьте движение изображающей точки вдоль фазовой траектории консервативного осциллятора с графиками зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости. Для этого одновременно откройте окна «Фазовая траектория» и «Графики от времени».

(а) Как изменится фазовая траектория, если изменить начальные условия? Зависит ли направление движения изображающей точки по фазовой траектории от начальных условий?

(б) Возможно ли, чтобы фазовые траектории для разных начальных условий оказались совпадающими? Если да, то каким требованиям должны удовлетворять начальные условия для такого совпадения фазовых траекторий?

1.4 **Эллиптическая и круговая формы фазовой траектории линейного осциллятора.**

(а) Докажите аналитически, что фазовая траектория консервативного линейного осциллятора представляет собой эллипс с центром в начале координат фазовой плоскости. Воспользуйтесь общим решением дифференциального уравнения консервативного осциллятора. Чему равны полуоси этого эллипса?

(б) Покажите, что эллиптическая форма фазовой траектории линейного консервативного осциллятора непосредственно следует из закона сохранения энергии.

(в) При каком масштабе по оси ординат фазовой плоскости (по оси угловой скорости) фазовая траектория будет окружностью? С какой угловой скоростью движется изображающая точка по этой окружности при колебаниях осциллятора? Зависит ли угловая скорость точки от энергии осциллятора?

1.5 **Фазовая траектория и энергетические превращения.** Сопоставьте движение изображающей точки по фазовой траектории с графиком зависимости потенциальной энергии от угла отклонения ротора. Для этого откройте окно компьютерной программы «Фазовая траектория». Особое внимание обратите на положение точек максимального отклонения в параболической потенциальной яме и на фазовой плоскости. Почему в этих точках полная энергия осциллятора совпадает с потенциальной энергией пружины? Чему равны значения потенциальной и кинетической энергий в точках поворота и в положении равновесия при колебаниях, возбуждаемых начальными условиями $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega$? Чему равны значения угла отклонения $\varphi_{\max}$ в точках поворота?

1.6 **Форма и частота колебаний кинетической и потенциальной энергий.** Изучите графики зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий осциллятора, совершающего колебания в отсутствие трения.

(а) Что можно сказать о максимальных и средних значениях каждого из видов энергии? Сопоставьте эти графики с графиками угла отклонения и угловой скорости. Для этого одновременно откройте окна «Энергия от времнеи» и «Графики от времени».

(б) С какой частотой и в каких пределах происходят колебания каждого из видов энергии?

2 Затухающие собственные колебания

2.1 **Последовательность максимальных отклонений.** При действии слабой силы вязкого трения последовательность максимальных отклонений осциллятора, совершающего затухающие собственные колебания, образует убывающую геометрическую прогрессию: каждое максимальное отклонение равно предыдущему, умноженному на одно и то же число, меньшее единицы: $\exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0$.

(а) Рассчитайте значение добротности осциллятора, при котором амплитуда колебаний уменьшается вдвое через каждые два цикла колебаний. Введите это значение и проверьте закономерность убывания максимальных отклонений в моделирующем эксперименте. Зависит ли эта закономерность от способа возбуждения собственных колебаний (т. е. от начальных условий)?

(б) Оцените, на сколько процентов увеличивается период колебаний при этом значении добротности (по сравнению с периодом T_0 в отсутствие трения). Можно ли заметить такое увеличение периода колебаний в моделирующем эксперименте? Метки времени на графиках соответствуют целому числу периодов $T_0 = 2\pi/\omega_0$ в отсутствие трения.

2.2* **Максимальное отклонение после возбуждения начальным толчком.** Представьте, что колебания осциллятора возбуждаются начальным толчком, в результате которого маховик в положении равновесия получает угловую скорость $2\omega_0$. Добротность осциллятора $Q = 5$.

(а) Рассчитайте первое максимальное отклонение маховика.

(б) Каким будет следующее максимальное отклонение в противоположную сторону? Проверьте свои ответы в моделирующем эксперименте на компьютере.

2.3** **Сложные начальные условия.** Пусть колебания осциллятора возбуждаются сообщением ротору некоторой начальной скорости в отклоненном из равновесия положении.

(а) Допустим, что начальное отклонение ротора составляет 155 градусов, а начальная угловая скорость равна $2\omega_0$. Добротность осциллятора $Q = 5$. Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия при колебаниях.

(б) Рассчитайте максимальное отклонение маховика из положения равновесия для осциллятора с $Q = 5$ при том же начальном отклонении в 155 градусов, но при начальной скорости $-2\omega_0$.

(в) Пусть начальное отклонение ротора из положения равновесия составляет -155 градусов. Какой должна быть начальная скорость, чтобы ротор отклонился от положения равновесия на такой же угол 155 градусов в противоположную сторону? Добротность осциллятора $Q = 20$.

2.4* **Фазовая траектория затухающих колебаний.** Фазовая траектория затухающих собственных колебаний при $Q > 0.5$ представляет собой спираль, которая образована бесконечным числом постепенно сжимающихся витков вокруг фокуса, расположенного в начале координат фазовой плоскости. Этот фокус соответствует состоянию покоя в положении равновесия, к которому осциллятор асимптотически приближается.

(а) По какому закону уменьшается радиус этих витков по мере того, как фазовая траектория приближается к фокусу?

(б) Изменяется ли промежуток времени, в течение которого изображающая точка совершает один оборот вдоль очередного витка спирали, по мере уменьшения размера витков?

3 Неколебательное движение осциллятора

При достаточно сильном вязком трении ($Q \leq 0.5$) ротор осциллятора после начального возбуждения возвращается в положение равновесия без колебаний. В моделирующем эксперименте мы можем наблюдать, как в таких условиях стрелка асимптотически приближается с одной стороны к нулевому делению шкалы.

