

Физика колебаний – лабораторная работа 3

Колебания и перевороты жесткого маятника

Методические рекомендации

Цели работы:

- Изучить закономерности собственных колебаний в нелинейной физической системе на примере маятника – наиболее знакомой нелинейной механической системы.
- Изучить экспериментально зависимость периода собственных колебаний маятника от амплитуды и сравнить результаты измерений с приближенной теоретической формулой.
- Получить представление о фазовом портрете нелинейного осциллятора, о сепаратрисах и особых точках типа центр, фокус, седло.
- Изучить энергетические превращения при колебаниях маятника с большими амплитудами и при переворотах.
- Изучить лимитационное движение маятника в отсутствие трения.
- Измерить период колебаний с амплитудой, близкой к 180 градусам, и период переворотов. Сравнить результаты измерений с соответствующими теоретическими расчетами.
- Изучить влияние вязкого трения на фазовый портрет маятника.

При подготовке к лабораторной работе следует:

1. Повторить соответствующий теоретический материал (см. ниже), пользуясь конспектом лекций и рекомендованным Вам учебником физики.
2. Изучить учебное пособие «Собственные колебания жесткого маятника». Рекомендуется проделать на черновике вывод всех формул, особенно тех, которые приведены там без вывода.
3. Подготовить письменно краткие ответы на предлагаемые Вам «Вопросы для самоконтроля» (см. ниже).
4. Решить некоторые теоретические задачи из учебного пособия «Собственные колебания жесткого маятника» (по индивидуальному заданию преподавателя).
5. Познакомиться с «Требованиями к оформлению отчета» о выполненной работе.

Теоретический материал для предварительного изучения

Собственные колебания в системах с нелинейной восстанавливающей силой. Непараболическая потенциальная яма. Физический и математический маятники, их динамическая эквивалентность. Дифференциальное уравнение маятника. Фазовое пространство жесткого маятника, его топология и деление на области, соответствующие движениям различного характера. Сепаратрисы. Особые точки фазового пространства. Колебания с малыми и большими амплитудами. Зависимость периода колебаний от амплитуды. Лимитационное движение маятника. Перевороты и вращения маятника. Фазовый портрет консервативного маятника. Влияние вязкого трения на фазовые траектории.

Вопросы для самоконтроля

1. Выведите дифференциальное уравнение движения физического маятника. В каком смысле следует понимать утверждение, что математический и физический маятники представляют собой динамически эквивалентные системы?
2. Что такое приведенная длина физического маятника? Как она выражается через физические параметры системы?
3. Почему маятник относят к нелинейным колебательным системам с мягкой возвращающей силой?
4. Какими параметрами характеризуется модель маятника, используемая в программе?
5. Как получить уравнение фазовой траектории консервативного маятника, не интегрируя описывающего его дифференциального уравнения?
6. С каким свойством системы связана симметрия фазовых траекторий относительно оси абсцисс фазовой плоскости? Симметрия относительно оси ординат?
7. Какой вид имеют фазовые траектории малых колебаний маятника в отсутствие трения? Какие изменения претерпевают фазовые траектории по мере увеличения амплитуды?
8. Как изменяется соотношение средних значений потенциальной и кинетической энергий при увеличении амплитуды колебаний маятника?
9. Выведите уравнение сепаратрисы, т.е. кривой, разделяющей фазовые траектории колебаний и переворотов консервативного маятника.
10. Какую минимальную начальную угловую скорость нужно сообщить маятнику в нижнем положении для того, чтобы он достиг перевернутого положения?
11. Сколько времени требуется маятнику для достижения перевернутого положения в условиях лимитационного движения (т. е. движения с минимальной начальной угловой скоростью) из положения устойчивого равновесия?
12. Какие точки фазовой плоскости называются особыми? Почему состоянию покоя маятника в нижнем (устойчивом) положении равновесия и в перевернутом (неустойчивом) положении соответствуют особые точки фазовой плоскости? Какие типы особых точек соответствуют каждому из этих положений?
13. Выведите приближенное (линеаризованное) дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника в малой окрестности перевернутого положения. Какой вид имеет общее решение этого уравнения?
14. Какие качественные изменения в фазовом портрете маятника вызывает добавление в модель слабого вязкого трения?

Задания и порядок выполнения лабораторной работы

1. Начните работу с просмотра примеров, последовательно выбирая их из списка, который открывается при щелчке мышью по кнопке «Примеры», расположенной непосредственно под моделью маятника. Эти примеры иллюстрируют как типичные, так и некоторые необычные виды движений маятника, детальное изучение которых предусмотрено в данной лабораторной работе.
2. Исследуйте экспериментально колебания маятника в отсутствие трения при сравнительно небольших амплитудах. Для моделирования колебаний в такой идеализированной ситуации полностью отключите трение, сняв «галочку» в соответствующем окне панели «Параметры» (справа от модели маятника).
 - Для получения колебаний с заданной амплитудой задайте нулевую начальную скорость и начальное угловое отклонение, равное нужному значению амплитуды. Измерьте периоды колебаний маятника при значениях амплитуды, составляющих 15, 30, 45, 60, 75 и 90 градусов. Результаты измерений (выраженные в естественных для маятника единицах, т.е. в периодах T_0 предельно малых колебаний) занесите в таблицу.
 - Для измерений периода колебаний используйте таймер (показания таймера выводятся в левом верхнем углу окна с изображением маятника) и кнопки «Сброс таймера», «Шаг». Какие моменты следует выбирать для снятия показаний таймера (для остановки и пуска моделирования) при экспериментальных измерениях: когда маятник проходит через положение равновесия или когда он достигает положений наибольшего отклонения? Мотивируйте свой ответ.
 - При выполнении измерений периода колебаний нужно снимать показания таймера при прохождении маятником определенного положения (например, положения равновесия). Но практически невозможно зафиксировать показание таймера (остановить моделирование) точно в нужный момент. В этом заключается неизбежная причина погрешности измерений. Предложите способ измерения периода колебаний (на основе средств, предоставляемых данной компьютерной моделью), обеспечивающий по возможности наибольшую точность результатов.

- Сравните экспериментально измеренные значения периода T (для каждого значения амплитуды колебаний) со значениями периода, рассчитанными по приближенной теоретической формуле

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right).$$

Здесь T_0 – период предельно малых колебаний маятника, а амплитуда φ_0 выражена в радианах. Найдите максимальное значение амплитуды φ_0 , вплоть до которого ошибка этой теоретической формулы не превышает одного процента. Какую ошибку дает эта формула при амплитуде 45 градусов? Как можно получить эту приближенную теоретическую формулу? (Приведите ее вывод в отчете.)

- Обратите внимание на изменения формы графиков угла отклонения и угловой скорости (а также графиков энергетических превращений и фазовой траектории) по мере увеличения амплитуды колебаний. Для этого воспользуйтесь предоставляемой программой возможностью вывода графиков (одновременно с выполнением моделирования колебаний), устанавливая «галочки» в соответствующих местах панели управления (слева от модели маятника).
- Изучите колебания маятника с большими амплитудами при отсутствии трения. При больших амплитудах отличия маятника от линейного осциллятора проявляются наиболее отчетливо.
 - В условиях отсутствия трения воспроизведите колебания с амплитудой около 110 градусов. Объясните наблюдаемую форму графиков угловой скорости и угла отклонения в таких колебаниях.
 - Сравните графики временной зависимости кинетической и потенциальной энергий друг с другом при больших амплитудах. Сопоставьте эти графики с графиками угла отклонения и угловой скорости. Как можно объяснить доминирование потенциальной энергии при больших амплитудах? Для ответа на этот вопрос воспользуйтесь отличием формы потенциальной ямы маятника от параболической потенциальной ямы линейного (гармонического) осциллятора.
 - Внимательно проследите за построением фазовых траекторий и графиков потенциальной и кинетической энергий для колебаний и переворотов маятника при разных значениях полной энергии (выбирая для этого подходящие начальные условия). Обратите внимание на положение точек поворота в потенциальной яме и на фазовой плоскости.
 - Исследуйте экспериментально зависимость периода колебаний от сообщенной маятнику энергии. Обратите внимание на быстрый рост периода при приближении полной энергии к высоте потенциального барьера (т.е. к потенциальной энергии перевернутого маятника), и на быстрое убывание периода при дальнейшем росте полной энергии.
 - Изучите экспериментально движение маятника, близкое к лимитационному. Для этого в условиях отсутствия трения задайте при нулевой начальной скорости начальное отклонение почти 180 градусов. Используйте графики временной зависимости угла отклонения и угловой скорости и фазовую траекторию колебаний.
 - Измерьте ширину «ступеньки» на графике временной зависимости угла отклонения или, что то же самое, ширину «импульса» на графике угловой скорости. За меру этой ширины можно принять время, в течение которого маятник проходит от одного горизонтального положения до другого (при движении через нижнее положение равновесия). Для таких измерений удобно использовать таймер.
 - Какую угловую скорость (в единицах частоты малых колебаний) нужно сообщить маятнику в положении равновесия, чтобы получить движение, близкое к лимитационному? Проверьте свое предсказание в моделирующем эксперименте. Почему при сообщении маятнику такой скорости при моделировании он не остается навсегда в перевернутом положении?
 - Какую скорость нужно сообщить маятнику, чтобы изображающая точка на фазовой плоскости проходила бы только вдоль одной из ветвей сепаратрисы (например, верхней)?
 - Исследуйте экспериментально влияние слабого вязкого трения на превращения энергии, на форму графиков и на фазовую траекторию маятника.
 - Задайте добротность Q порядка 10 – 20 и выберите начальные условия, при которых маятник сначала совершает колебания сравнительно небольшой амплитуды (25 – 35 градусов). Откройте раздел программы «Фазовая траектория». При моделировании колебаний обратите внимание на характер убывания амплитуды и на вид фазовой траектории. Особая точка в начале координат фазовой плоскости при добавлении трения в модель из точки типа центр превращается в точку типа фокус.
 - Проследите за поведением изображающей точки в потенциальной яме и на фазовой плоскости при затухании малых колебаний маятника. Особое внимание обратите на график временной зависимости полной энергии: если брать среднее за период значение полной энергии, ее убывание происходит приблизительно по экспоненциальному закону, но на протяжении каждого периода убывание энергии происходит неравномерно – скорость диссипации энергии максимальна в те моменты, когда максимальна угловая скорость маятника.