3.1* **Неколебательное движение при критическом затухании.** Исследуйте теоретически и экспериментально движение осциллятора в случае критического затухания, когда $\gamma = \omega_0$.

(а) Почему именно критическое затухание предпочтительно для измерительных приборов типа гальванометра с подвижной катушкой? Почему такие же требования предъявляются к системе упругой подвески кузова автомобиля?

(б) Рассчитайте максимальный угол отклонения из равновесия, если система с $Q = 0.5$ получает в положении равновесия начальную скорость $\Omega = 5\omega_0$.

(в) Сколько времени продолжается движение стрелки до этой точки максимального отклонения? Проверьте свои результаты в моделирующем эксперименте на компьютере. Обратите внимание, что стрелка приближается к положению равновесия с одной стороны, не пересекая средней точки шкалы.

3.2 **Критическое затухание.**

(а) Проверьте экспериментально, что значение $Q = 0.5$ ($\gamma = \omega_0$) действительно соответствует критическому затуханию. Чтобы убедиться в этом, покажите, что при немного большем значении Q (скажем, при $Q = 0.51$) стрелка возмущенного осциллятора действительно совершает сильно затухающие колебания с пересечением нулевого деления шкалы. Если ротор осциллятора с $Q = 0.51$ был отклонен из равновесия и отпущен без начальной скорости, то сколько времени пройдет пока он пересечет нулевое деление и начнет движение в обратную сторону (к положению равновесия)?

(б) Для осциллятора с критическим затуханием $Q = 0.5$ выразите константы C_1 и C_2 в общем решении $\varphi(t) = (C_1 t + C_2)\exp(-\gamma t)$ дифференциального уравнения через значения начального отклонения $\varphi(0) = \varphi_0$ и начальной скорости $\dot\varphi(0) = \Omega_0$.

(в) Возможно ли, чтобы движение системы с критическим затуханием происходило после первоначального возбуждения по чисто экспоненциальному закону? Если да, то какие начальные условия порождают такое движение? Какой вид имеет фазовая траектория такого движения? Проверьте свои ответы в эксперименте на компьютере.

(г) При каких начальных условиях ротор системы с критическим затуханием пересечет положение равновесия после первоначального возбуждения? Какой должна быть начальная угловая скорость ротора Ω при заданном начальном отклонении φ_0 для того, чтобы ротор пересек положение равновесия через промежуток времени $t = 3T_0$ после возбуждения (где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — период собственных колебаний в отсутствие трения)? Возможно ли повторное пересечение стрелкой нулевого деления шкалы?

3.3* **Движение при сверхкритическом затухании.**

(а) Выразите значения констант C_1 и C_2 в общем решении дифференциального уравнения для передемпфированной системы через произвольные значения начального отклонения $\varphi(0) = \varphi_0$ и начальной угловой скорости $\dot\varphi(0) = \Omega_0$.

(б) При каких начальных условиях последующее движение системы со сверхкритическим затуханием будет происходить по моноэкспоненциальному закону, т. е. будет характеризоваться единственной постоянной времени? Какие фазовые траектории соответствуют таким движениям?

(в) Объясните, почему при произвольных начальных условиях неколебательное движение маховика к положению равновесия происходит вообще говоря медленнее и требует большего времени, чем в случае критического затухания (для системы с тем же значением ω_0). Возможно ли, чтобы передемпфированная система пришла в состояние покоя в положении равновесия за меньшее время, чем система с критическим затуханием (при том же значении ω_0)? Если да, то при каких условиях возбуждения это произойдет?

(г) В чем заключается принципиальное отличие фазовых траекторий, соответствующих неколебательному движению, от фазовых траекторий затухающих колебаний?

(д) Возможно ли, чтобы ротор передемпфированной системы ($\gamma > \omega_0$) пересек положение равновесия после первоначального возбуждения? Если да, то при каких начальных условиях это произойдет? Возможно ли повторное пересечение положения равновесия?

4 Приложение: Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение движения линейного осциллятора:

$$\ddot\varphi + 2\gamma\dot\varphi + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Частота и период собственных колебаний в отсутствие трения (при $\gamma \ll \omega_0$):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Выражения для коэффициентов дифференциального уравнения через параметры электромагнитного колебательного контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}.$$

Решение, описывающее колебательное движение (справедливо при $\gamma < \omega_0$):

$$\varphi(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \delta_0),$$

где постоянные A_0 и δ_0 находятся из начальных условий $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$. Частота ω_1 затухающих колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0).$$

Эквивалентная форма общего решения:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t}(C\cos\omega_1 t + S\sin\omega_1 t),$$

где постоянные C и S находятся из начальных условий. Они связаны с A_0 и δ_0 соотношениями:

$$A = \sqrt{C^2 + S^2}, \qquad \tan\delta_0 = -S/C.$$

В случае слабого затухания ($\gamma \ll \omega_0$)

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2/(2\omega_0).$$

Время жизни колебаний (в течение которого амплитуда уменьшается в $e \approx 2.72$ раза):

$$\tau = 1/\gamma.$$

Неколебательное движение, происходящее при критическом затухании $\gamma = \omega_0$:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\gamma t}.$$

Добротность Q осциллятора:

$$Q = \pi\frac{\tau}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Число колебаний, на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое:

$$N_{1/2} = \frac{\ln 2}{\pi}Q = 0.22\,Q = \frac{Q}{4.53}.$$

Полная механическая энергия осциллятора складывается из потенциальной энергии упруго деформированной пружины и кинетической энергии вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2.$$

Средние за период колебаний значения потенциальной и кинетической энергий равны друг другу. Каждое из этих средних значений составляет половину полной энергии:

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}DA_0^2 = \frac{1}{4}J\omega_0^2 A_0^2.$$