- Задайте добротность Q порядка 10 – 20 и выберите такую начальную угловую скорость, чтобы маятник сначала совершал полные перевороты. По графикам угла отклонения и угловой скорости, а также по фазовой траектории проследите за постепенным изменением характера движения. Обратите внимание на постепенное изменение формы графиков по мере того, как механическая энергия маятника и амплитуда уменьшаются из-за трения. В тот момент, когда изображающая точка на фазовой плоскости пересекает сепаратрису, режим однонаправленного вращения сменяется затухающими колебаниями. С этого момента маятник «заперт» в потенциальной яме между соседними барьерами. Обратите внимание на то, как первоначально пилообразная кривая графика угловой скорости (с ее острыми почти прямолинейными треугольными зубцами) и первоначальная кривая графика угла отклонения (с почти параболическими зубцами) постепенно эволюционируют, приближаясь по форме к синусоидальным кривым, характерным для гармонического осциллятора.
 - Проследите, как при достаточно большой начальной скорости изображающая точка сначала (при переворотах маятника) проходит над вершинами потенциальных барьеров, а затем (при колебаниях) движется между берегами потенциальной ямы, постепенно опускаясь на ее дно.
6. Проверьте в моделирующем эксперименте Ваши теоретические решения тех задач из учебного пособия, которые были предложены Вам преподавателем в качестве индивидуального задания.
- Введите необходимые значения параметров и выполните соответствующие эксперименты. Зарисуйте (или распечатайте на принтере) графики и фазовые диаграммы для включения в отчет.
 - Сопоставьте результаты экспериментов с Вашими теоретическими предсказаниями. Если обнаруживаются расхождения результатов расчета с экспериментом, обязательно попытайтесь установить причину расхождений. Результаты экспериментальной проверки Ваших решений включите в отчет о лабораторной работе.

После выполнения всех заданий подготовьте отчет о проделанной лабораторной работе, руководствуясь «Требованиями к оформлению отчета».

Требования к оформлению отчета

Отчет о проделанной лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Титульный лист с указанием названия и номера лабораторной работы, фамилии и имени студента, номера учебной группы, даты выполнения работы и даты представления отчета.
2. Цель лабораторной работы с определением изучаемого физического явления и краткое описание моделируемой физической системы и ее математической модели.
3. Теоретический раздел с кратким изложением основных характеристик изучаемого явления, его места в классификации колебаний по разным признакам, и описанием математической модели физической системы, используемой для его изучения. В этом разделе должны быть приведены все основные формулы (связь параметров физической системы и ее математической модели, дифференциальное уравнение, описывающее систему, его общее решение, частные решения для наиболее важных и интересных случаев, уравнение фазовой траектории, выражения для разных видов энергии и их средних значений и т.п.). В этом разделе следует обязательно привести вывод тех формул, которые в учебном пособии приведены без вывода.
4. Ответы на вопросы для самоконтроля, которые сформулированы выше в методических рекомендациях к данной лабораторной работе. Рекомендуется проиллюстрировать Ваши ответы соответствующими графиками или иными результатами моделирования (для тех вопросов, где это целесообразно).
5. Теоретическое решение задач из учебного пособия, предложенных Вам преподавателем в качестве индивидуального задания, и результаты самостоятельной проверки Ваших решений с помощью моделирующего эксперимента. В этом разделе нужно привести таблицы соответствующих измерений с обработкой результатов (для заданий, где такие измерения необходимы), графики и/или фазовые траектории (зарисовав их с экрана или распечатав на принтере, если есть такая возможность).